

Spektralanalyse physiologischer Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 4

zum Übungsblatt

Aufgabe 1:

$$X_T(f) \sim \frac{1}{i} \left(\frac{\sin(\pi(f - 3\text{Hz})5s)}{f - 3\text{Hz}} - \frac{\sin(\pi(f + 3\text{Hz})5s)}{f + 3\text{Hz}} \right)$$

Nullstellen:

$T=5s$: $f=2/5s, 4/5s, 6/5s, \dots = 0.4\text{Hz}, 0.8\text{Hz}, 1.2\text{Hz}, \dots$

$T=1s$: $f= 2\text{Hz}, 4\text{Hz}, 8\text{Hz}, \dots$

$T=0.33\text{ s}$: $f= 6\text{Hz}, 12\text{Hz}, 18\text{Hz}, \dots$

Vorsicht: $1/T=f_{\text{Nyquist}}$

Spektrum wird immer flacher mit fallendem T

Aufgabe 2:

Signal: $T=100\text{s}$, $\Delta f=0.01$

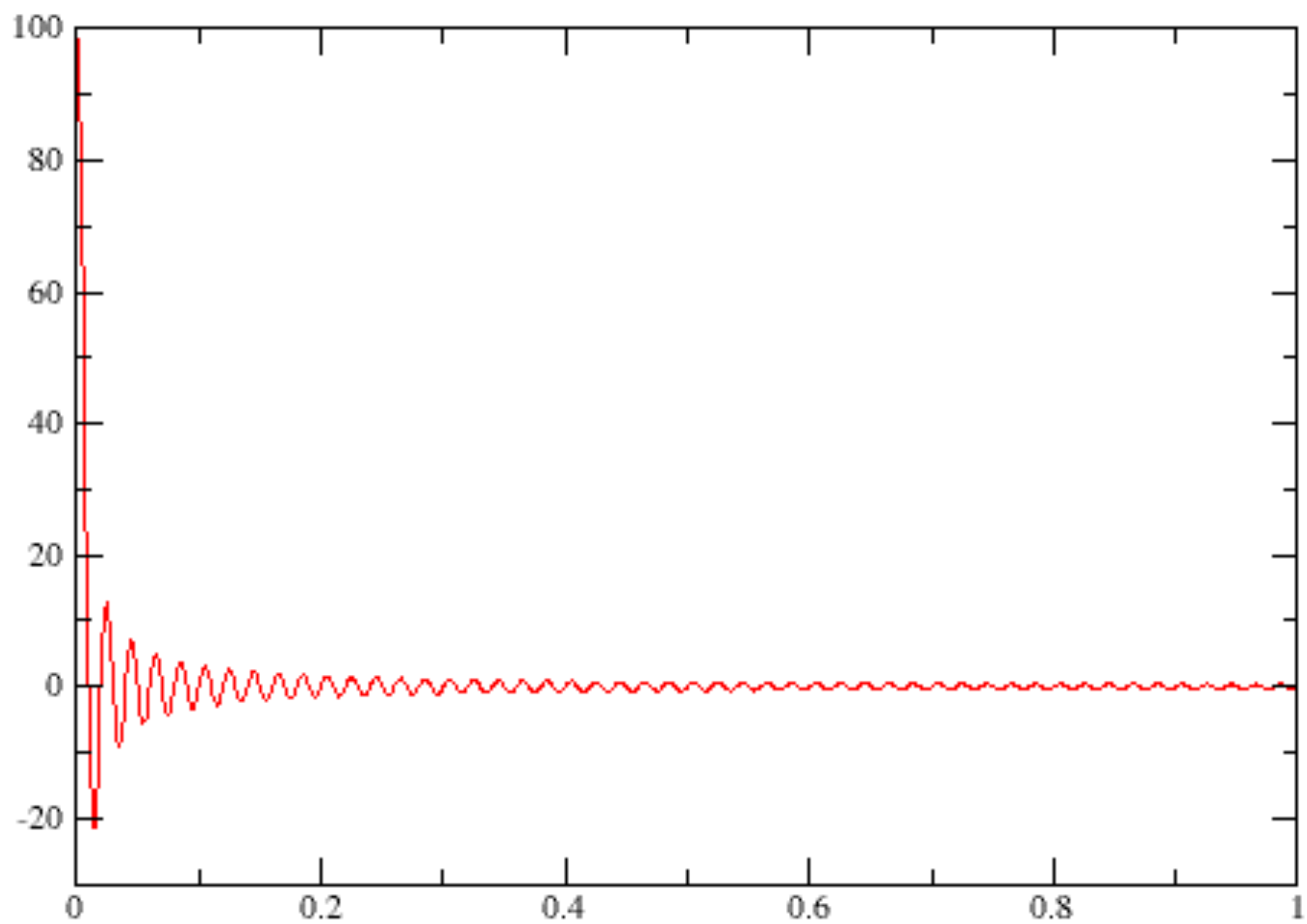
spectral leakage - Effekt:

