Spektralanalyse physiologischer Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 5

zum Übungsblatt

Aufgabe 1:

$$C(\tau) = C(0)e^{-\lambda|\tau|}$$

$$S(f) = C(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|\tau|}e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

$$= C(0)\left[\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}e^{-i2\pi f\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\tau}e^{-i2\pi f\tau}d\tau\right]$$

$$= \frac{2C(0)\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\nu^2}$$

Aufgabe 2:

$$C(\tau) = D\delta(\tau)$$

$$E[\tilde{\xi}(f)\tilde{\xi}(f')] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-i2\pi f t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t') e^{-i2\pi f' t'} dt'\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[\xi(t)\xi(t')\right] e^{-i2\pi f t} e^{-i2\pi f' t'} dt dt'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E\left[\xi(t)\xi(t')\right]}_{=D\delta(t-t')} e^{-i2\pi f t} e^{-i2\pi f' t'} dt dt'$$

$$= D\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi (f+f')t} dt$$

$$= D\delta(f+f')$$

weiter mit Vorlesung 5

Definition: *starke Stationarität*:

$$\boxed{p(x_1(t_k);\ldots;x_N(t_k)) = p(x_1(t_k+\tau);\ldots;x_N(t_k+\tau)) \quad \tau \in \mathcal{R}}$$

Definition: *Stationarität im weiteren Sinn:*

$$E\left[x(t)\right] = \mu \ \forall t \in \mathcal{R}$$

$$E\left[(x(t) - E[x])^2\right] = \sigma^2(t) < \infty$$

$$Cov(x(t_1), y(t_2)) = Cov(x(t_1+\tau), y(t_2+\tau)) \quad \tau \in \mathcal{R}$$

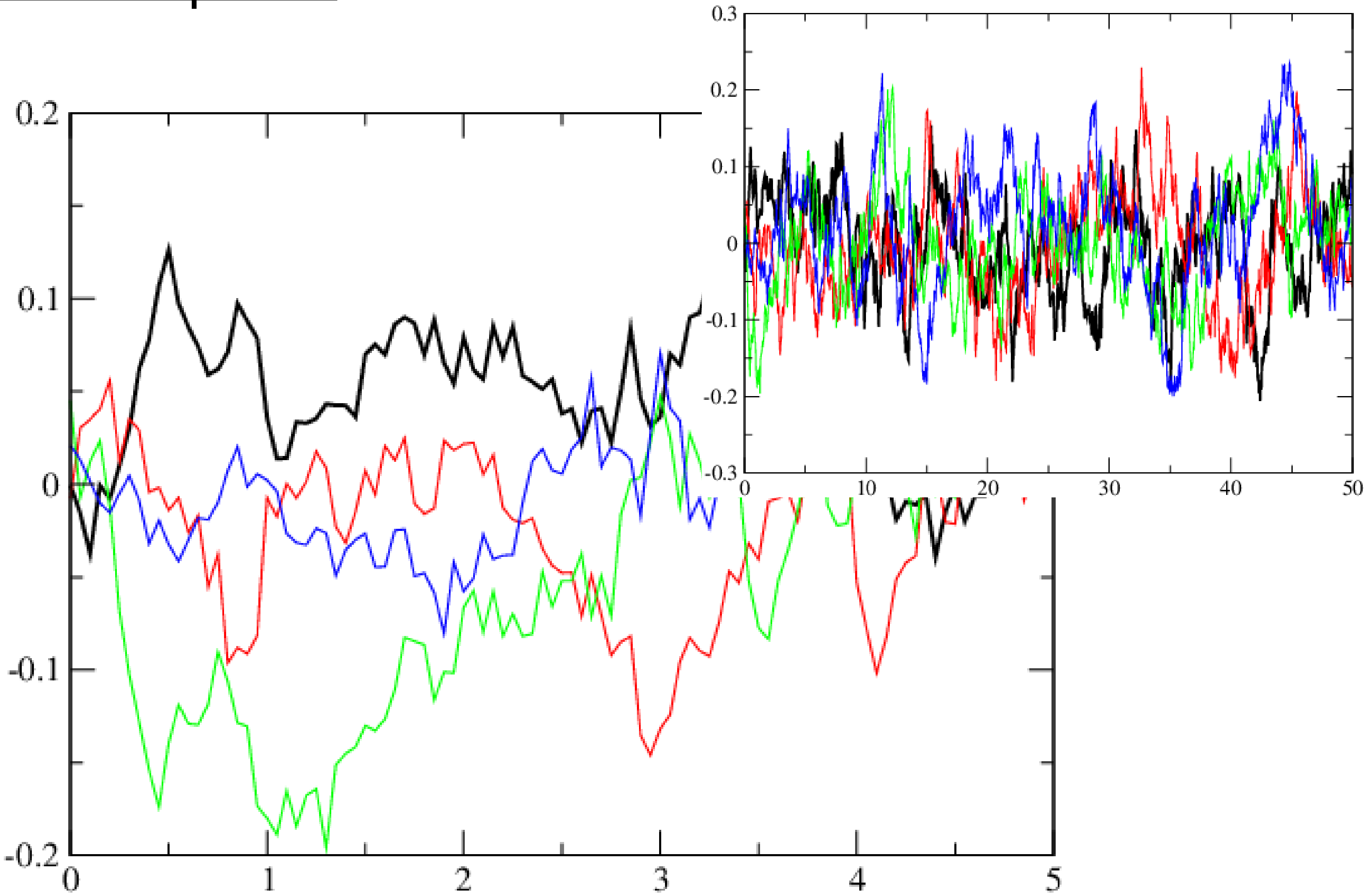
$$Cov(x(t_1), y(t_2)) = E\left[(x(t_1) - \bar{x})(y(t_2) - \bar{y})\right]$$

