Spektralanalyse physiologischer Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 1 - WS 2016/17

über mich

Studium der **Physik** an U Stuttgart

Promotion: Nichtlineare Dynamik in Gehirnsignalen

Forschung in **Neurowissenschaften** in

MPI für neuropsychologische Forschung Leipzig

MPI für Mathematik in den Naturwissenschaften Leipzig

Weierstrass Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik Berlin

Humboldt Universität zu Berlin

University of Ottawa / Kanada

INRIA Nancy / Frankreich

jetzt: *Directeur de Recherche,* Deutscher Wetterdienst Offenbach

Ihre Erwartungen an die Vorlesung ?

Programmierkenntnisse ?

Erfahrung mit Daten ?

Übungsaufgaben:

- schriftlich oder
- in Form einer Präsentation

Prüfung:

- bei ausreichender Beteiligung an Übungen
- mündlich, 30 Minuten

I. Einleitung

II. Fourier Analyse

III. Zeit-Frequenz Analyse

I. Einleitung

II. Fourier Analyse

III. Zeit-Frequenz Analyse

I.1. Rhythmen in der Natur

I.2. Ursprung elektrischer Signale

I.3. Sampling

I.1. Rhythmen in der Natur

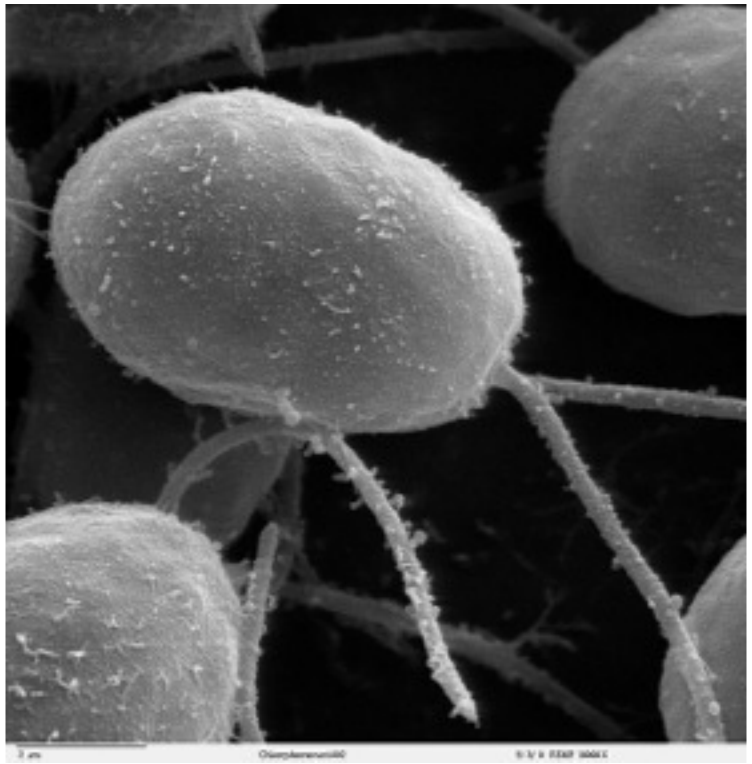
I.2. Ursprung elektrischer Signale

I.3. Sampling

Chronobiologie:

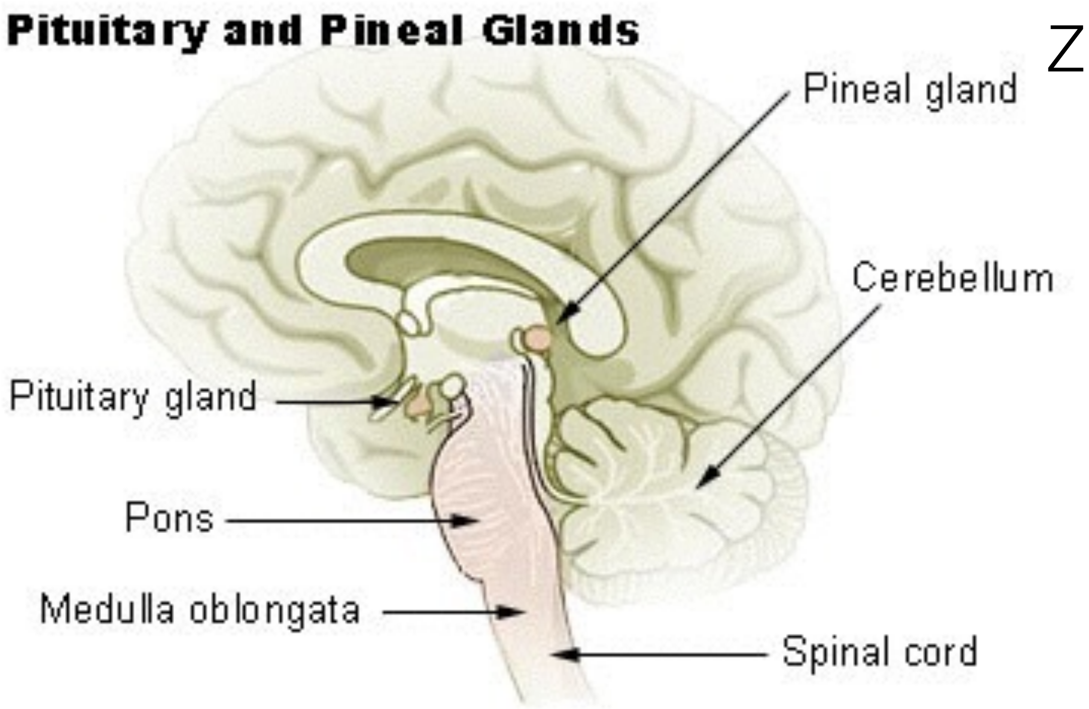
systeminterne biologische Rhythmen, z.Bsp. bei