1) z.Bsp. charakterisiert durch Nullstellen

bei Frequenzen $2 \cdot n / 100\text{s} = n \cdot 0.02\text{Hz}$

also 0.02Hz , 0.04Hz ,

2) z.Bsp. charakterisiert durch Abfall der Amplitude mit $1/f$



Aufgabe 3:

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau$$

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu$$

$$C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu$$

$$= E[x^2(t)]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$$

weiter mit Vorlesung 4

Statistische Eigenschaften von Verteilungen:

Erwartungswert $E[f(x)] = \int_{\mathcal{D}} f(x)p(x)dx$

erstes Moment
(erster Kumulant) $E[x] = \int_{\mathcal{D}} xp(x)dx = \bar{x}$ (**Mittelwert**)

zweites Moment $E[x^2] = \int_{\mathcal{D}} x^2p(x)dx$

zweiter Kumulant

$$E[(x - E[x])^2] = \int_{\mathcal{D}} (x - E[x])^2p(x)dx = \sigma^2$$

(Varianz)

Mehrere Zufallsvariablen:

$p(x_1; x_2; \dots; x_N)$ **multivariate Wahrscheinlichkeitsdichte**
mit N Variablen (*joint probability density*)

$$\underbrace{p(x_k, \dots, x_{k+l})}_{M \text{ Variablen}} = \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \cdots \int_{\mathcal{D}} p(x_1; \dots; x_N) \underbrace{dx_1 \cdots dx_{k-1} \cdots dx_{k+l+1} \cdots dx_N}_{N-M \text{ Terme}}$$

multivariate Wahrscheinlichkeitsdichte
mit N-M Variablen:

Marginalverteilung (*Randverteilung*)

$p(x_k | x_l)$ **bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte**
(*conditional probability distribution*)

$$p(x_1, x_2) = p(x_1|x_2)p(x_2)$$

$$= p(x_2|x_1)p(x_1)$$

$$p(x_2|x_1) = \frac{p(x_1|x_2)}{p(x_1)}p(x_2)$$

Bayes-Regel

Beispiel:

$$p(\textit{Modell}|\textit{Beobachtung}) = \frac{p(\textit{Beobachtung}|\textit{Modell})}{p(\textit{Beobachtung})}p(\textit{Modell})$$