falls ein Signal stationär ist und falls

Scharmittel = Zeitmittel

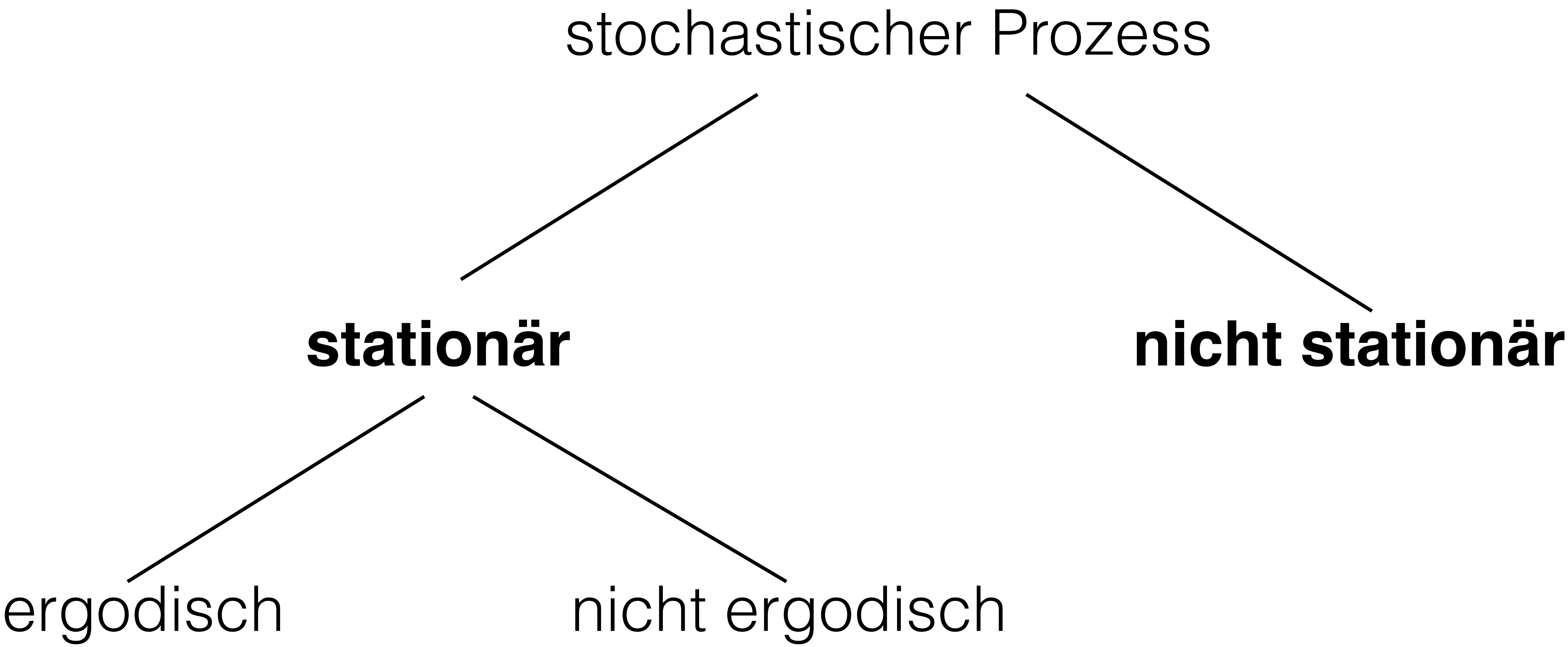
$\Rightarrow$ System ist **ergodisch**

<u>zurück zum Beispiel:</u>



- stochastischer Prozess ist stationär für grosse Zeiten

- stochastischer Prozess ist ergodisch für grosse Zeiten


stochastischer Prozess
stationär
nicht stationär
ergodisch
nicht ergodisch

wo gibt es denn Zufallsprozesse in biologischen Systemen ?

- in Neuronen:
  Öffnungsrate der gates in Ionenkanälen

- in Tierpopulationen:
  Geburt oder Tod von Tieren nicht vorhersagbar

- allgemein:
  Zufall kann auch Prozesse beschreiben,
  deren Ursache und Dynamik unbekannt ist

falls man ein mathematisches Modell
eines stochastischen Prozesses hat:

kann man PSD analytisch berechnen ?

→ wichtiger Exkurs in **Lineare Antwort - Theorie**

Beispiel:

$$\dot{x} = -\alpha x + I(t)\ ,\ \ \alpha \in \mathcal{R}_+$$

I(t): Stimulus

Lösung: $$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} + \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} I(\tau) d\tau$$

allgemeine Formulierung der linearen Antwort:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) I(\tau) d\tau}$$

im Beispiel:

$$G(t) = e^{-\alpha t}\Theta(t)$$

G(t): Lineare Antwort-Funktion oder *Green-Funktion*

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\nu)\tilde{I}(\nu) e^{i2\pi\nu t}$$

nach Wiener-Khinchin Theorem kann PSD mittels Korrelationsfunktion bestimmt werden:

$$C(\tau) = E\left[x(t)x(t-\tau)\right]$$

eingesetzt:

$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \tilde{G}(\nu)\tilde{I}(-\nu)\tilde{G}(\nu')\tilde{I}(-\nu')e^{i2\pi\nu t + i2\pi\nu' t - i2\pi\nu'\tau}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \tilde{G}(\nu)\tilde{G}(\nu')e^{i2\pi\nu t + i2\pi\nu' t - i2\pi\nu'\tau} E\left[\tilde{I}(-\nu)\tilde{I}(-\nu')\right]$$

für weisses Rauschen als Stimulus gilt (siehe Übungen):

$$E\left[\tilde{I}(\nu)\tilde{I}(\nu')\right] = \kappa^2\delta(\nu + \nu')$$

$$= \kappa^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\nu)\tilde{G}(-\nu)e^{i2\pi\nu t}$$

Da

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} \, d\tau \quad \Longrightarrow \quad \boxed{S(\nu) = |\tilde{G}(\nu)|^2}$$

<u>Frage:</u> was ist also $\tilde{G}(\nu)$ für ein stochastisches Modell ?

Beispiel-Modell: $\dot{x} = -\alpha x + \kappa\xi(t)$

$$\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} G(t-\tau)\xi(\tau) + \alpha G(t-\tau)\xi(\tau) \, d\tau = \kappa\xi(t)$$

$$\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} G(t-\tau) + \alpha G(t-\tau) \right) \xi(\tau) \, d\tau = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\xi(\tau) \, d\tau$$

$$\boxed{\dot{G}(t) + \alpha G(t) = \delta(t)}$$

Definition der inversen Fourier-Transformation eingesetzt:

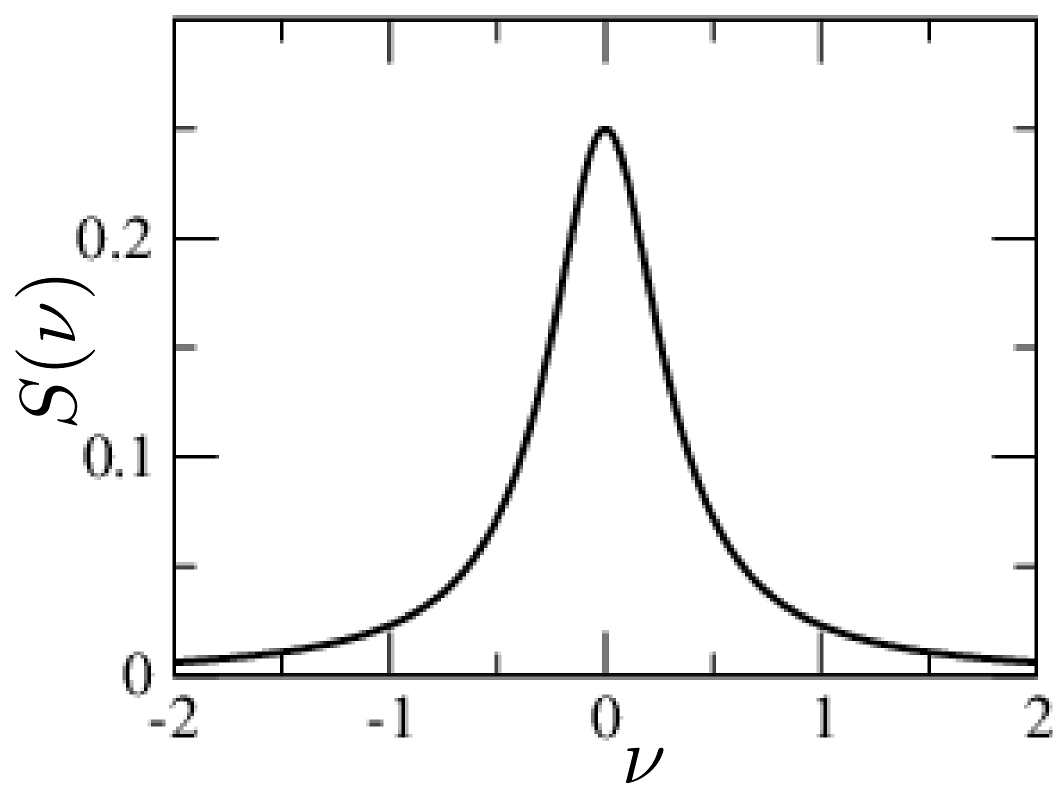
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(i2\pi\nu\tilde{G}(\nu) + \alpha\tilde{G}(\nu) \right) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