Algen



circadianer Rhythmus

Tiere

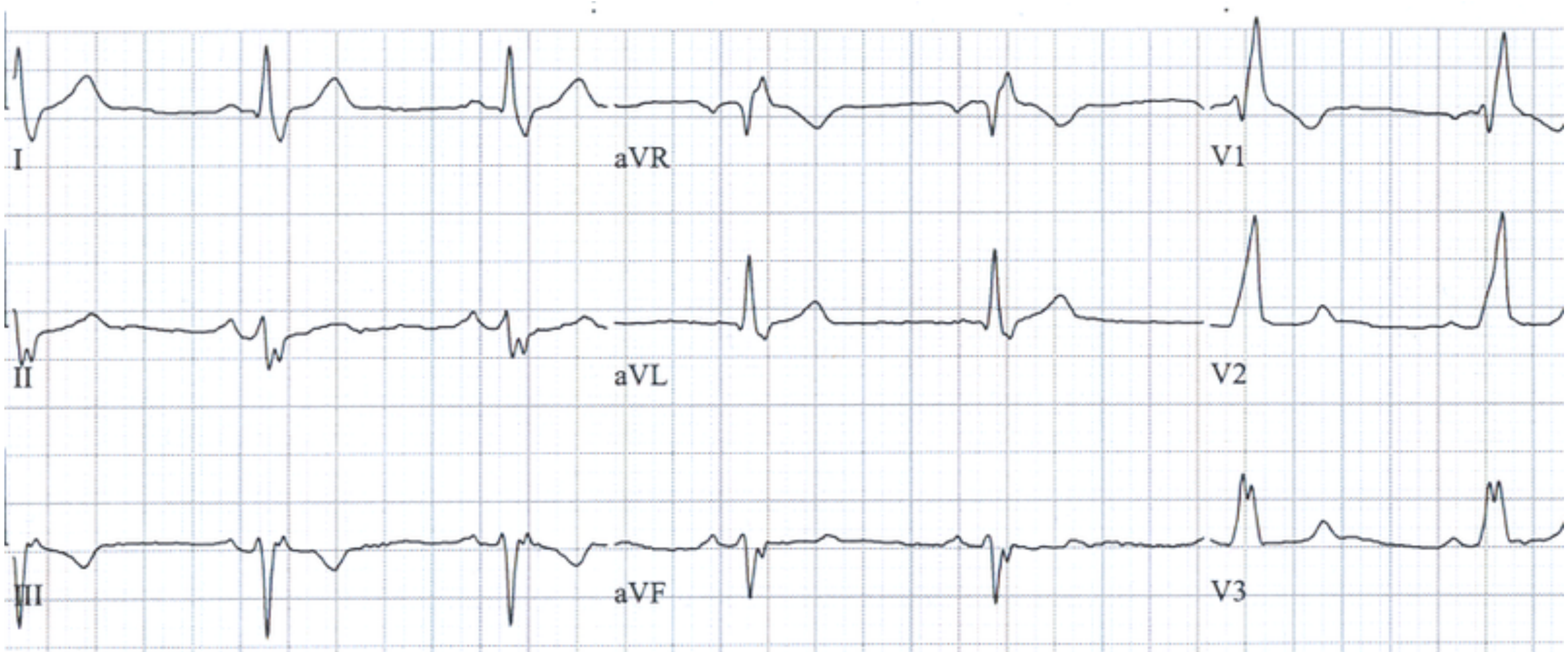


Zirbeldrüße/
Epiphyse

circadianer Rhythmus

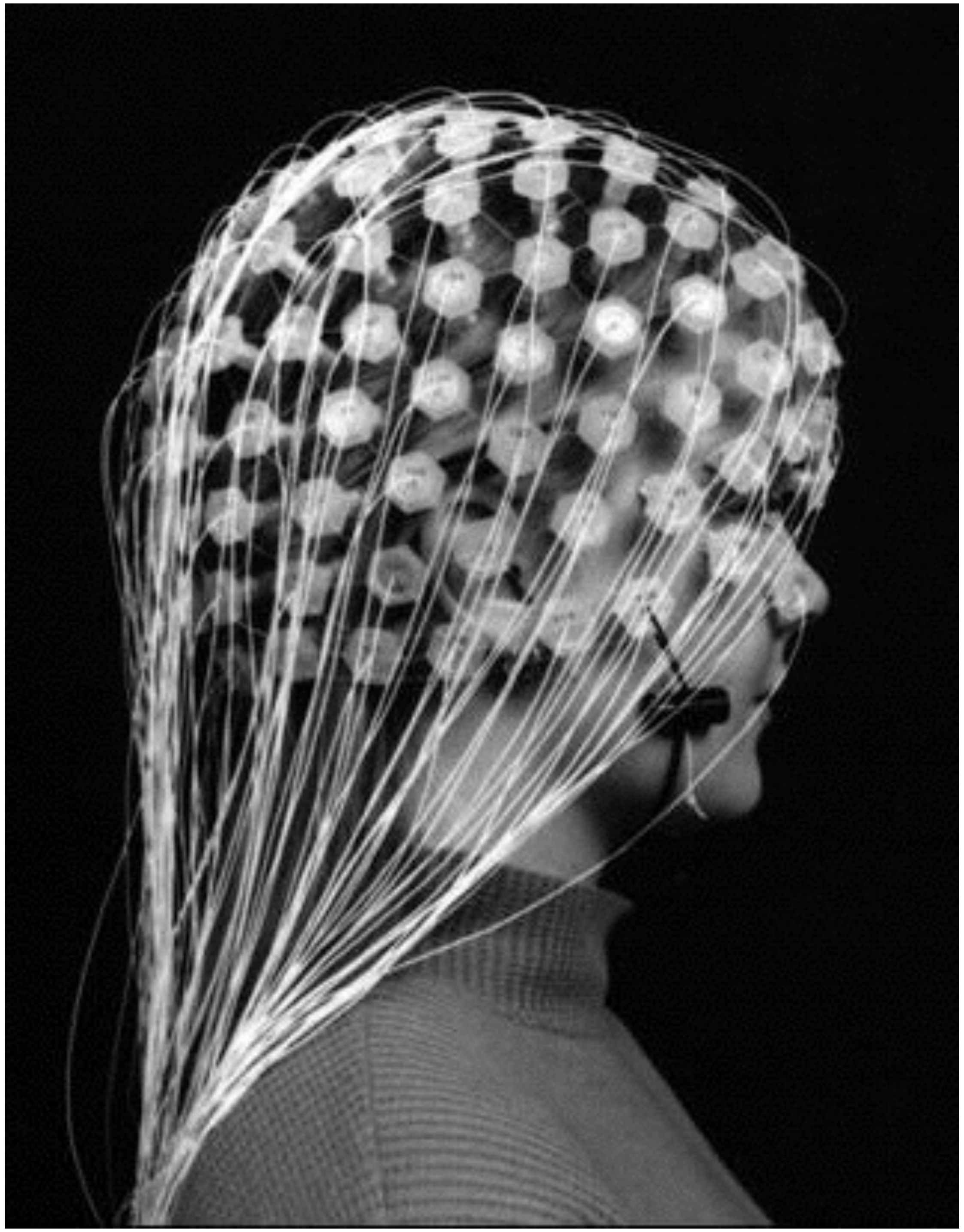
andere physiologische Rhythmen:

Herz-Rhythmus

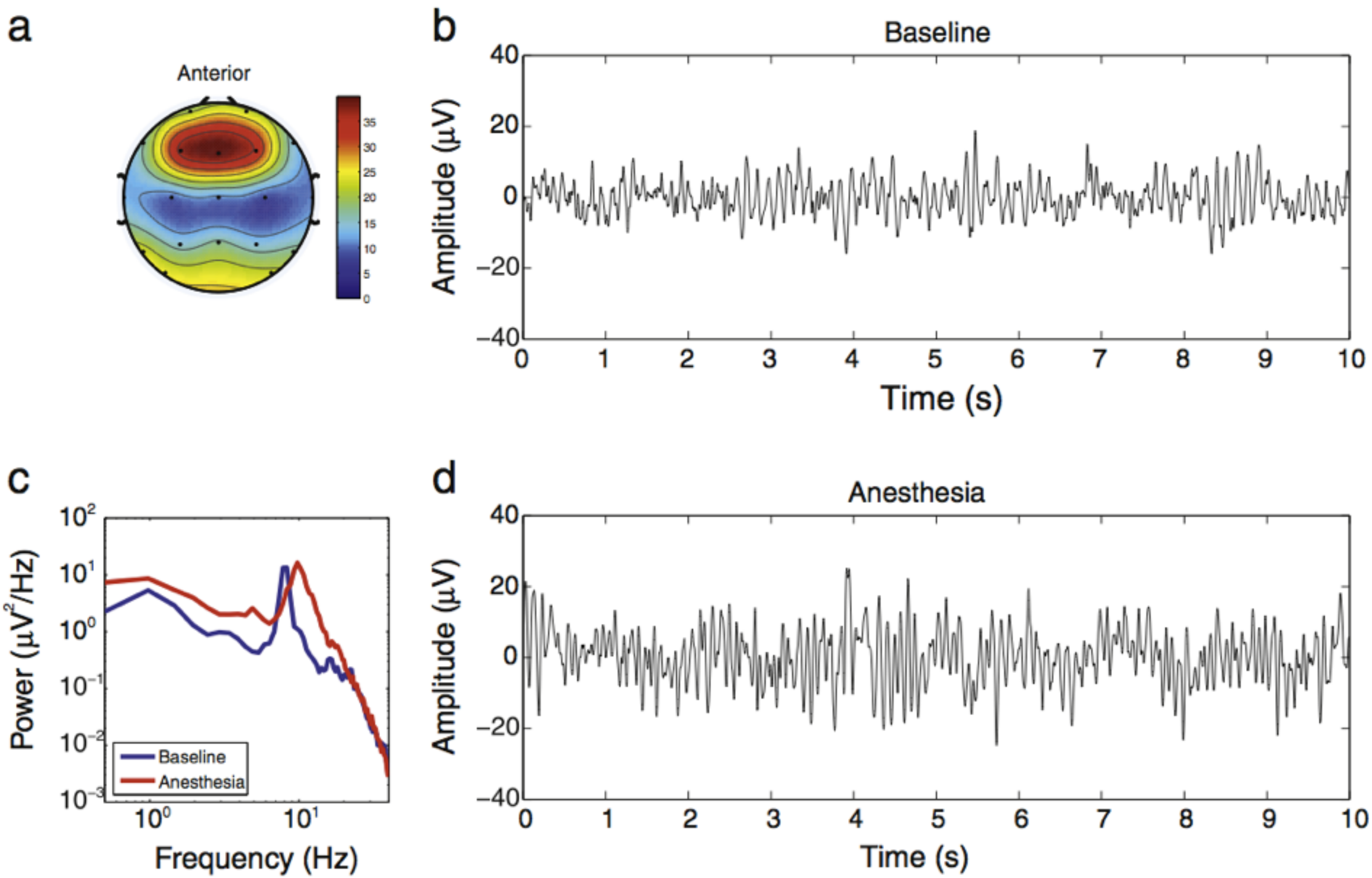


?