Exkurs in **Stochastischen Prozesse**

a) Zufallszahlen

b) Wahrscheinlichkeit

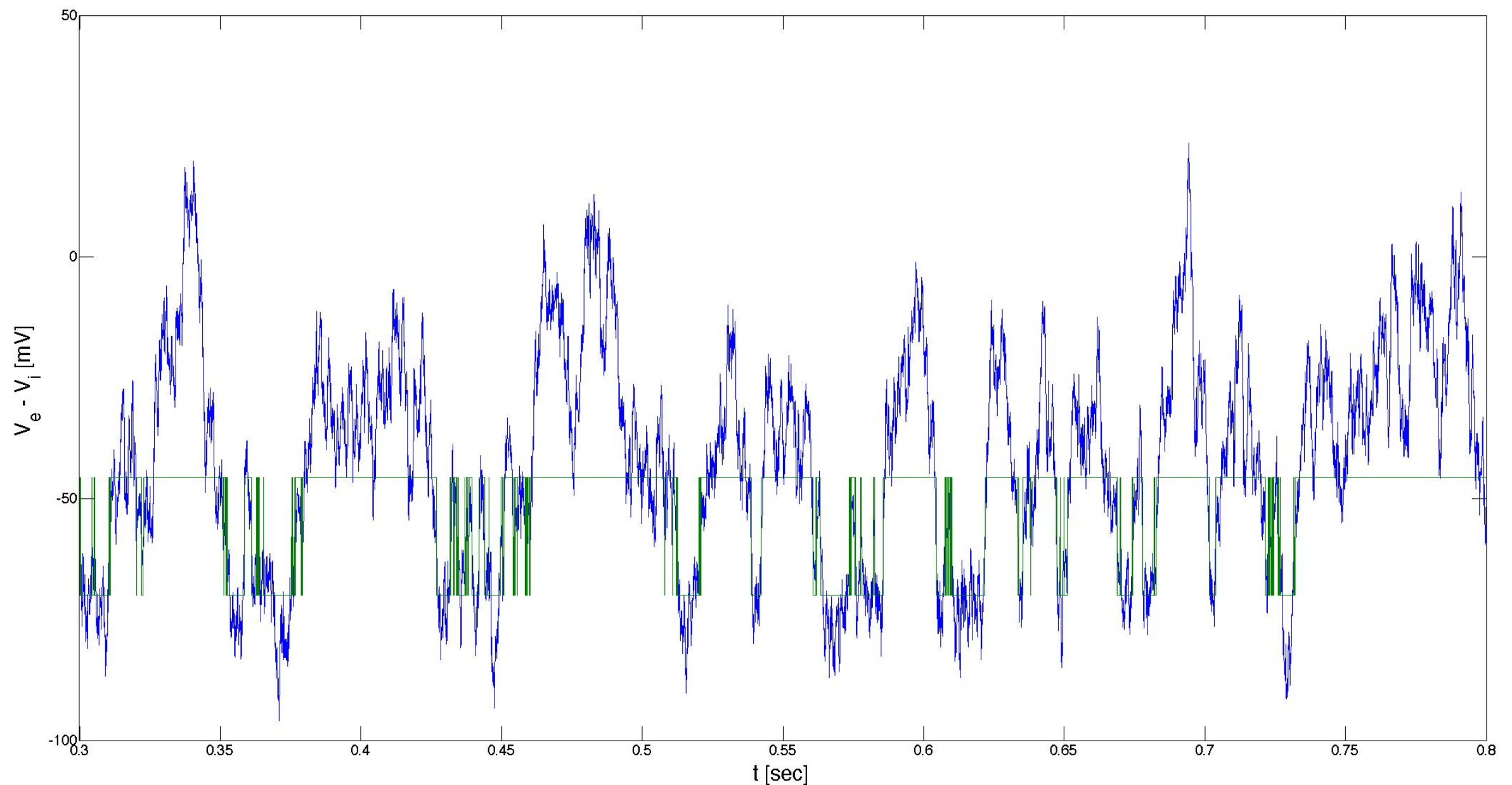
c) Wahrscheinlichkeitsdichte

d) stochastische Prozesse

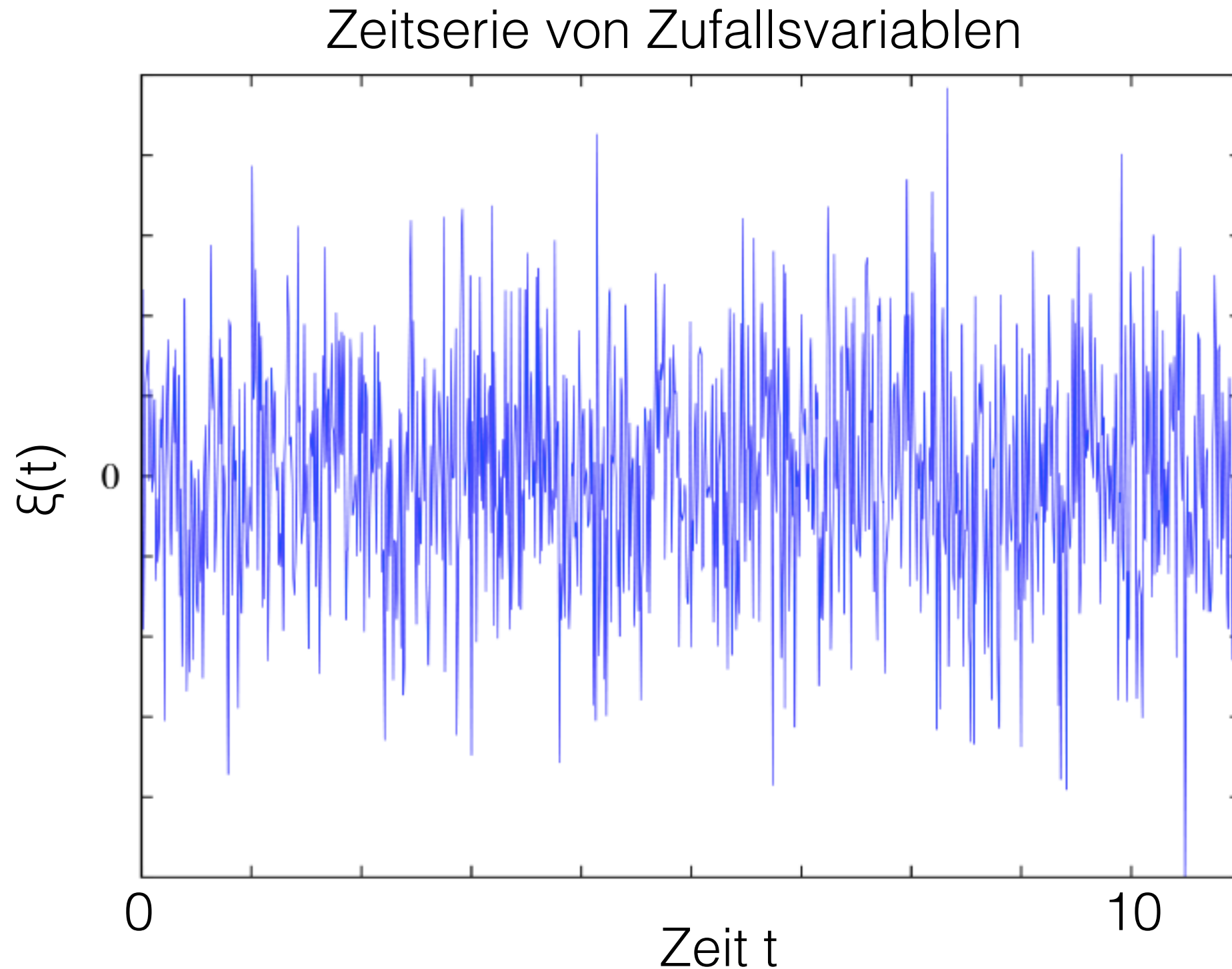
e) Ergodizität und Stationarität

stochastischer Prozess:

Folge von Zufallsvariablen, die eine zeitliche Evolution eines Systems beschreibt



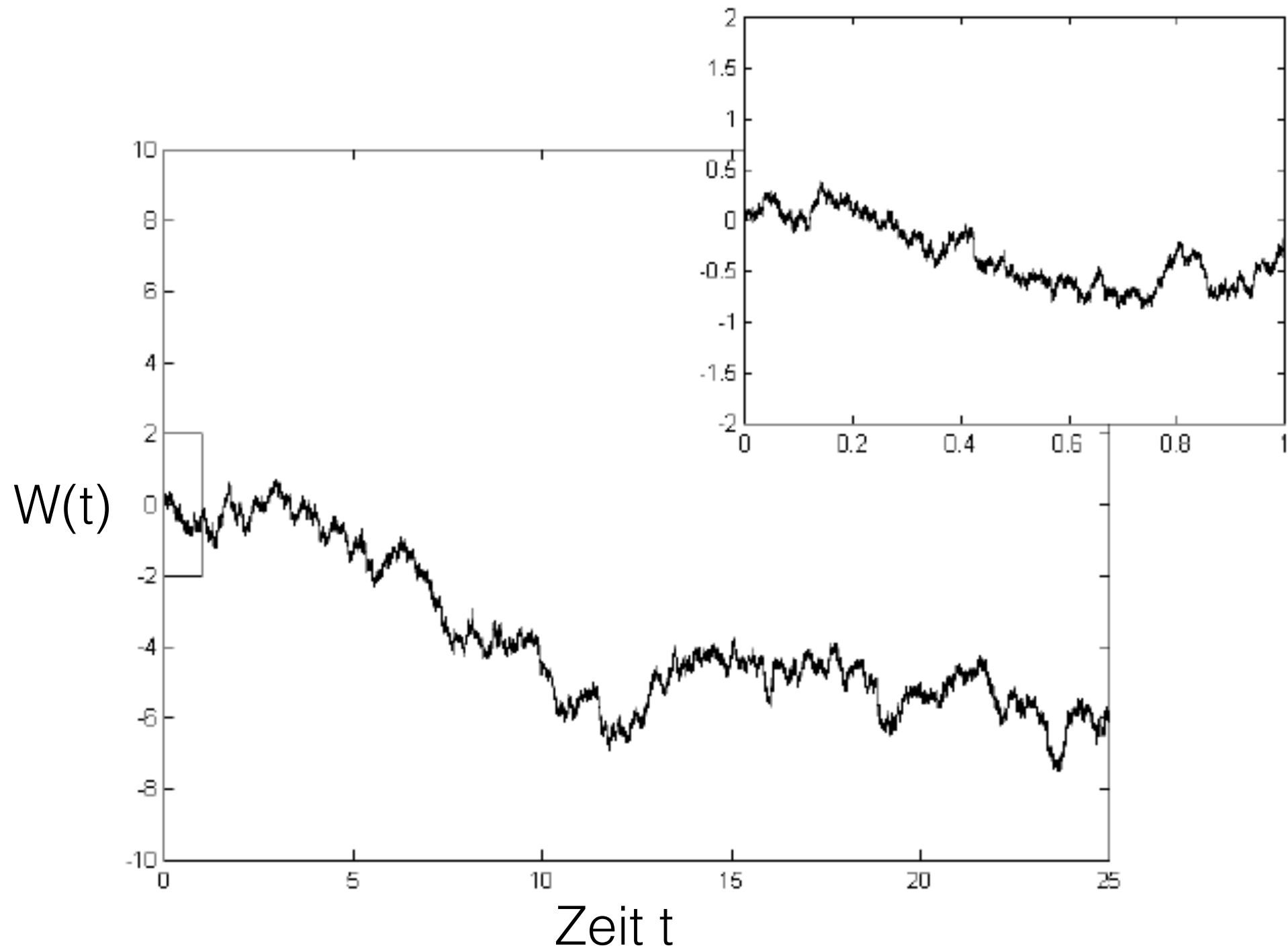
Beispiel: Wiener-Prozess



Zufallsvariablen sind **unabhängig** (*weisses Rauschen*),
ihre Wahrscheinlichkeitsdichte ist eine **Gauss-Verteilung**