$$(i2\pi\nu + \alpha)\,\tilde{G}(\nu) = 1$$

$$\tilde{G}(\nu) = \frac{1}{i2\pi\nu + \alpha}$$

$$\boxed{S(\nu) = \frac{\kappa^2}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}}$$

Lorentz-Verteilung



in mehr-dimensionalen Modellen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}(t)$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{I} \in \mathcal{R}^n \ , \ \mathbf{G}, \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$$

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{I}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{G}}(\nu)\tilde{\mathbf{I}}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

$$E[I_j(t) I_k(t')] = \kappa_{jk}^2 \delta(t-t')$$

$$\longrightarrow \quad E[\tilde{I}_j(\nu)\tilde{I}_k(\nu')] = \kappa_{jk}^2 \delta(\nu+\nu')$$

$$C_\alpha(\tau) = E\left[x_\alpha(t) x_\alpha(t-\tau)\right]$$

$$x_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{\alpha,j}(\nu)\tilde{I}_j(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

Einstein-Summenkonvention über lateinische Indices

$$C_\alpha(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\nu d\nu' \tilde{G}_{\alpha,j}(\nu)\tilde{G}_{\alpha,k}(\nu') E\left[\tilde{I}_j(\nu)\tilde{I}_k(\nu')\right] e^{i2\pi(\nu+\nu')t} e^{-i2\pi\nu'\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\nu d\nu' \tilde{G}_{\alpha,j}(\nu)\tilde{G}_{\alpha,k}(\nu') \underbrace{E\left[\tilde{I}_j(\nu)\tilde{I}_k(\nu')\right]}_{=\kappa_{jk}^2\delta(\nu+\nu')} e^{i2\pi(\nu+\nu')t} e^{-i2\pi\nu'\tau}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \tilde{G}_{\alpha,j}(\nu)\tilde{G}_{\alpha,k}(-\nu)\kappa_{jk}^2 e^{i2\pi\nu\tau}$$

$$S_{\alpha\alpha}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau$$

$$\boxed{= \sum_{j,k} \tilde{G}_{\alpha,j}(\nu)\tilde{G}^*_{\alpha,k}(\nu)\kappa_{jk}^2}$$

PSD der Variable x_α

Annahme: Modell sei

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}(t)$$

$$\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{I}(\tau)d\tau$$

eingesetzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dt}\mathbf{G}(t-\tau) - \mathbf{A}\mathbf{G}(t-\tau) \right) \mathbf{I}(\tau)d\tau = \mathbf{I}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{G}(t) - \mathbf{A}\mathbf{G}(t) = \mathbf{1}\delta(t)$$

$$\mathbf{G}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{G}}(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$$

eingesetzt:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{G}}(\nu) = (2\pi i\nu\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}}$$

Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator mit stochastischem Stimulus

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = \kappa\xi(t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - \gamma y + \kappa\xi(t)\end{aligned}}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \end{pmatrix} \xi(t)$$

$$\kappa_{11}^2 = 0$$

$$\kappa_{22}^2 = \kappa^2$$

daraus folgt:

$$\tilde{\mathbf{G}}(\nu) = \begin{pmatrix} 2\pi i\nu - \gamma & -1 \\ \omega^2 & 2\pi i\nu \end{pmatrix} \frac{1}{2\pi i\nu(2\pi i\nu - \gamma) + \omega^2}$$

nun interessiert uns die Leistungsdichte S von x(t):

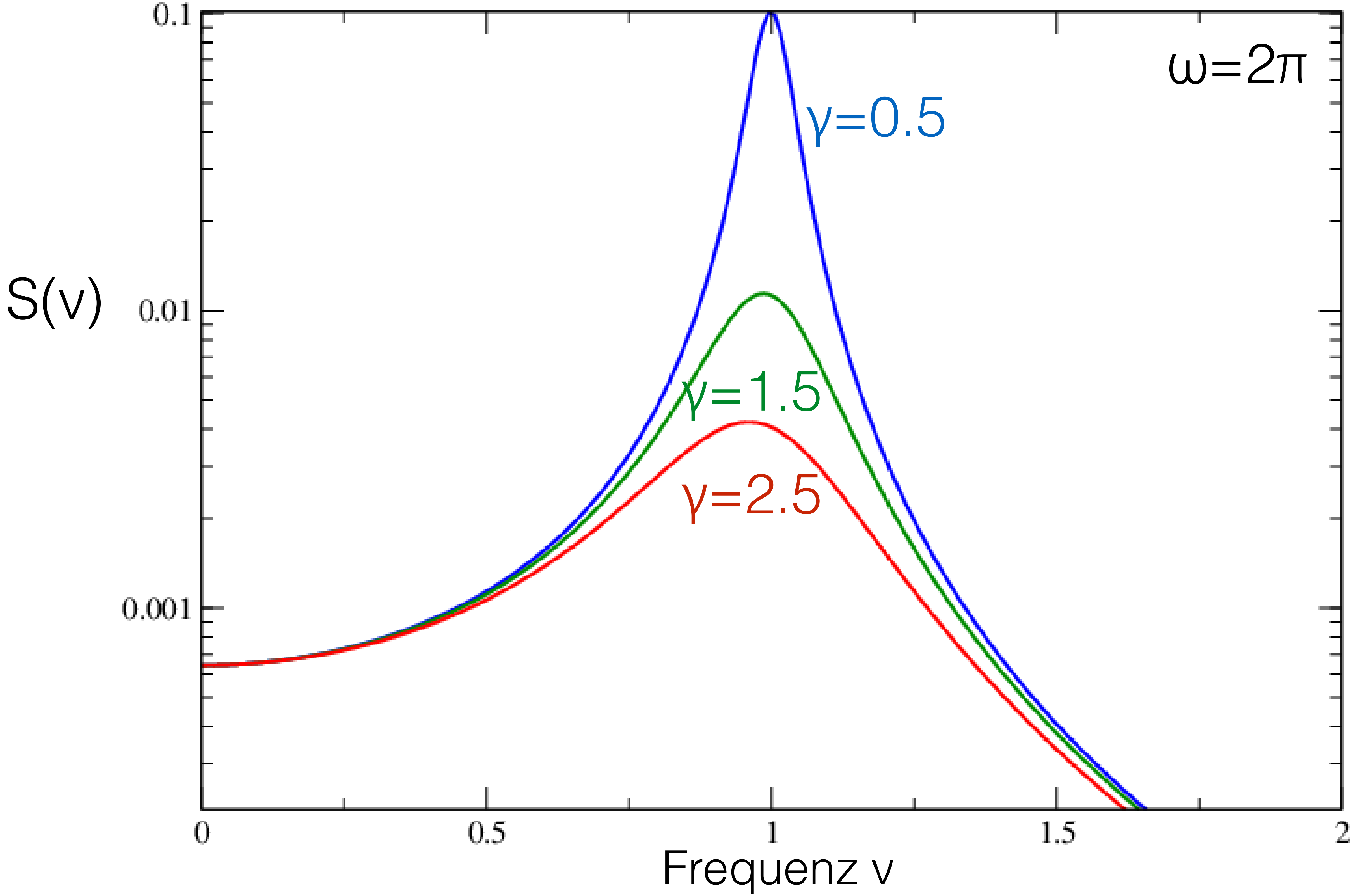
$$S_{\alpha\alpha}(\nu) = \sum_{j,k} \tilde{G}_{\alpha,j}(\nu)\tilde{G}^*_{\alpha,k}(\nu)\kappa^2_{jk}$$