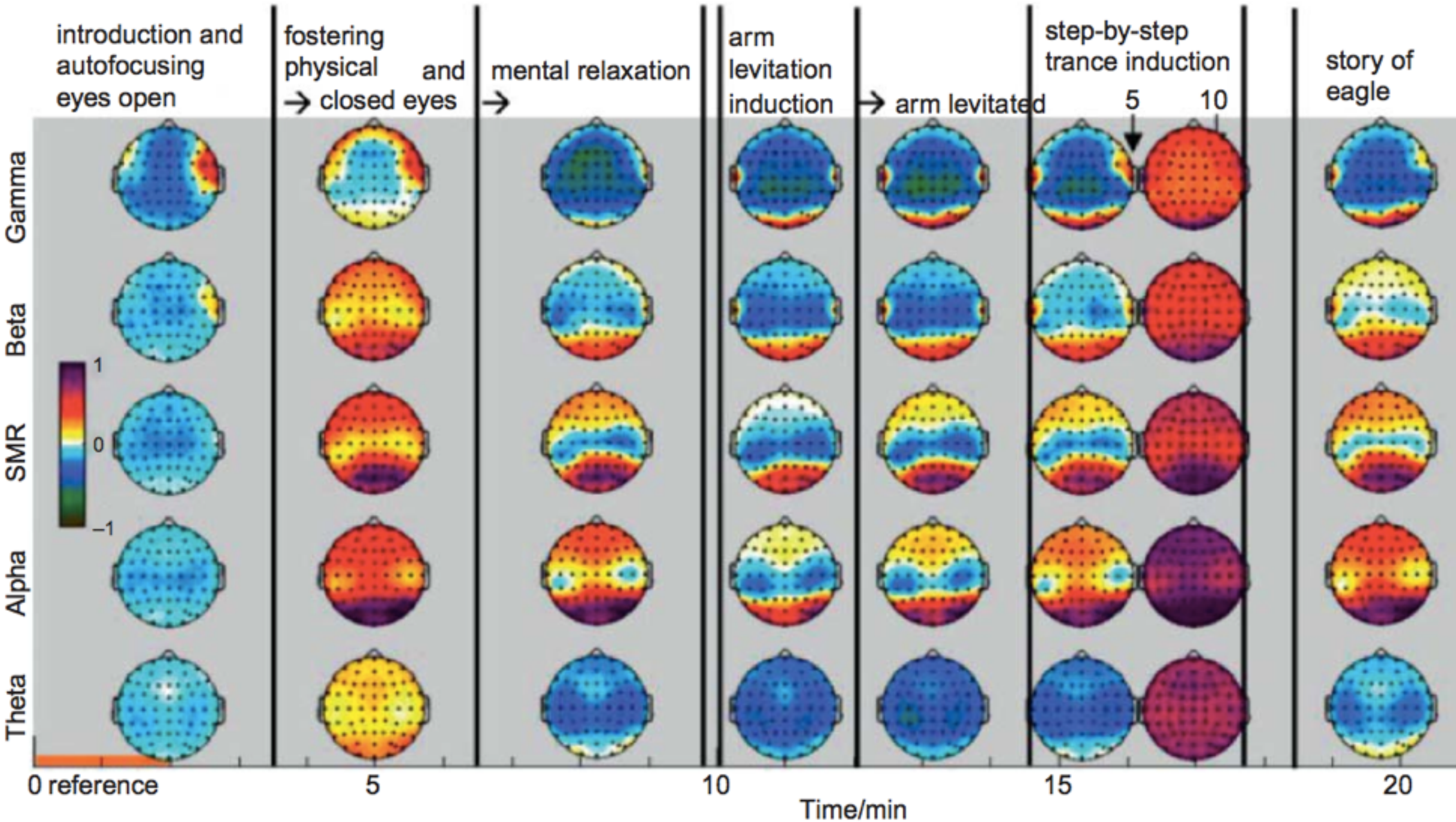
Beispiel: Gehirnaktivität



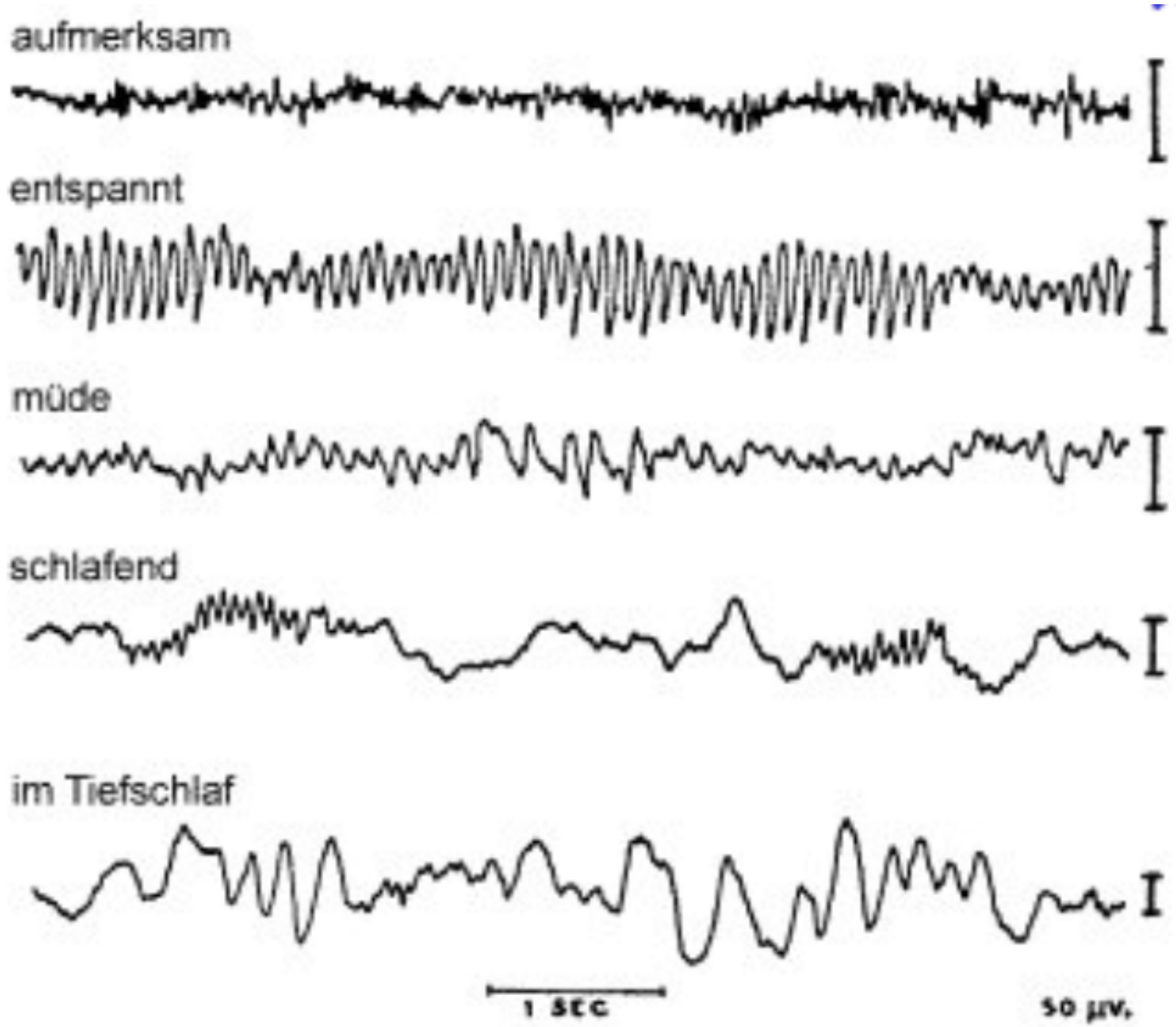
Beispiel: Anästhesie



Beispiel: Hypnose



Beispiel: Schlaf



Oszillatorische Aktivität ist omnipräsent in biologischen Systemen

Oszillatorische Aktivität charakterisiert physiologischen Zustand

Oszillatorische Aktivität widerspiegelt Interaktion von Untersystemen in biologischem System