Wiener-Prozess: $W_{k+1} = W_k + \xi_k \quad k \in \mathcal{N}_0$

ξ_k : *weisses*
Gauss'sches Rauschen



weisses Rauschen:

$$\langle \xi_k \xi_l \rangle = D \delta_{kl}$$

unkorrelierte Zufallszahlen

$$\langle \xi(t) \xi(t - \tau) \rangle = D \delta(\tau)$$

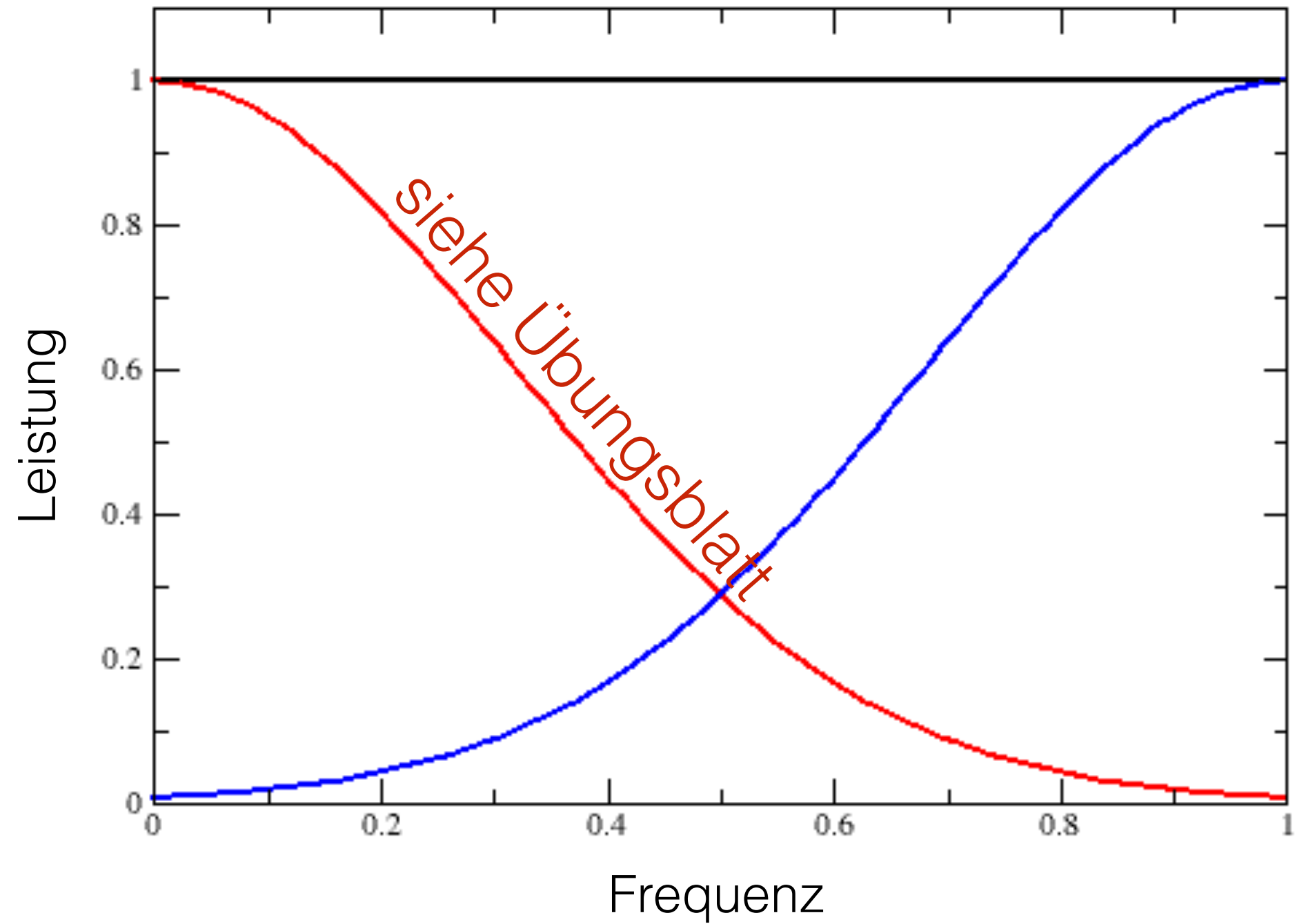
Wiener-Khinchin Theorem:

$$\mathcal{F}[\langle \xi(t) \xi(t - \tau) \rangle](f) = P(f)$$

$$\longrightarrow P(f) = \text{const}$$

alle Frequenzen mit gleichem Beitrag

Spektren von Rauschprozessen



Beispiel einer allgemeineren Formulierung

$x(t)$: stochastischer Prozess

$x(t)$ kann von $x(t - \tau)$, $0 \leq \tau < \infty$ abhängen, also

$$x(t_{k+1}) = f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots)$$

System mit Gedächtnis

Spezialfall:

$$x(t_{k+1}) = f(x_k)$$

System *ohne* Gedächtnis

dieser stochastische Prozess heißt **Markov-Prozess**

Formulierung eines allgemeinen Markov-Prozesses

$x(t)$: stochastischer Markov-Prozess

Zeit kontinuierlich

$$dx(t) = f(x(t))dt + \kappa dW(t)$$

dW : Rauschprozess
 κ : Rauschstärke

Zeit diskret

$$\Delta x(t_k) = f(x(t_k))\Delta t + \kappa \Delta W(t_k)$$

$$\Delta W(t_k) = W(t_{k+1}) - W(t_k)$$

$$\Delta x(t_k) = x(t_{k+1}) - x(t_k)$$

Formulierung als **Langevin-Gleichung**:

Zeit kontinuierlich

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \kappa \xi(t)$$

ξ : Rauschprozess

ohne Rauschen:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Exkurs in **Stochastischen Prozesse**

a) Zufallszahlen

b) Wahrscheinlichkeit

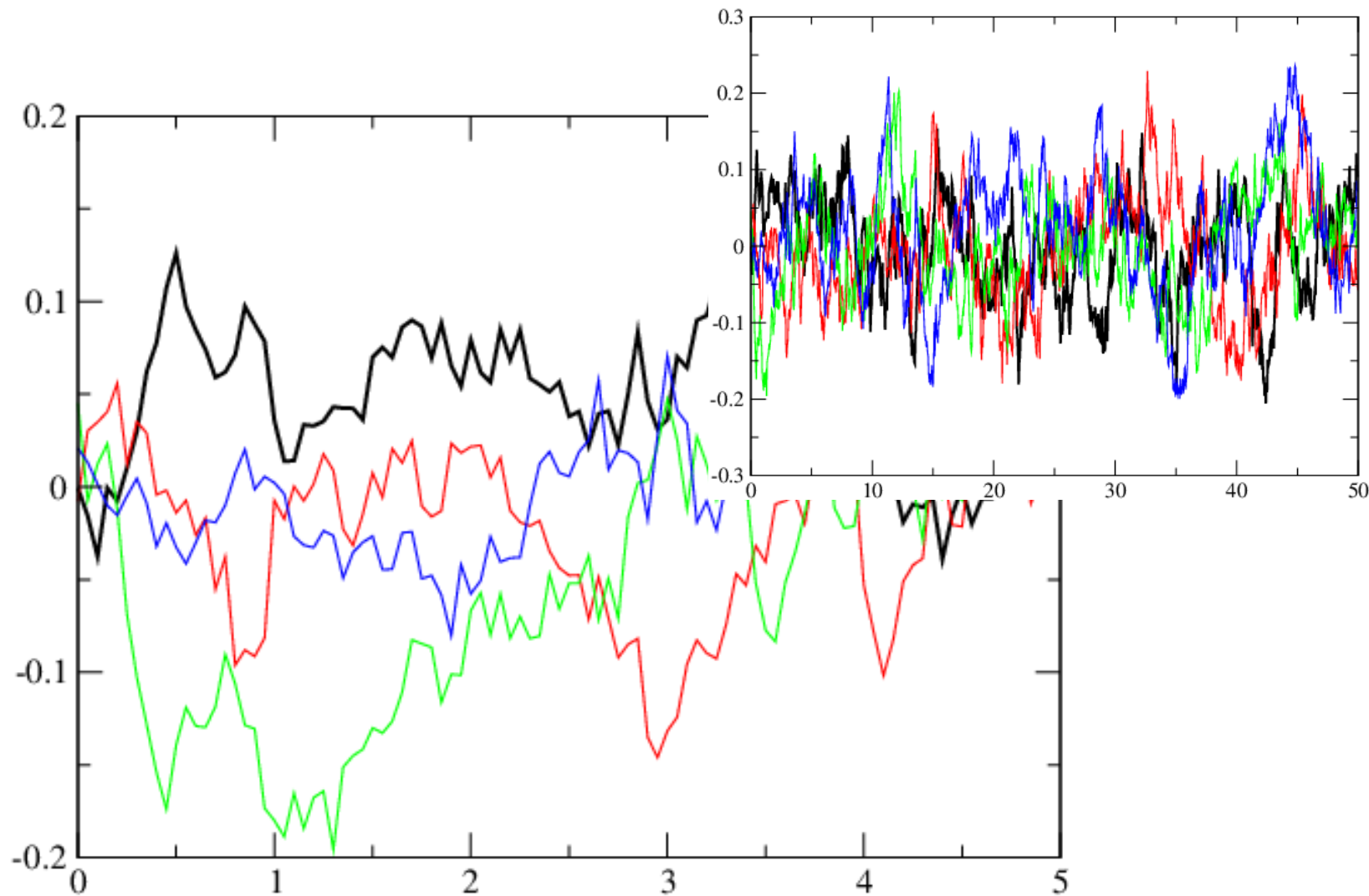
c) Wahrscheinlichkeitsdichte

d) stochastische Prozesse

e) Ergodizität und Stationarität

Wie wird Wahrscheinlichkeitsdichte p berechnet ?