$$S_{11}(\nu) = \tilde{G}_{12}(\nu)\tilde{G}^*_{12}\kappa^2$$

$$\boxed{S_{11}(\nu) = \frac{\kappa^2}{\omega^4 + 4\pi^2(\gamma^2 - 2\omega^2)\nu^2 + 16\pi^4\nu^4}}$$

$$\gamma \to 0 : S_{11}(\nu) \to \frac{\kappa^2}{(\omega^2 - 4\pi^2\nu^2)^2}$$

Maximum bei $\nu = \omega/2\pi$



0.1
0.01
0.001
S(ν)
ω=2π
γ=0.5
γ=1.5
γ=2.5
0
0.5
1
1.5
2
Frequenz ν

Wie berechnet man die zeitliche lineare Antwort eines Systems auf ein äusseres Signal ?

voriges Beispiel:

$$\dot{x} = -\alpha x + I(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) I(\tau) d\tau$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

eingesetzt:

$$\dot{G}(t) + \alpha G(t) = \delta(t)$$

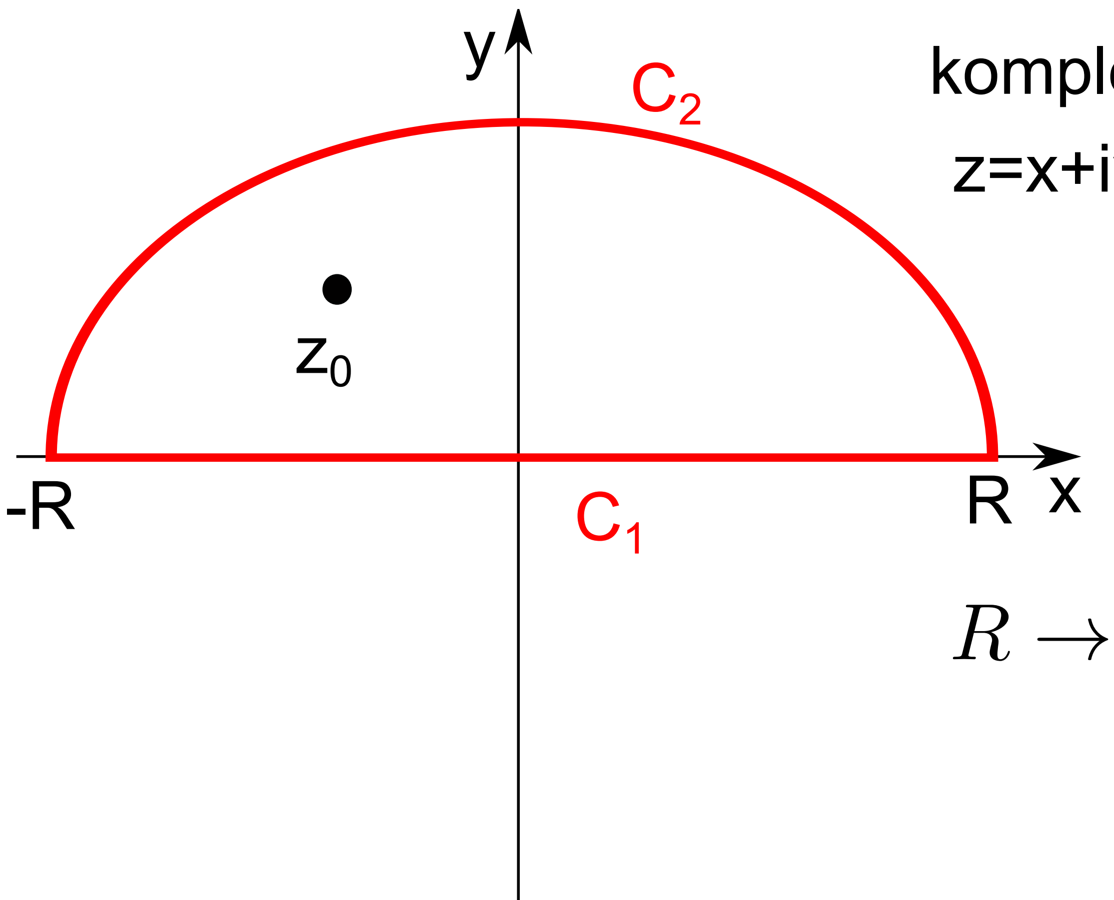
$$\tilde{G}(\nu) = \frac{1}{i2\pi\nu + \alpha}$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi\nu t}}{i2\pi\nu + \alpha} d\nu$$

$$= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi\nu t}}{2\pi\nu - i\alpha} d\nu$$

Erweiterung in komplexe Ebene:

$$= \frac{1}{i} \int_{C_1} \frac{e^{i2\pi z t}}{2\pi z - i\alpha} dz \ , \ \ z \in \mathcal{C}$$



komplexe Ebene C

z=x+iy

Singularität $\quad z_0 = i\alpha/2\pi$

$$R \to \infty$$

Residuensatz der Funktionalanalysis (vereinfacht):