I.1. Rhythmen in der Natur

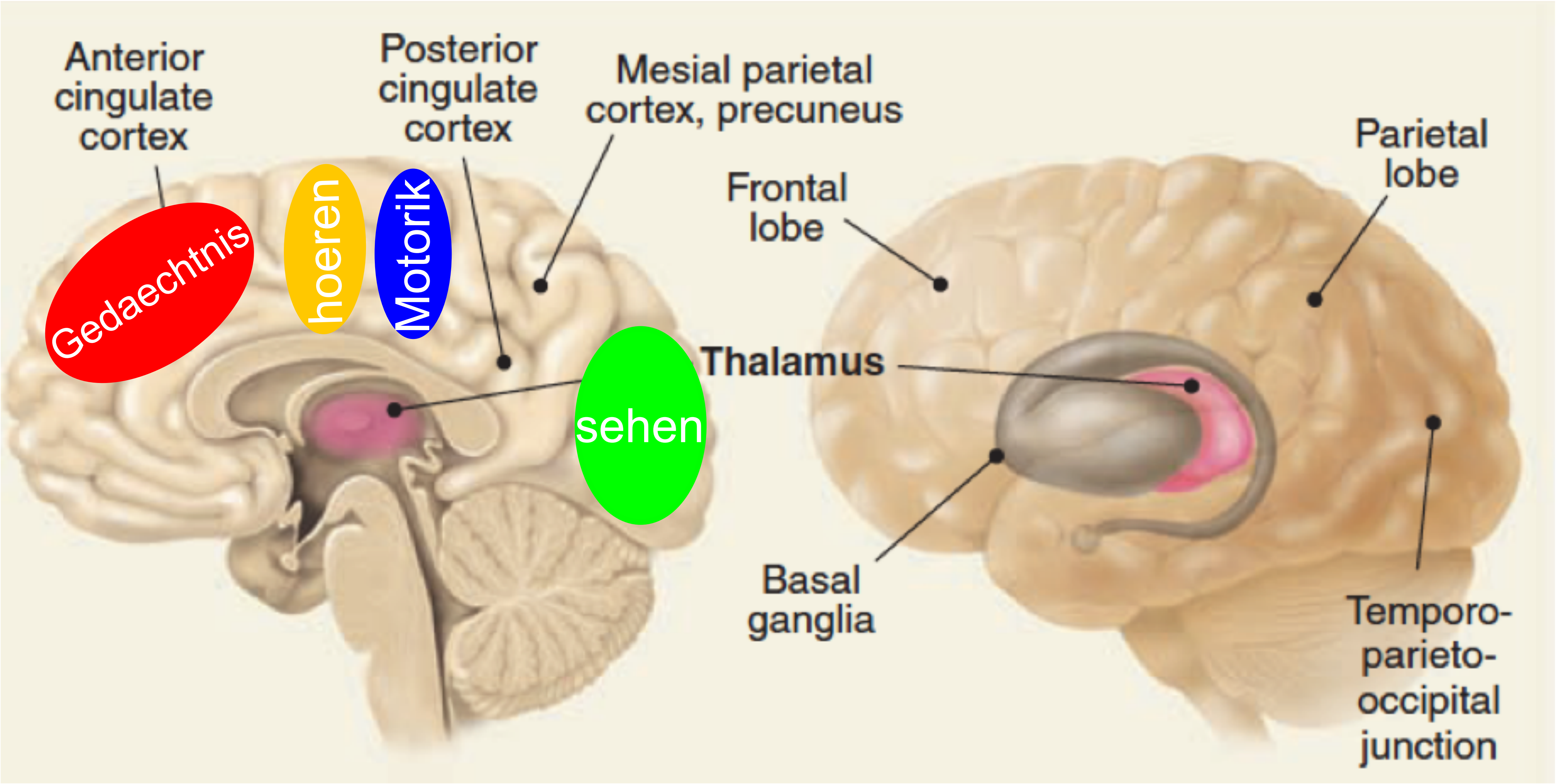
I.2. Ursprung elektrischer Signale

I.3. Sampling

Ursprung gemessener Signale

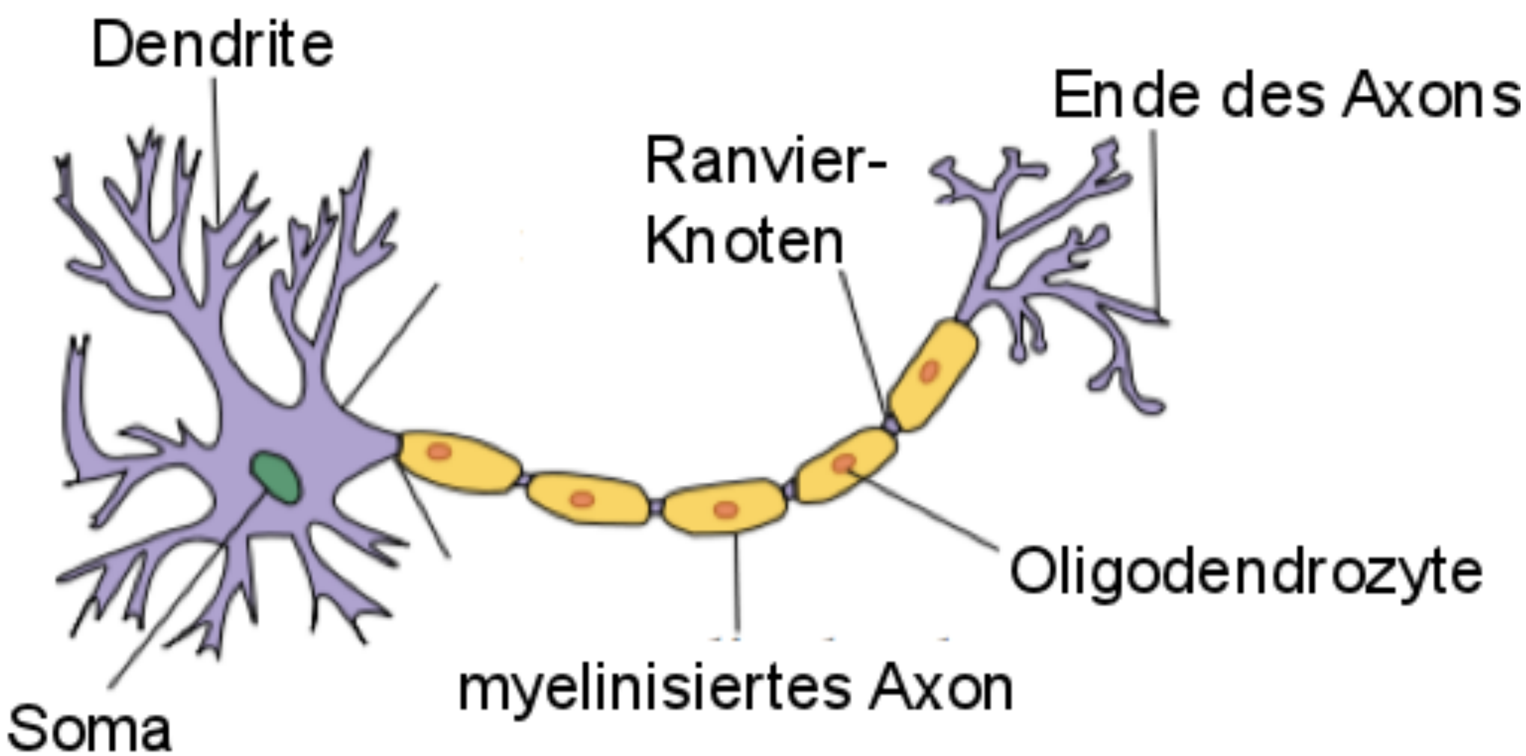
am Beispiel des **Gehirns**

Gehirnareale



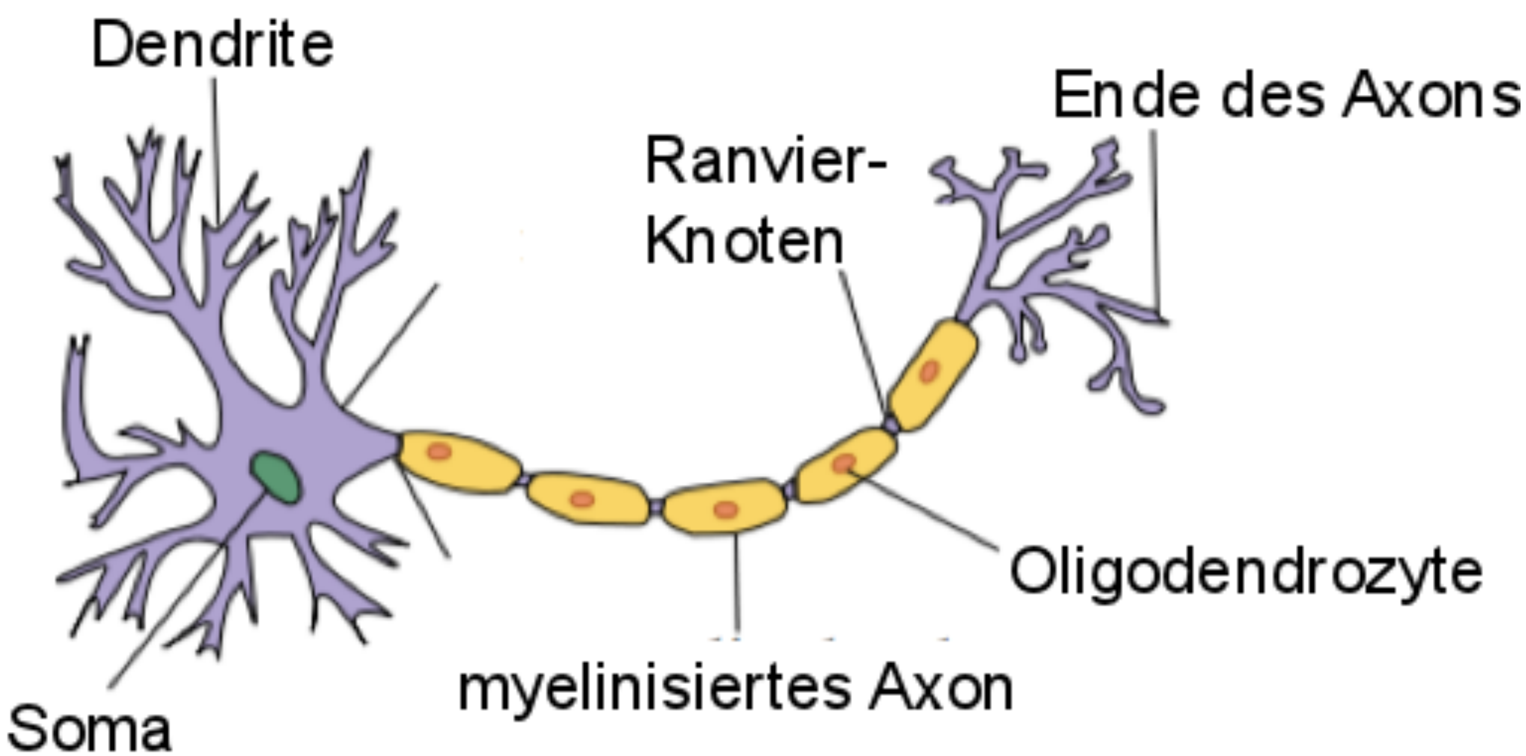
Biologisches Neuron

Modell:

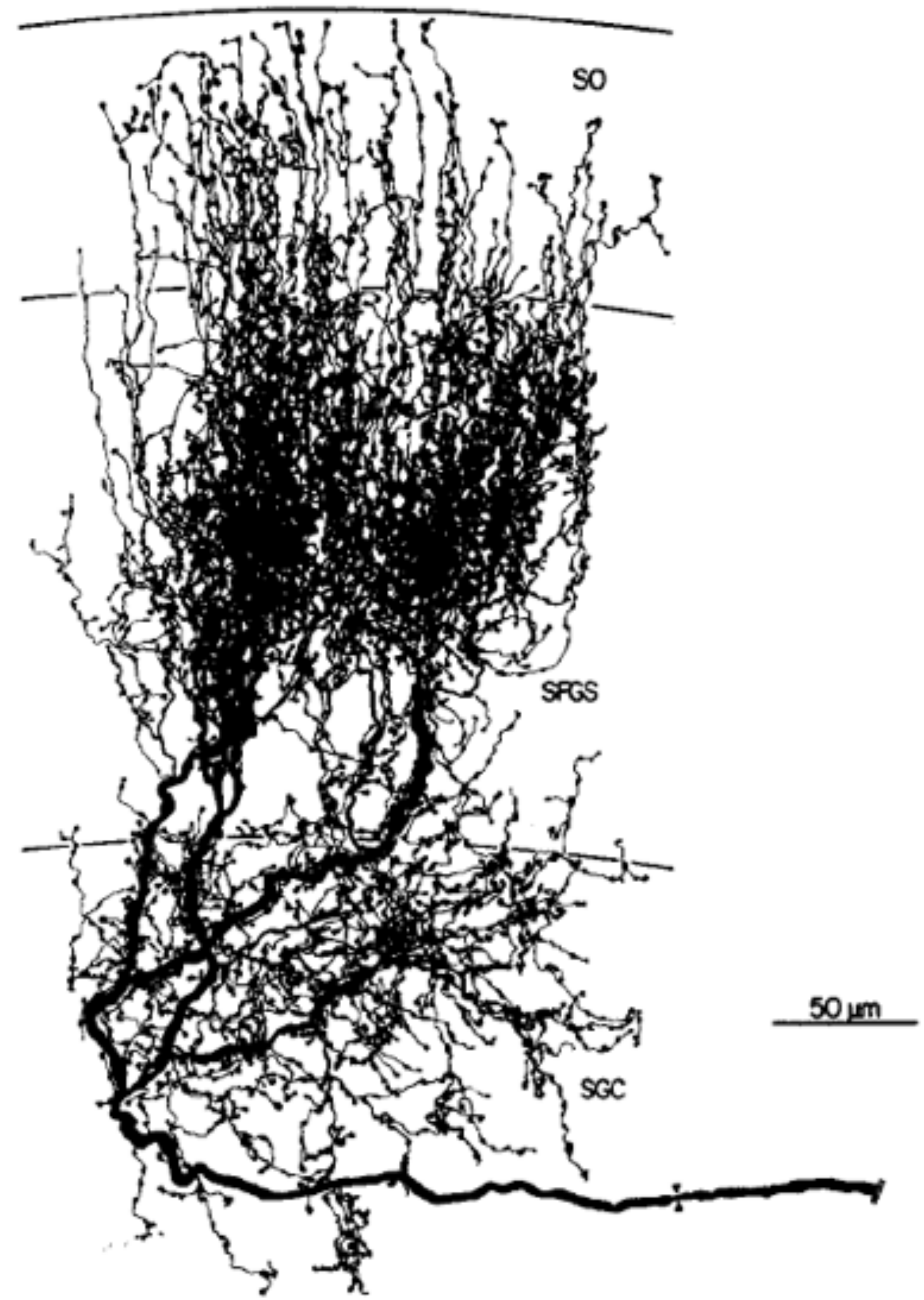


Biologisches Neuron

Modell:



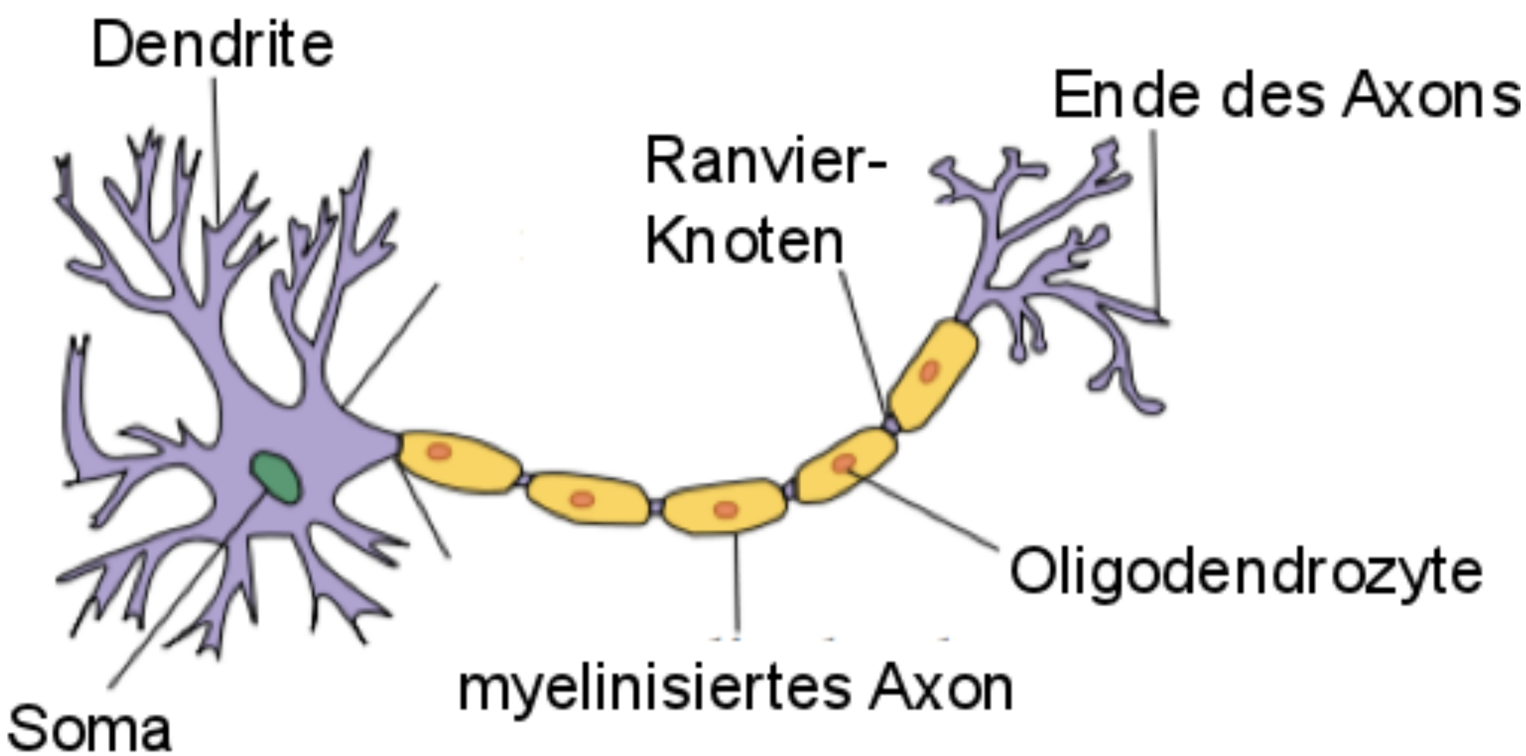
Messung

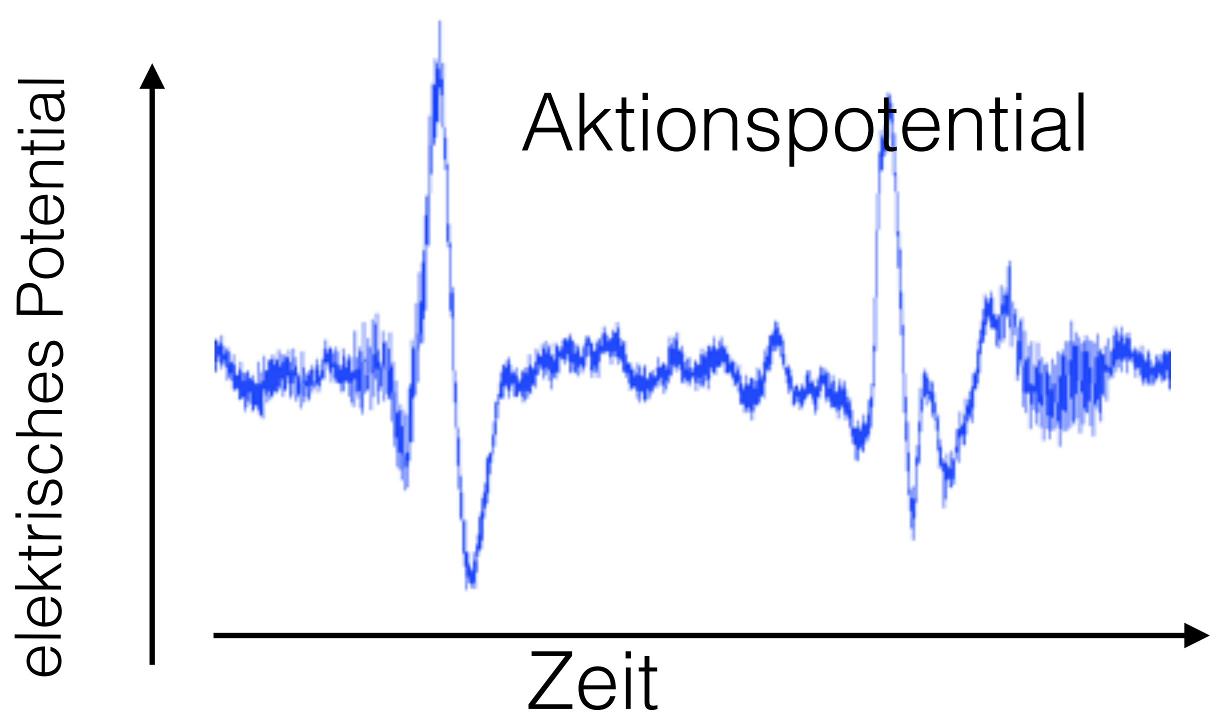


(aus Segev and Schneidmann (1999))

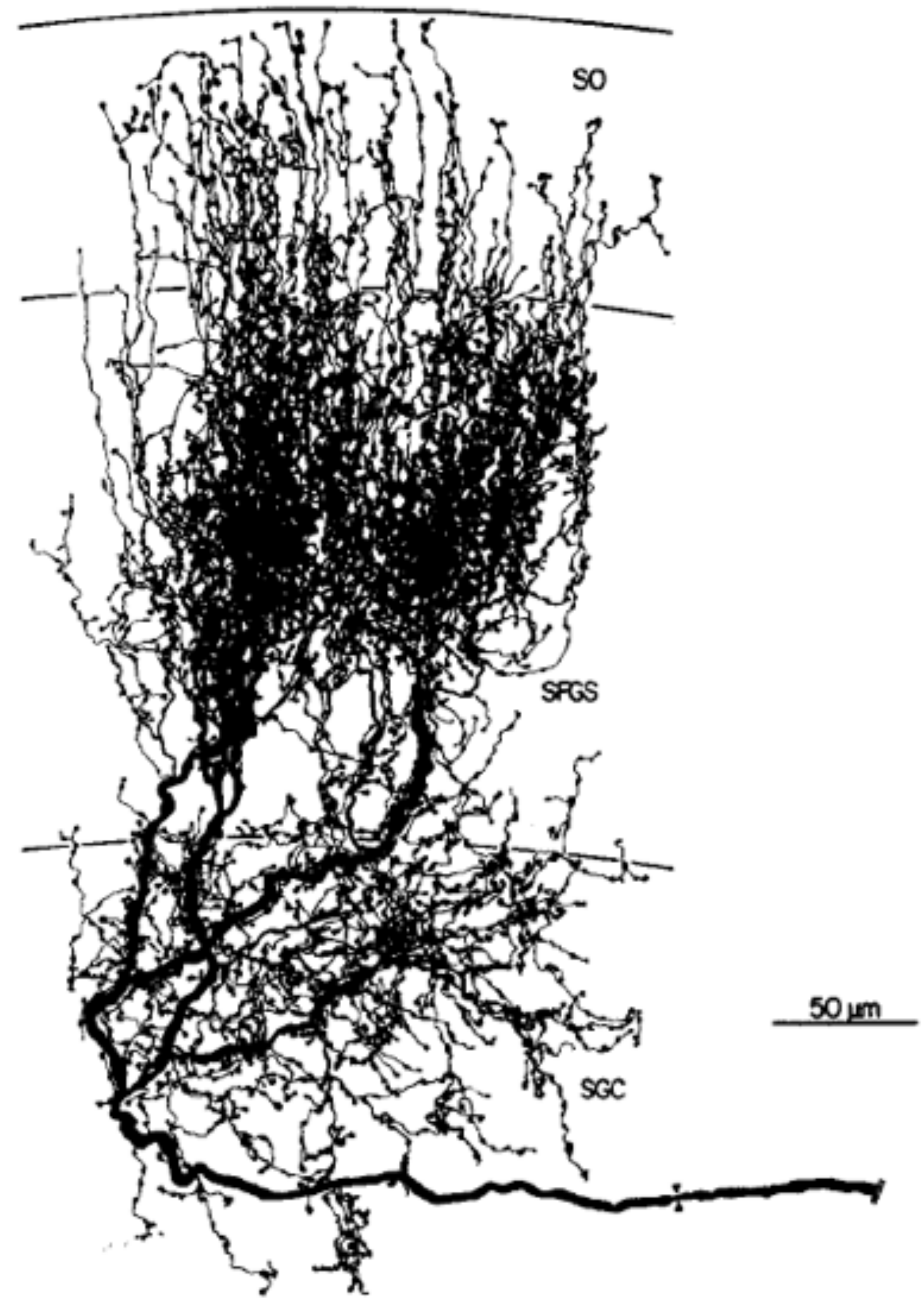
Biologisches Neuron

Modell:



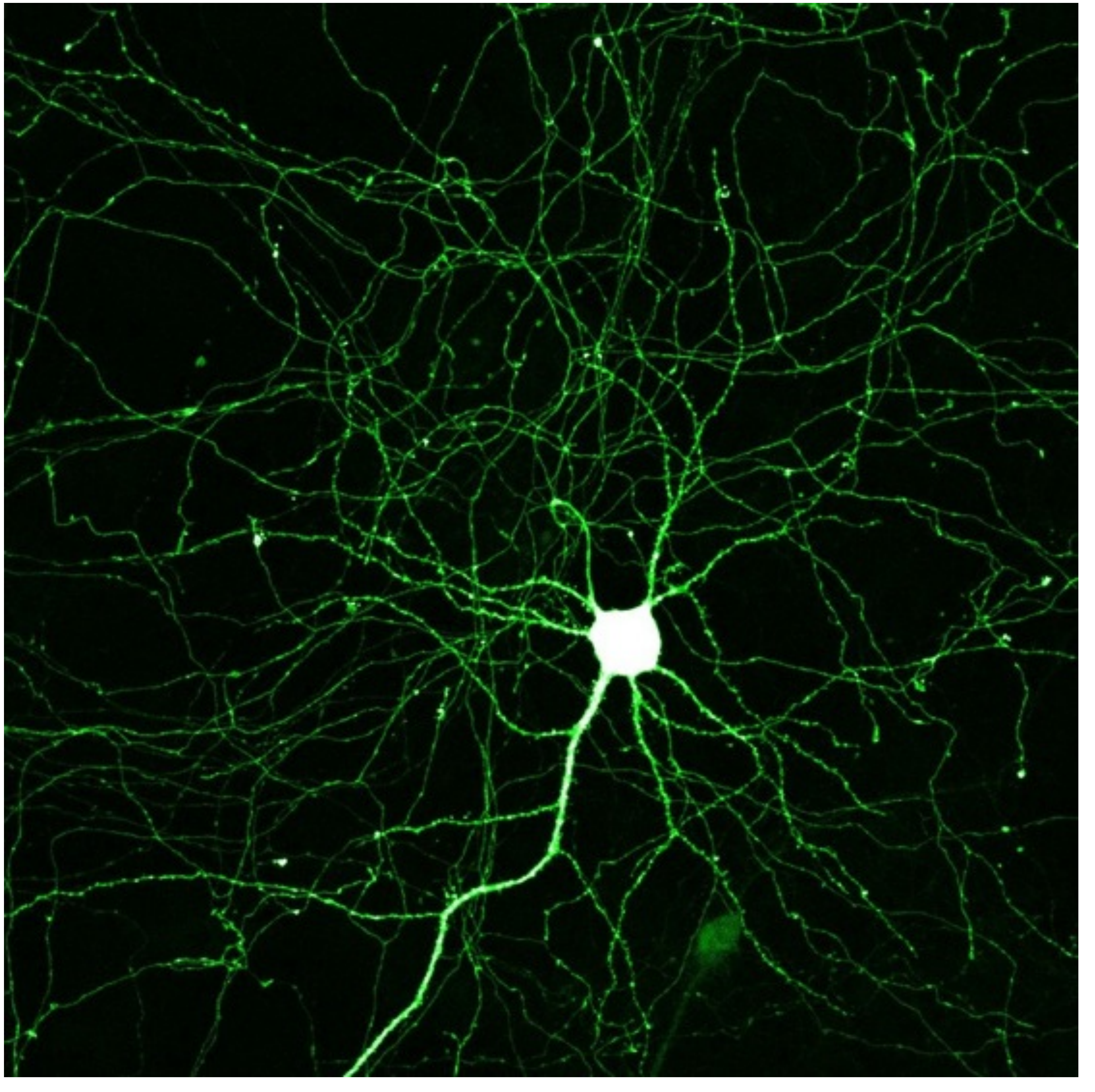


Messung



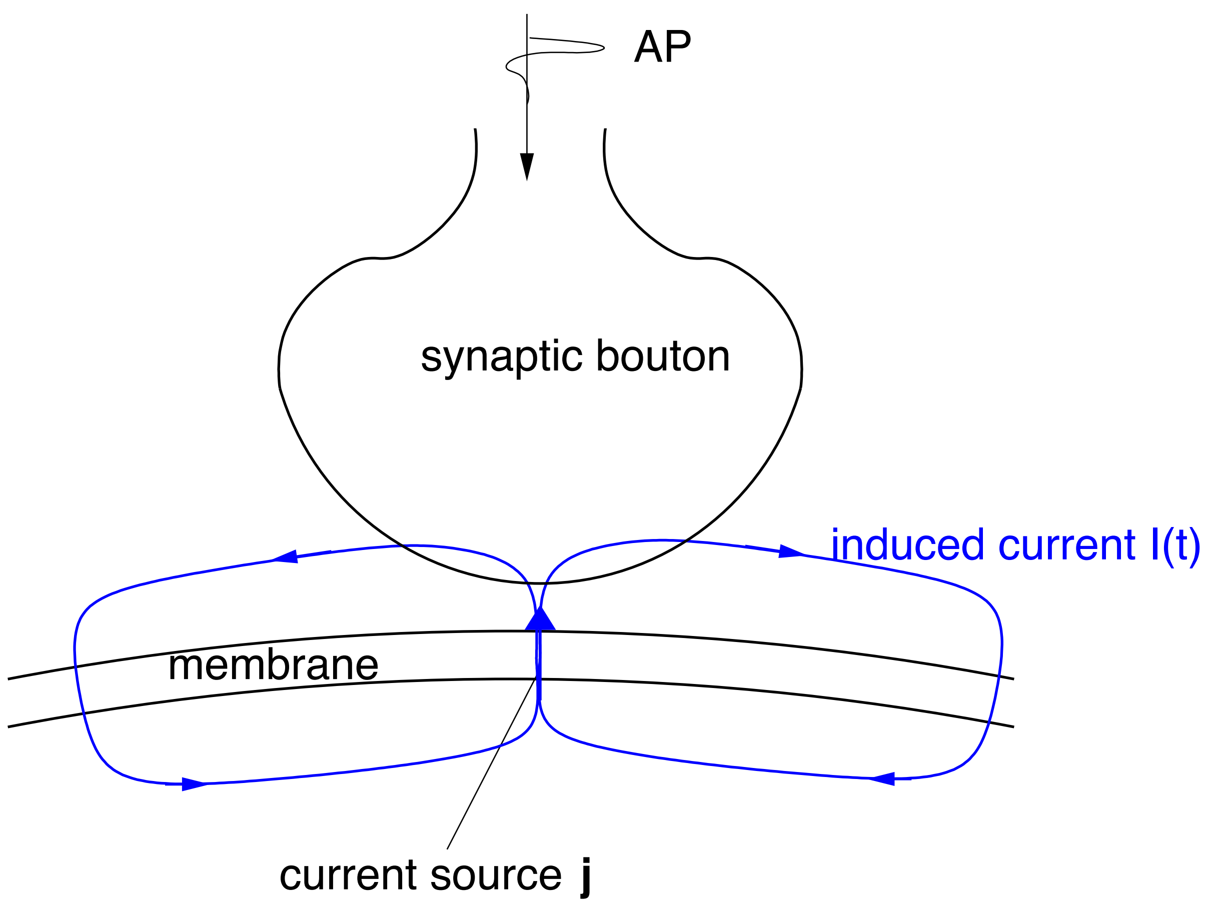
(aus Segev and Schneidmann (1999))

ein einzelnes Neuron



Wie entsteht elektrische Aktivität im Gehirn ?

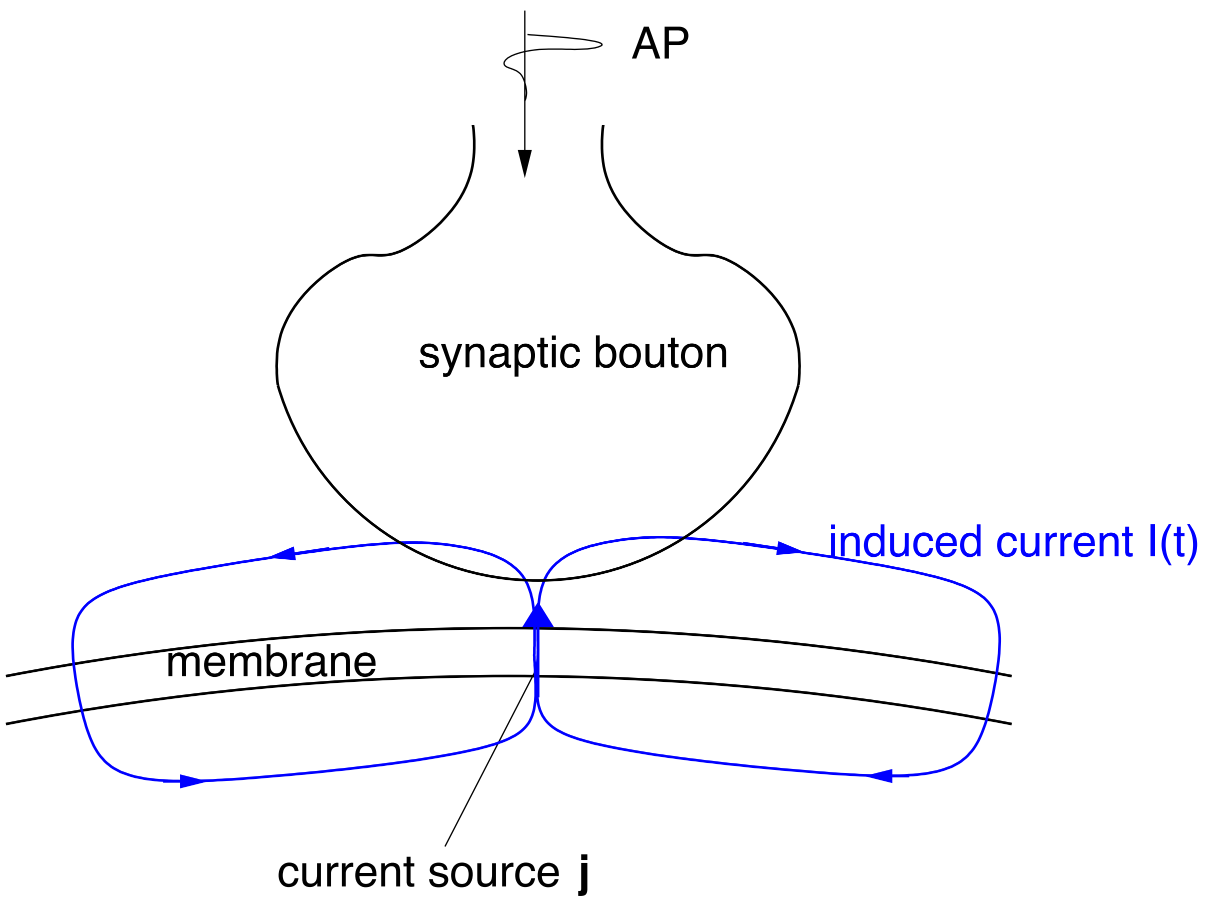
einzelne Synapse



induzierter Strom

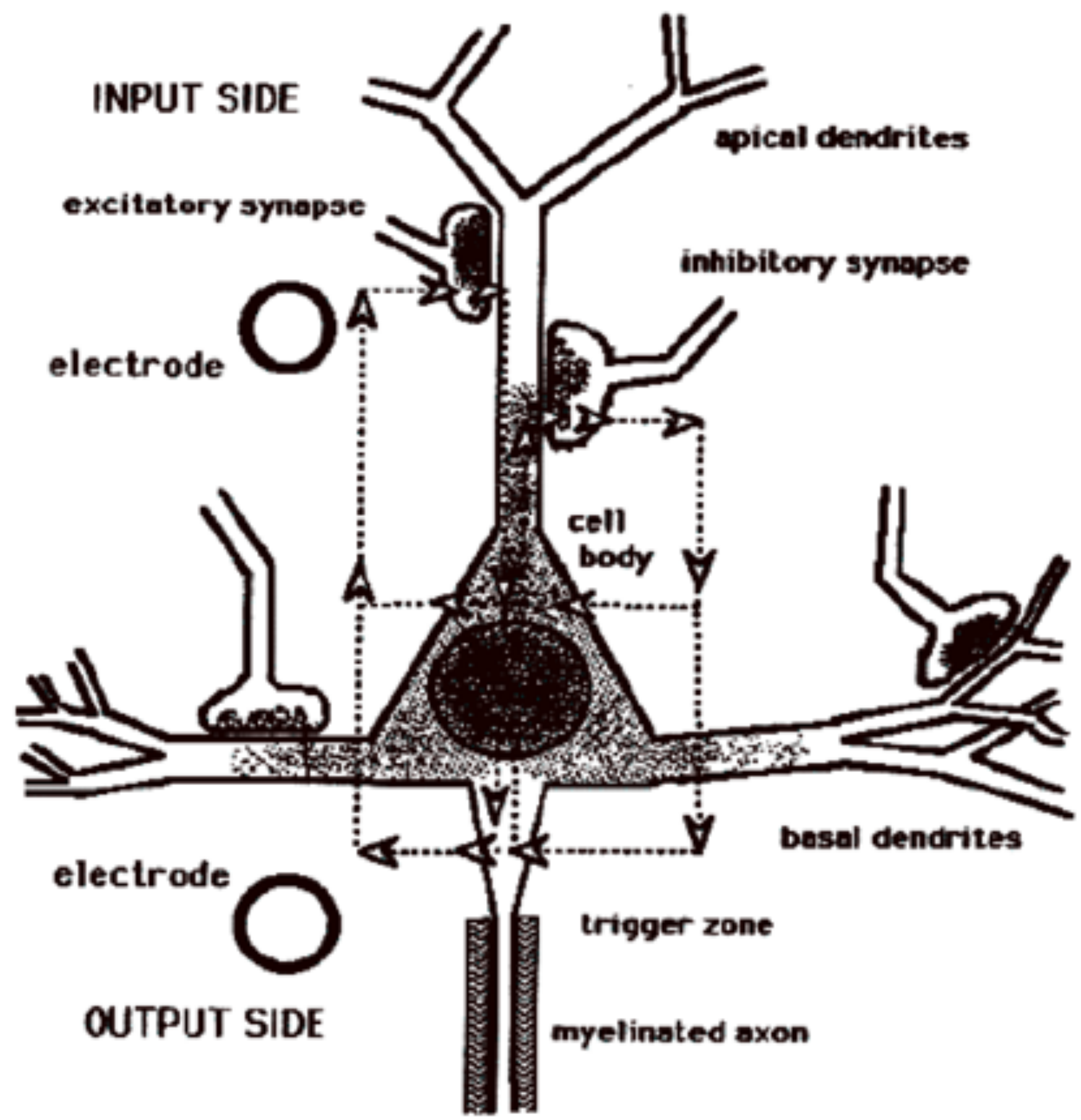
Wie entsteht elektrische Aktivität im Gehirn ?