Beispiel:



verschiedene Lösungen von

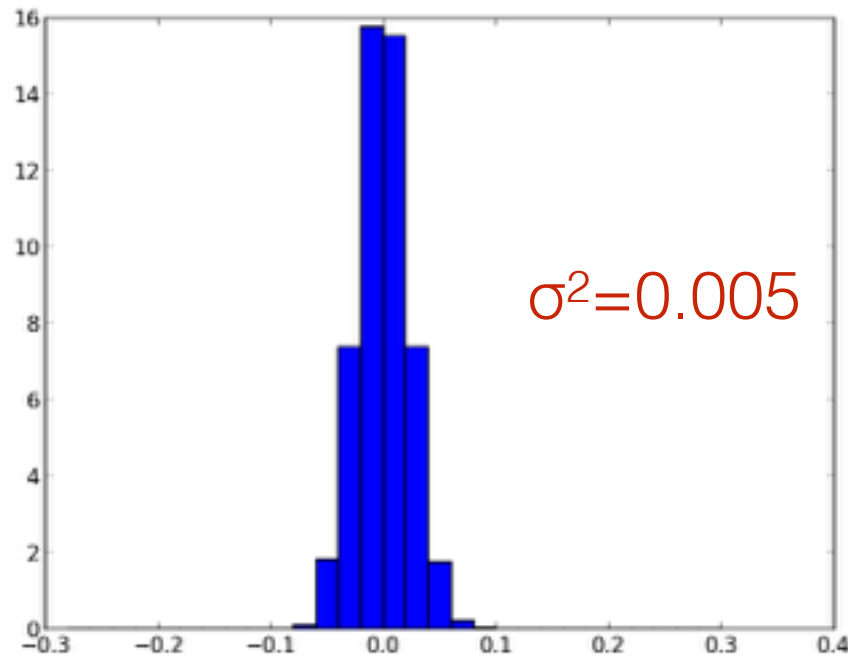
$$\dot{x}(t) = -x(t) + 0.1\xi(t)$$

mit *identischen Anfangsbedingungen* $x(0)$

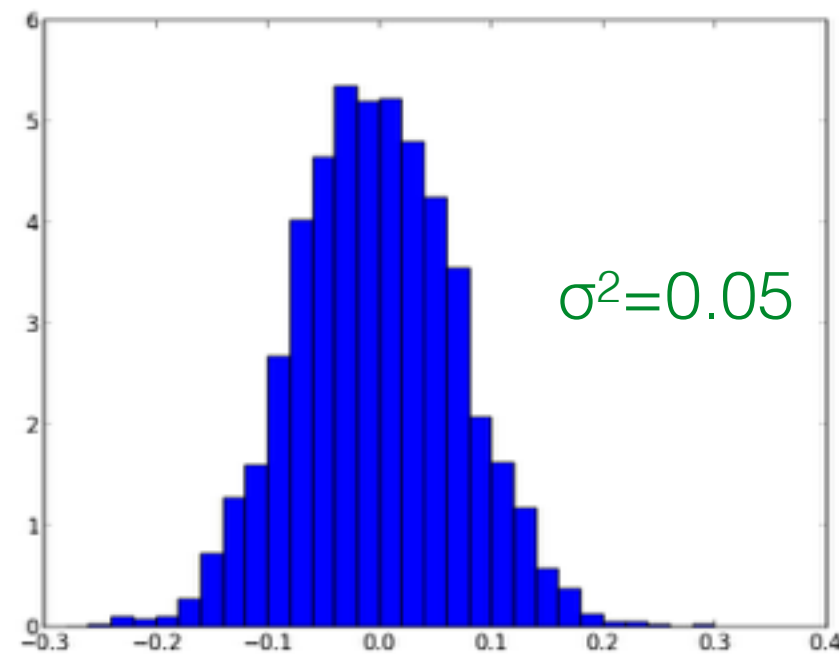
$\xi(t)$: normalverteilte Zufallszahlen mit Mittelwert=0, Varianz=1

$p_1(\mathbf{x}, t)$: Bestimmung über die **Schar von Lösungen**
zu einem bestimmten Zeitpunkt t