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_k Res(z_k)f$$

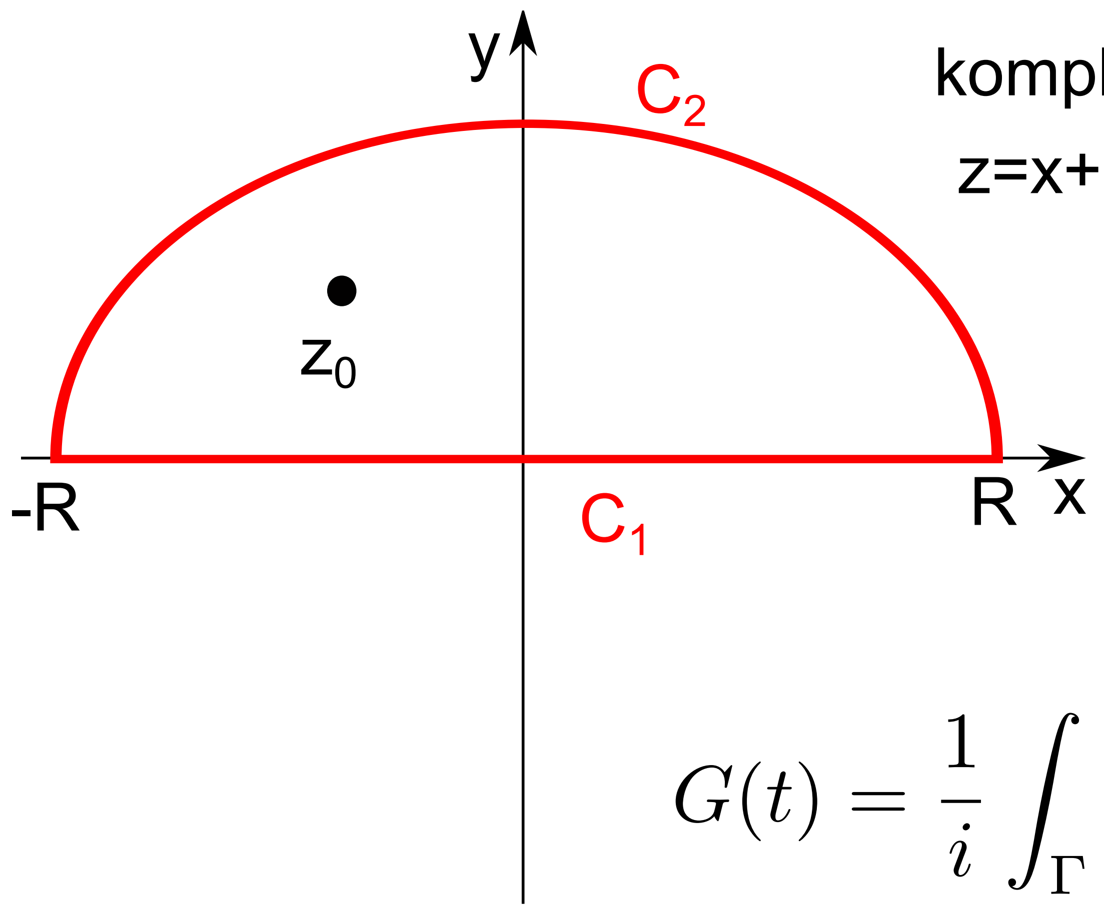
Γ : geschlossener Weg in einfach zusammenhängendem Gebiet *D* in komplexer Ebene $\mathcal{C}$

$f : D \to \mathcal{C}$ holomorphe Funktion (ist komplex differenzierbar)

$Res(z_k)f$: **Residuum** von *f* an Singularität z_k

Spezialfall: $f(z) = \dfrac{g(z)}{z - z_0}$

Residuum: $Res(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z)$



komplexe Ebene C

z=x+iy

$$\Gamma = C_1 + C_2$$

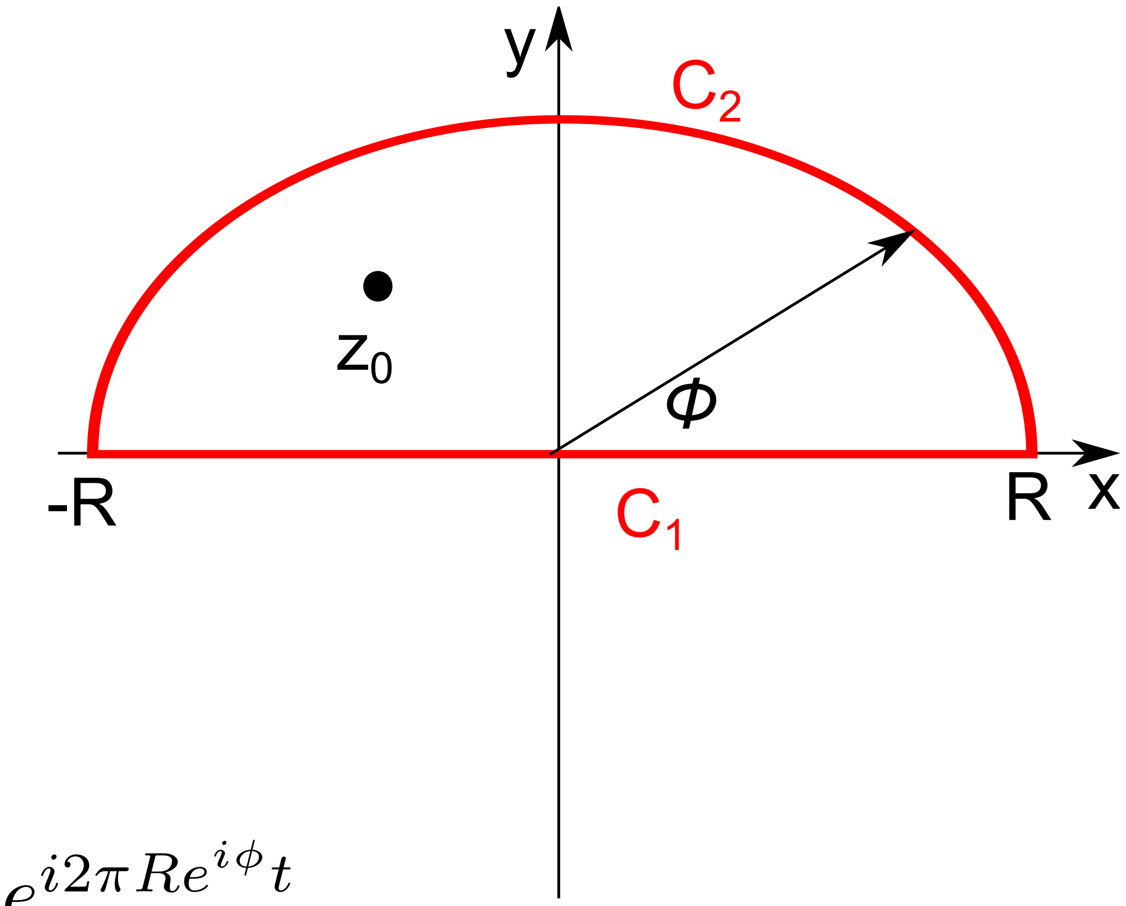
$$G(t) = \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{e^{i2\pi zt}}{2\pi z - i\alpha}dz - \frac{1}{i}\int_{C_2} \frac{e^{i2\pi zt}}{2\pi z - i\alpha}dz$$