einzelne Synapse



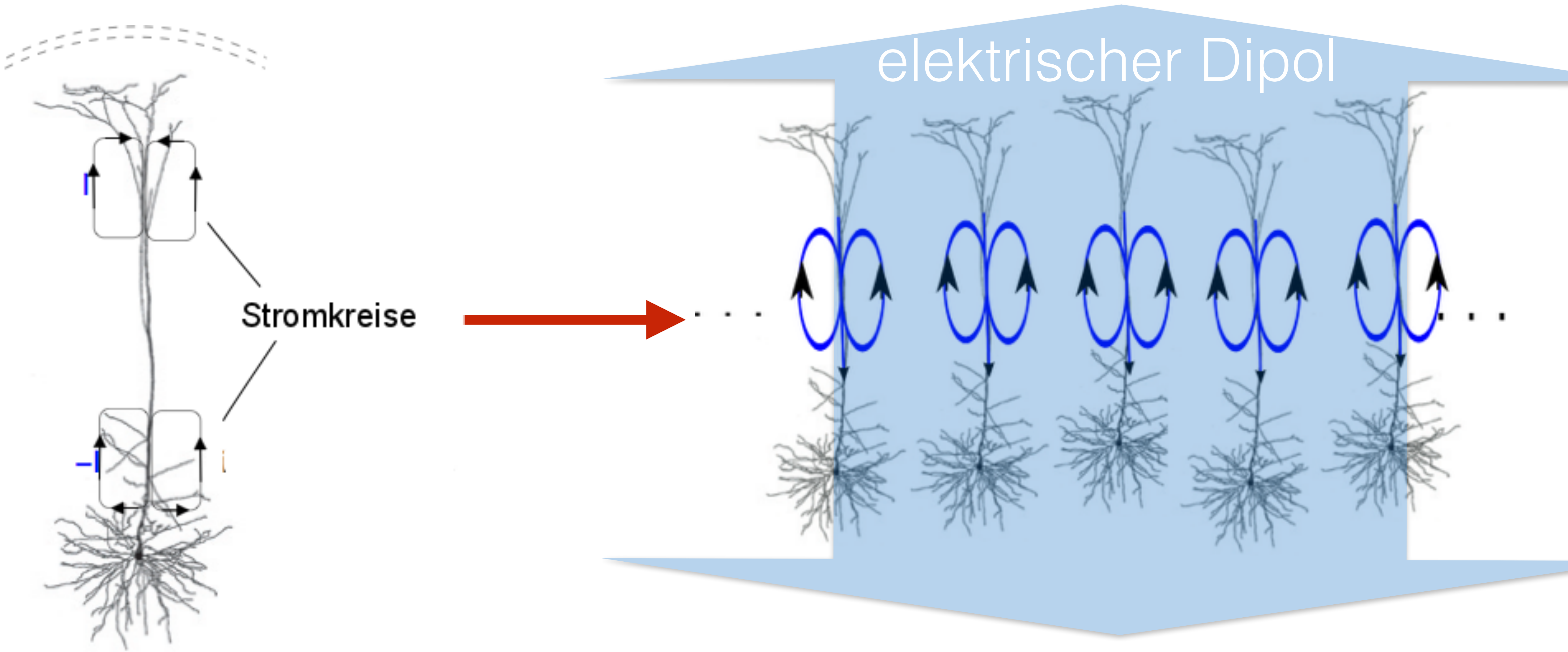
induzierter Strom

Summe von synaptischen Strömen



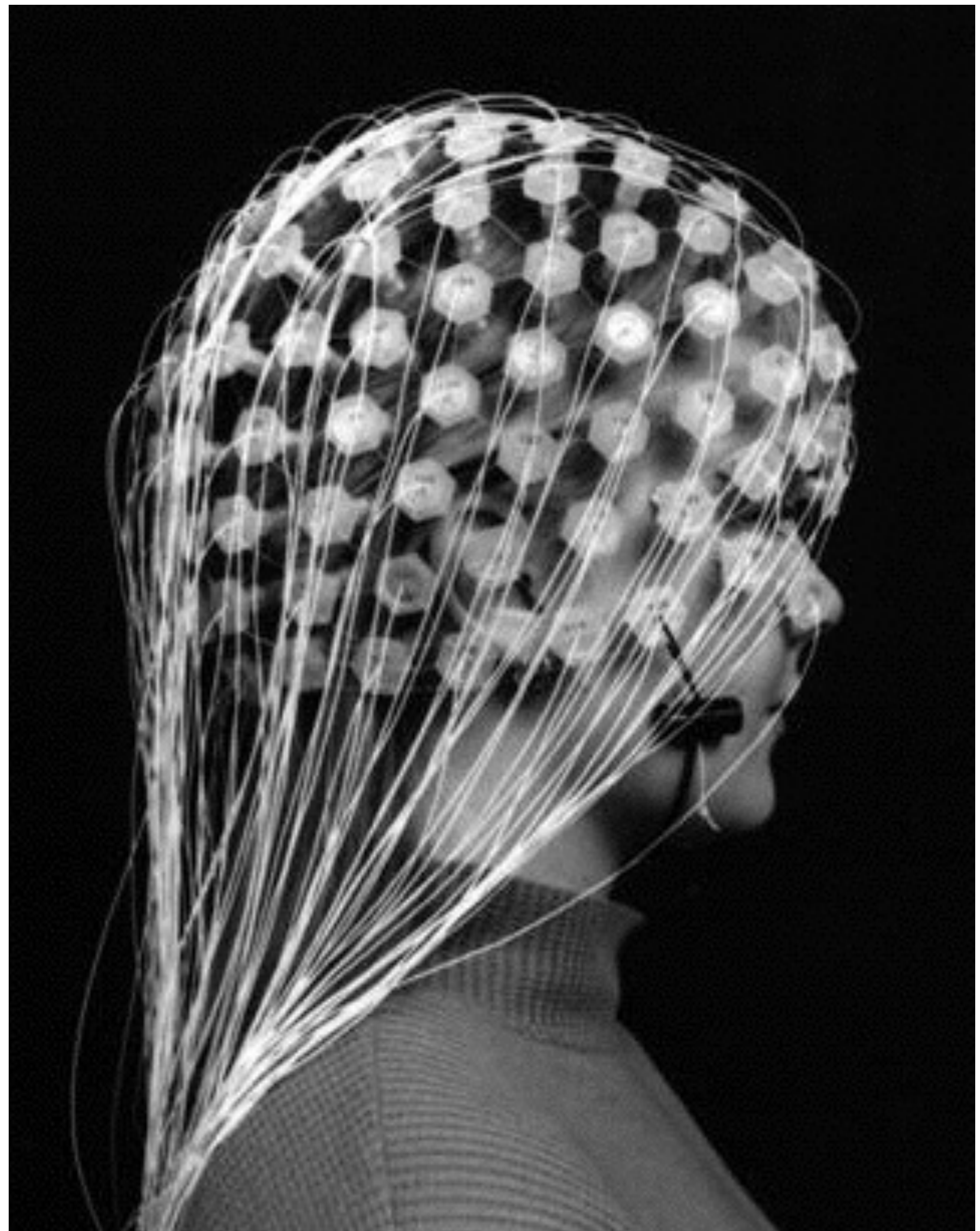
(aus Freeman, Int. J. Bif. Chaos (1992))