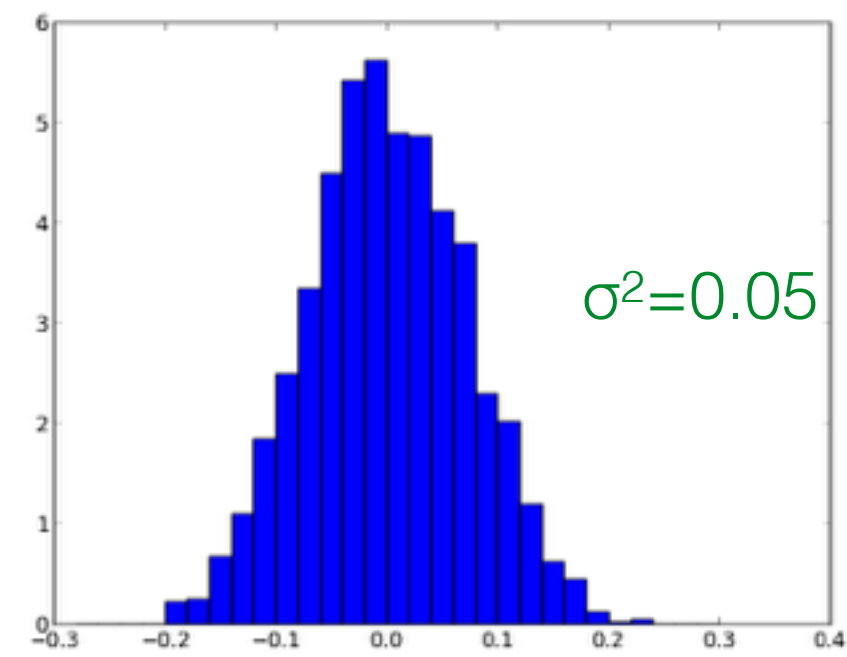
$t=0.05$



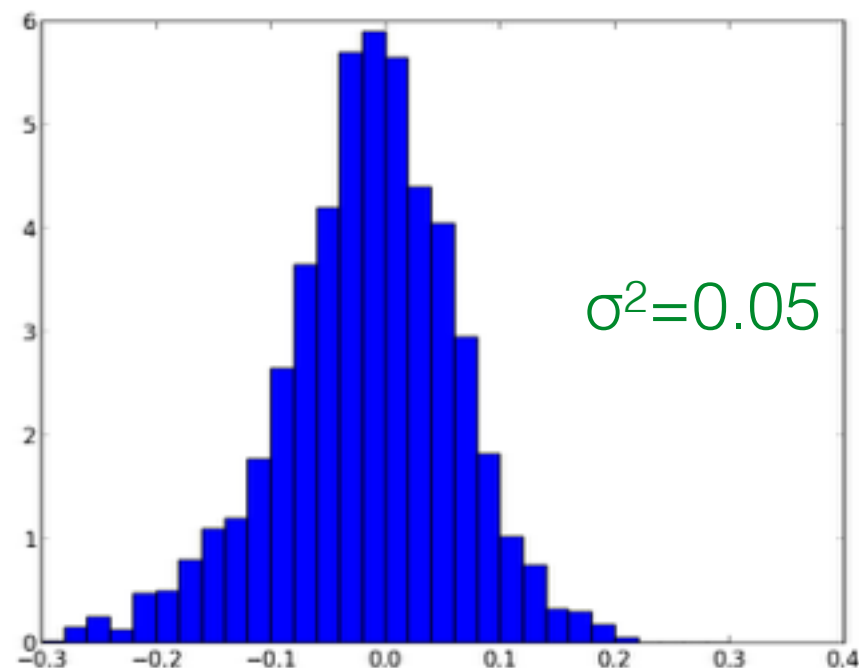
$t=10$



$t=47.5$



$p_2(\mathbf{x})$: Erwartungswert über die **Zeit** in einer Lösung



Erkenntnis:

- Wahrscheinlichkeitsdichte $p_1(x,t)$ variiert über die Zeit
- Wahrscheinlichkeitsdichte $p_2(x)$ zeitunabhängig
- Wahrscheinlichkeitsdichten gleich *für grosse Zeiten*

$$p_1(x,t) \approx p_2(x)$$

- Wahrscheinlichkeitsdichten verschieden *für kleine Zeiten*

$$p_1(x,t) \neq p_2(x)$$

Definition: *starke Stationarität*:

$$p(x_1(t_k); \dots; x_N(t_k)) = p(x_1(t_k + \tau); \dots; x_N(t_k + \tau))$$
$$\tau \in \mathcal{R}$$

Definition: *Stationarität im weiteren Sinn*:

$$E[x(t)] = \mu \quad \forall t \in \mathcal{R}$$

$$E[(x(t) - E[x])^2] = \sigma^2(t) < \infty$$

$$Cov(x(t_1), y(t_2)) = Cov(x(t_1 + \tau), y(t_2 + \tau))$$
$$\tau \in \mathcal{R}$$

$$Cov(x(t_1), y(t_2)) = E[(x(t_1) - \bar{x})(y(t_2) - \bar{y})]$$