Weg Γ: $$\frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{e^{i2\pi zt}}{2\pi z - i\alpha}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{i2\pi zt}}{z - i\alpha/2\pi}dz$$

Residuensatz $$= 2\pi i \frac{1}{2\pi i} e^{i2\pi(i\alpha/2\pi)t}$$

$$= e^{-\alpha t}$$

Wegintegral C2:



$$z = Re^{i\phi} \ , \ 0 \leq \phi \leq \pi \ , \ R \to \infty$$

$$\frac{1}{i}\int_{C_2} \frac{e^{i2\pi z t}}{2\pi z - i\alpha} dz = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_0^\pi \frac{e^{i2\pi Re^{i\phi}t}}{Re^{i\phi} - i\alpha/2\pi} d\phi$$

$$\leq \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_0^\pi \frac{|e^{i2\pi Re^{i\phi}t}|}{|Re^{i\phi} - i\alpha/2\pi|} d\phi$$

$$\frac{|e^{i2\pi Re^{i\phi}t}|}{|Re^{i\phi} - i\alpha/2\pi|} = \frac{|e^{i2\pi R\cos\phi t - 2\pi R \sin\phi t}|}{|Re^{i\phi} - i\alpha/2\pi|} \to 0 \ , \ t > 0$$

also: $$\frac{1}{i}\int_{C_2} \frac{e^{i2\pi z t}}{2\pi z - i\alpha} dz \to 0\ ,\ \ R \to \infty$$

nur dann, wenn t>0

Zusammenfassung:

$$\boxed{G(t) = e^{-\alpha t}\Theta(t)}$$

Θ(t): Heaviside-Funktion

eingesetzt:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} I(\tau) d\tau}$$

grosse Bedeutung von linearer Antwort-Theorie:

beschreibt lineare Filter eines Signals

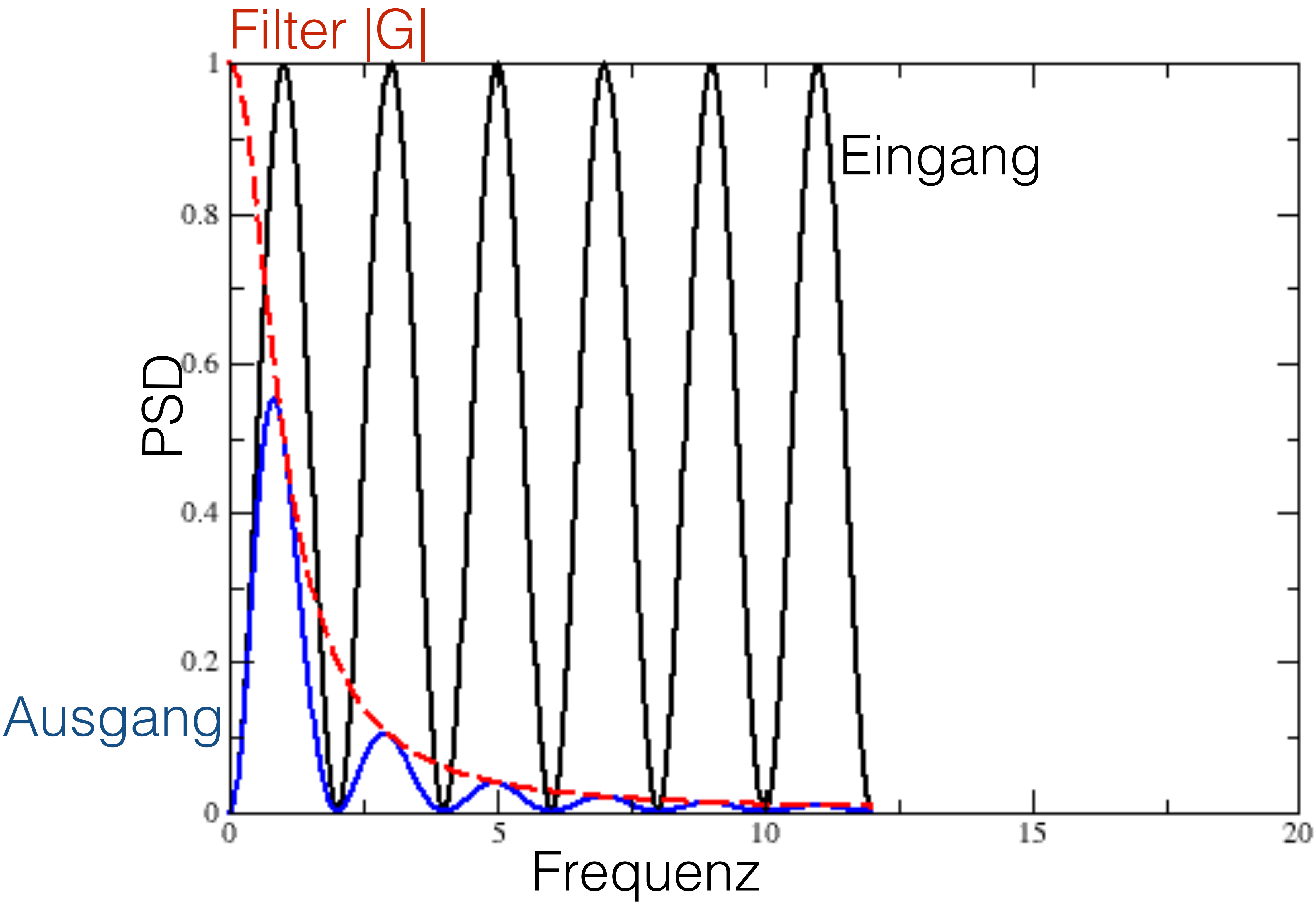
$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau) I(\tau) d\tau$$

F: Filterfunktion

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) I(\tau) d\tau \qquad G(t) = F(t)\Theta(t)$$

$$\tilde{s}(f) = \tilde{G}(f)\tilde{I}(f)$$ spektraler Filter

Beispiel für linearen Filter: Tiefpass-Filter



II.3. Berechnung von Spektren

a) Definitionen

b) Periodogram+ Bartlett-Welch Methode

c) multi-taper Methode

III. Zeit-Frequenz Analyse

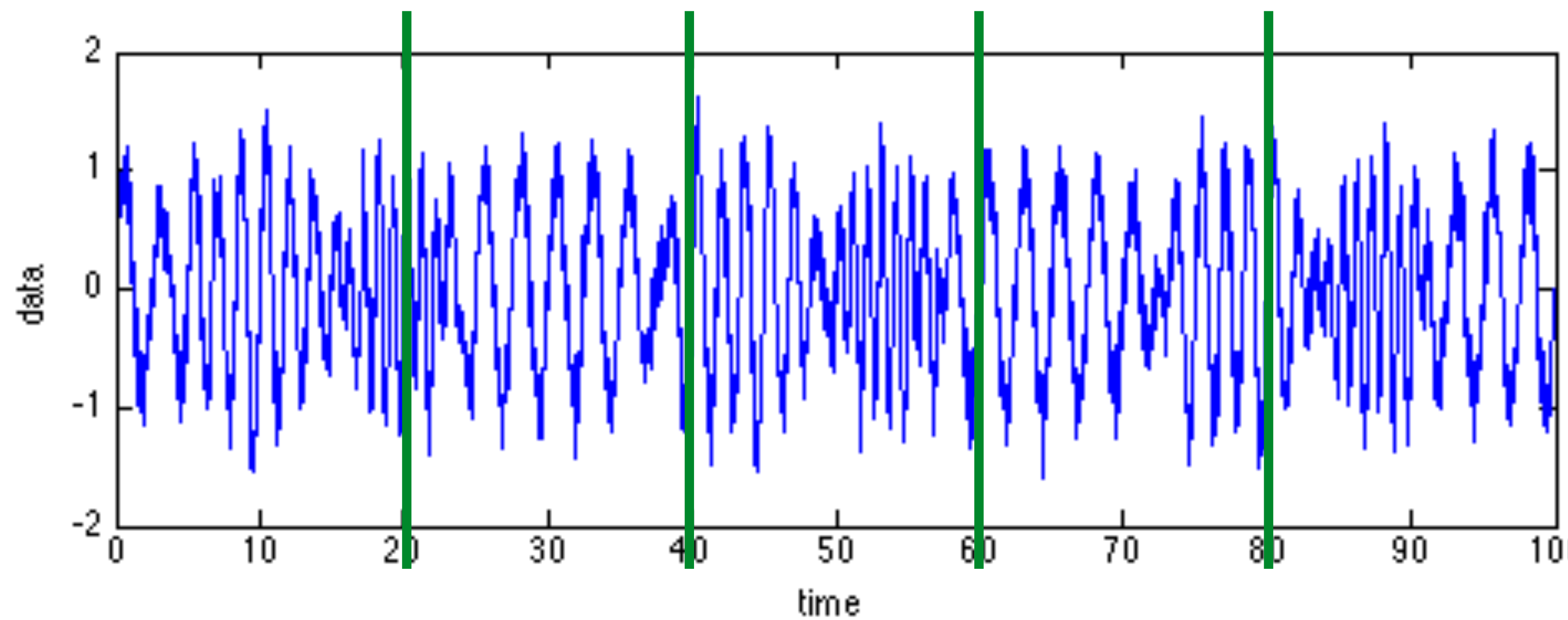
Periodogram

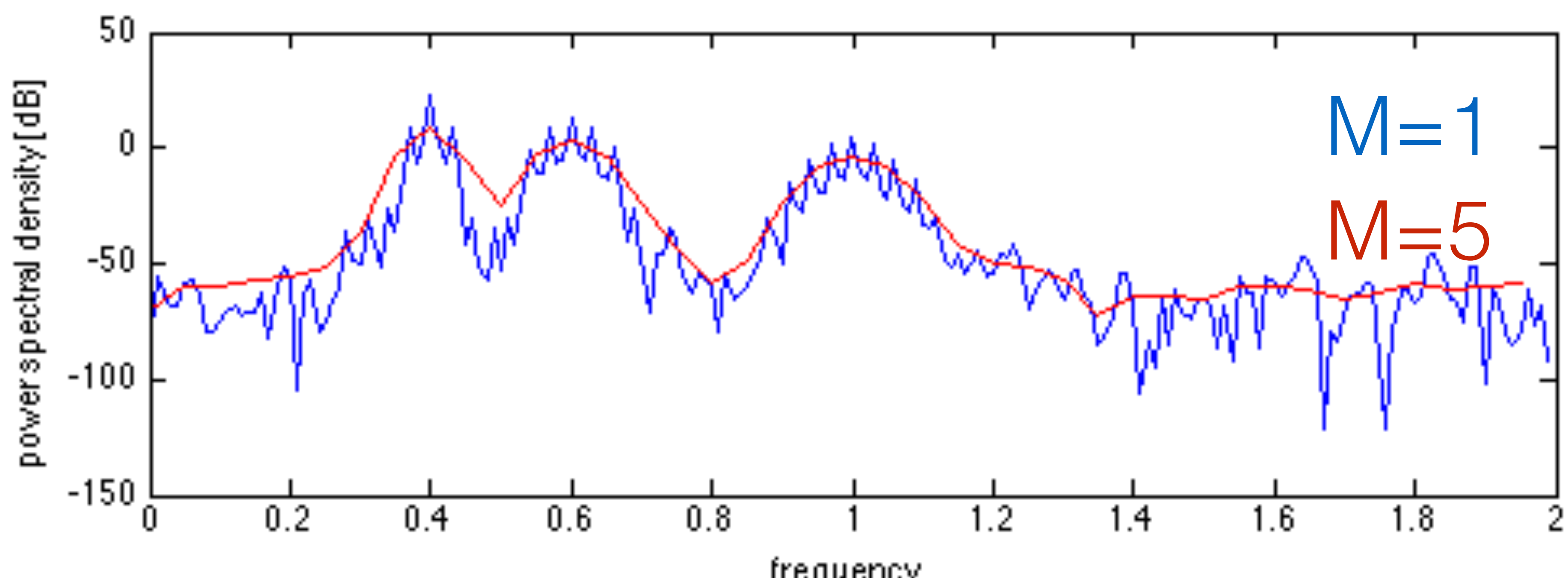
direkt aus DFT über endliche Zeitserie

$$= \frac{\Delta t}{N} |DFT(f_n)|^2$$

Bartlett Methode

schneide Zeitserie in M Segmente
und nimm das Mittel ihrer Periodograme

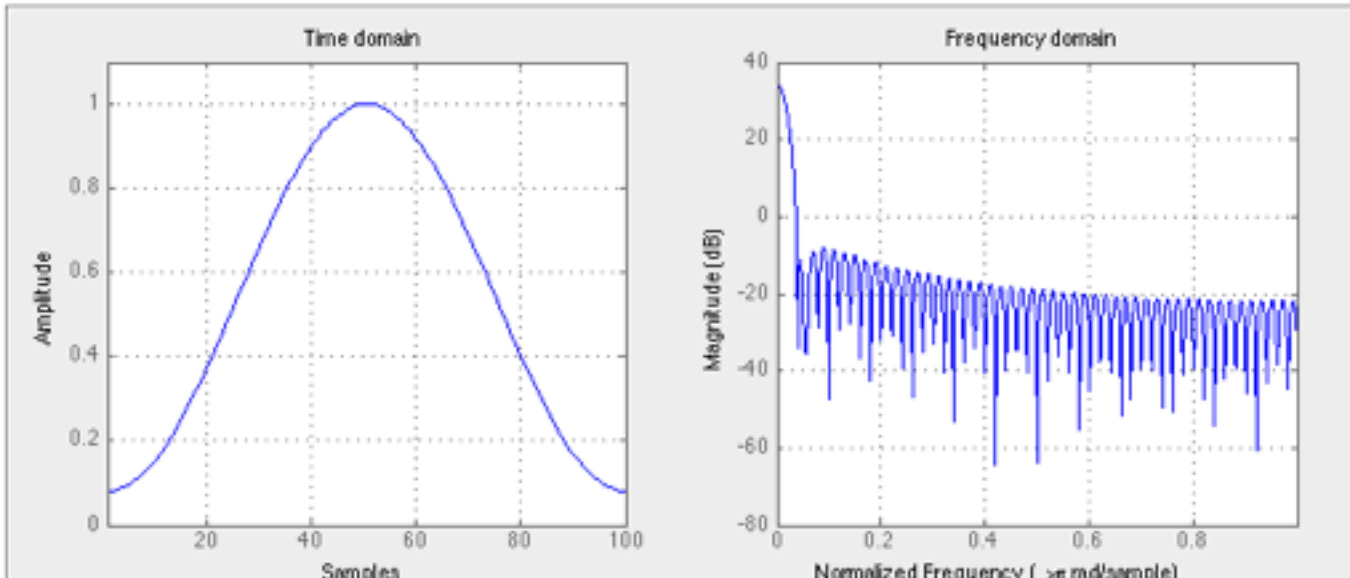




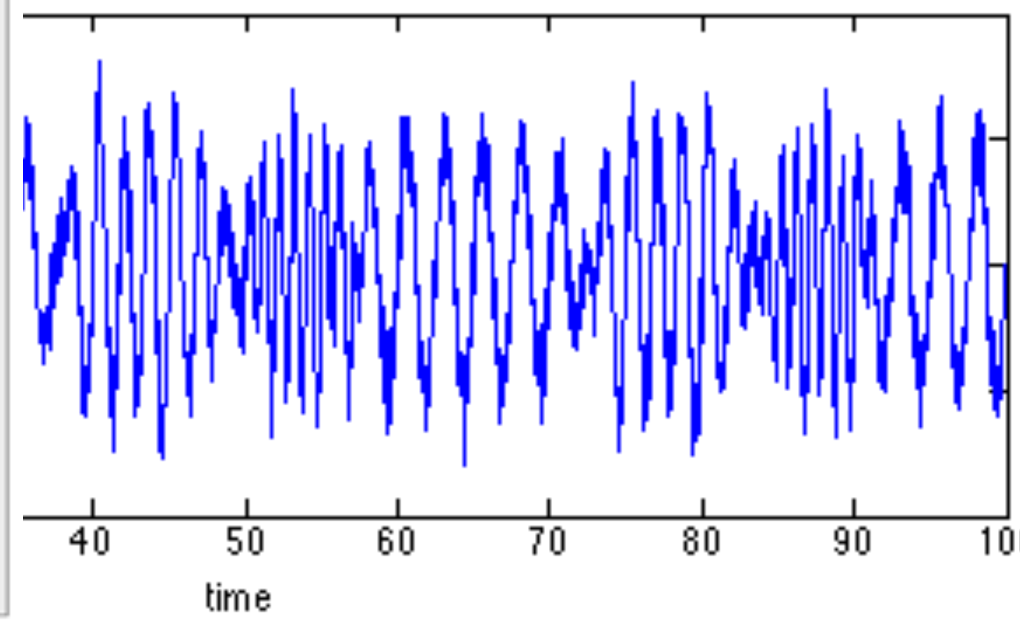
M=1: Periodogram

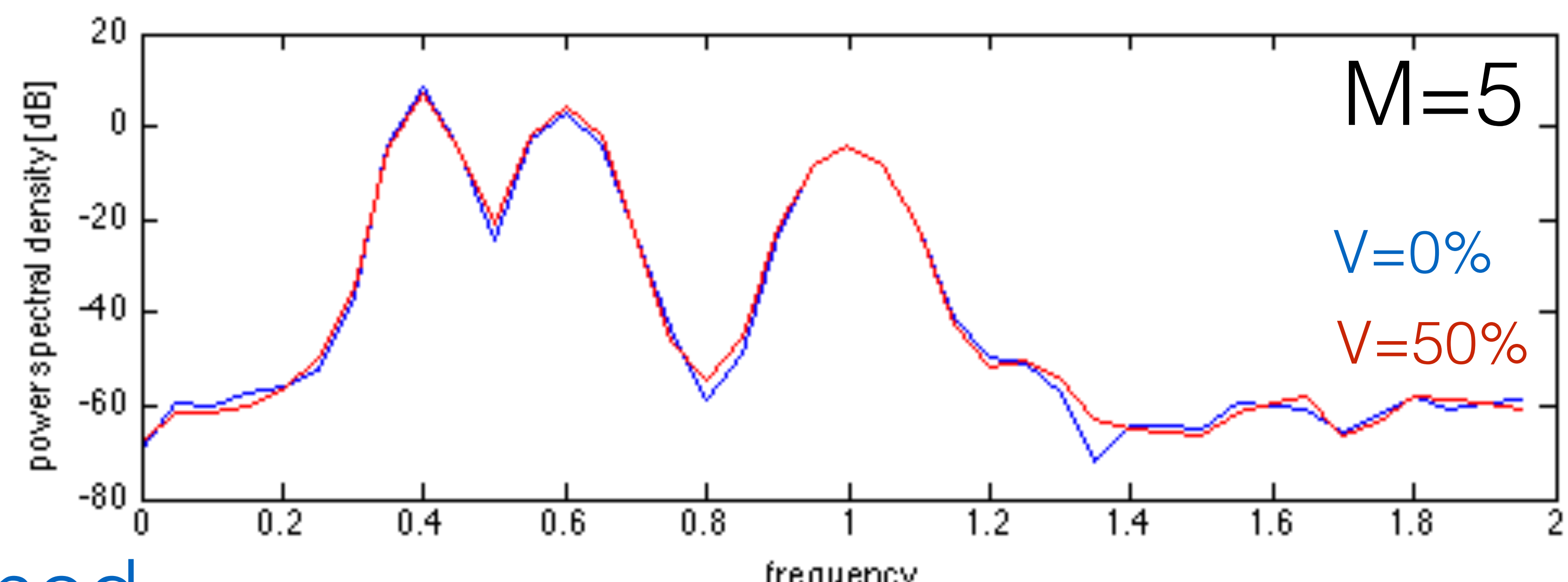
Bartlett-Welch Methode

teile Zeitserie in M Segmente, gewichte diese mit einem Hamming-Fenster mit Überlapp von V Datenpunkten und nimm den Mittelwert ihrer Periodograme window



Hamming-Fenster





V=0: Bartlett method

(Fourier_11.m)