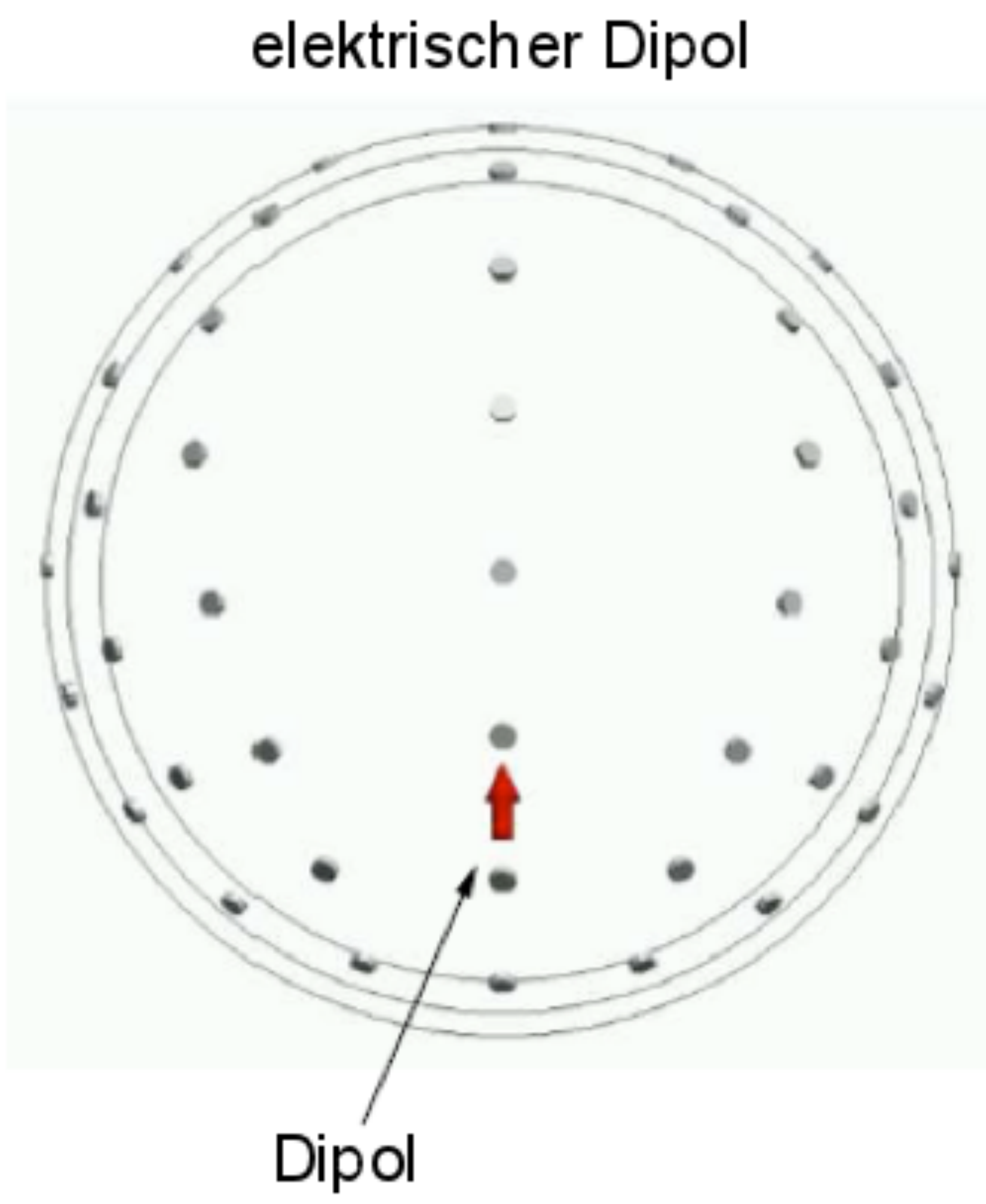
viele Neuronen: Population

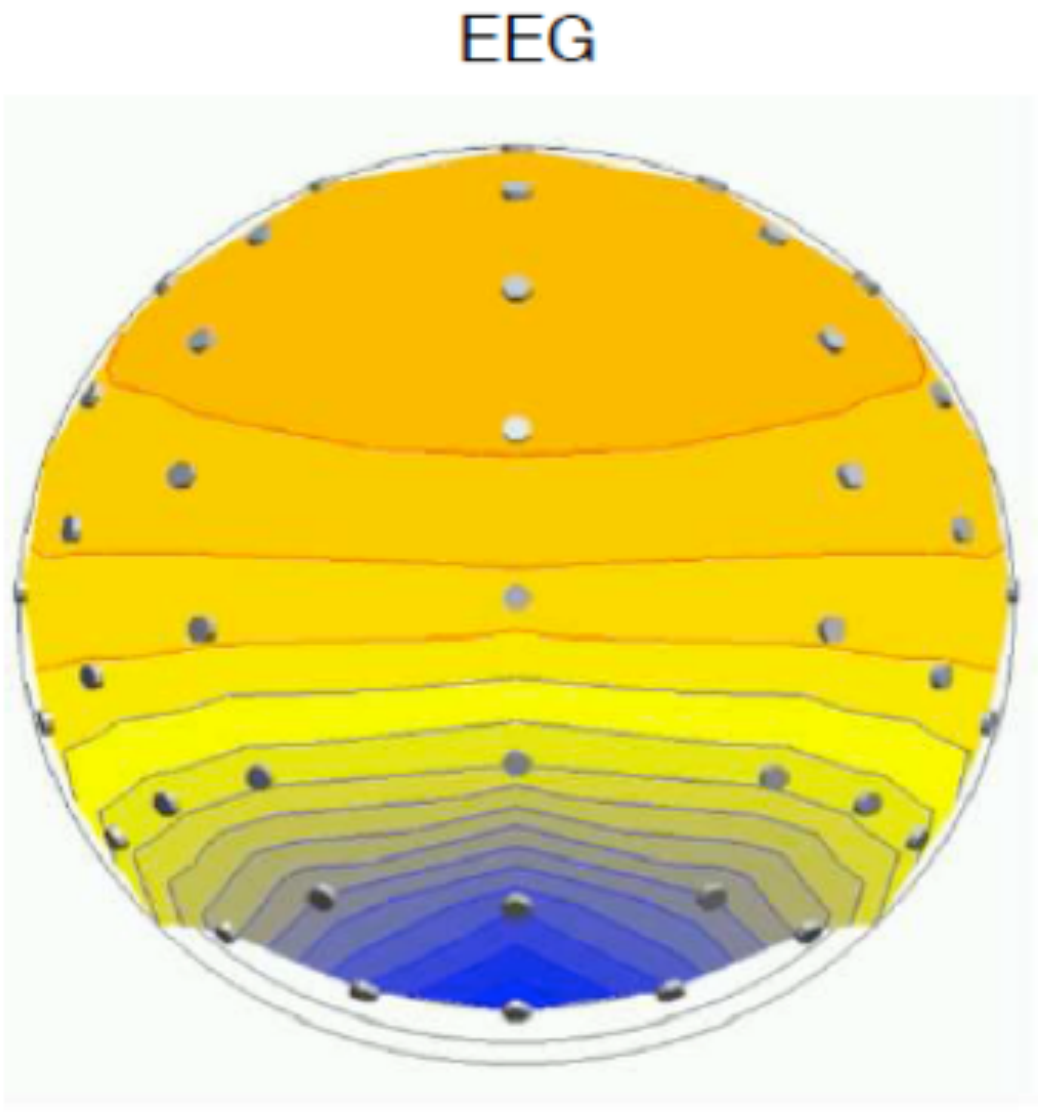


(Nunez and Srinivasan, Electric Fields of the Brain: The Neurophysics of EEG (2006))

Elektroenzephalogram (EEG)







(Dank an Prof. Christoph Herrmann, University of Oldenburg)

Neuronale Aktivität, resultiert aus synaptischen Strömen

Oszillatorische Aktivität: generiert in Einzelzellen oder in Populationen

Ziel der Datenanalyse: Beschreibung von oszillatorischen neuronalen Prozessen **im Gehirn**

I.1. Rhythmen in der Natur

I.2. Ursprung elektrischer Signale

I.3. Sampling

Messung von Signalen analog :

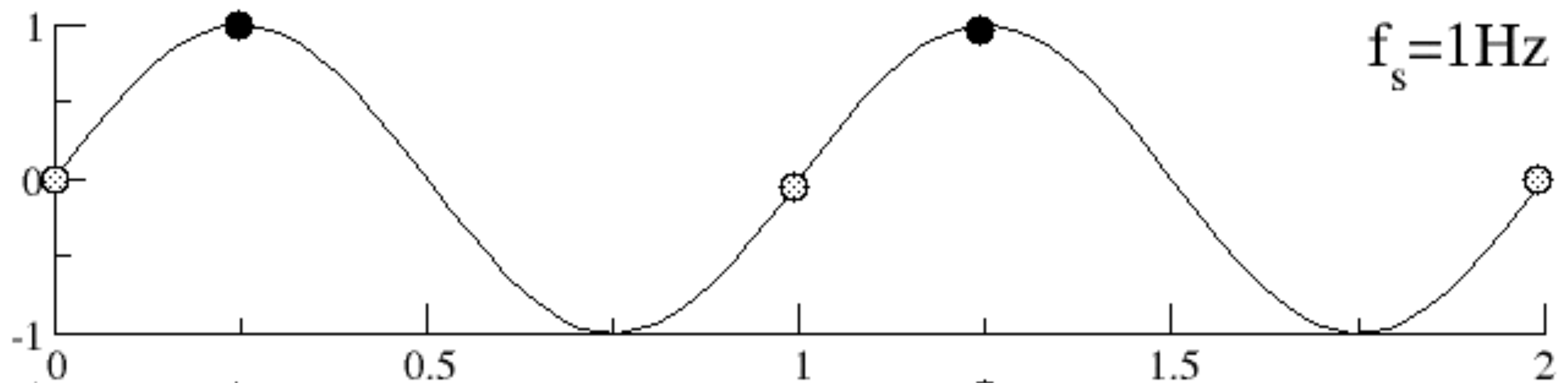
- elektrische Potentiale / Ströme
- mechanische Amplituden
- akustische Signale

Speicherung der Messdaten:

Digitalisierung durch **periodisches** Registrieren

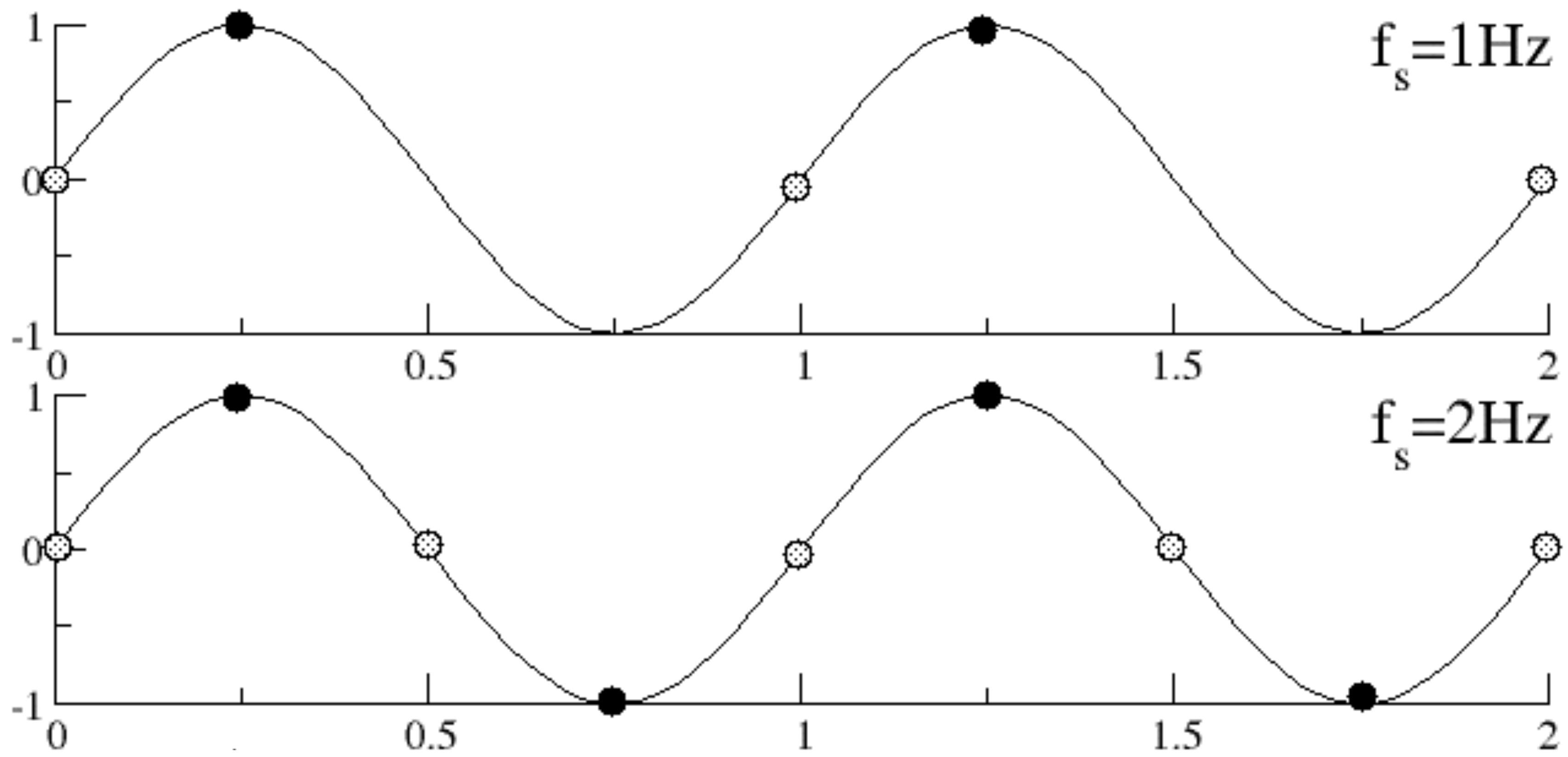
Sampling

oszillatorisches Signal mit 1 Hz



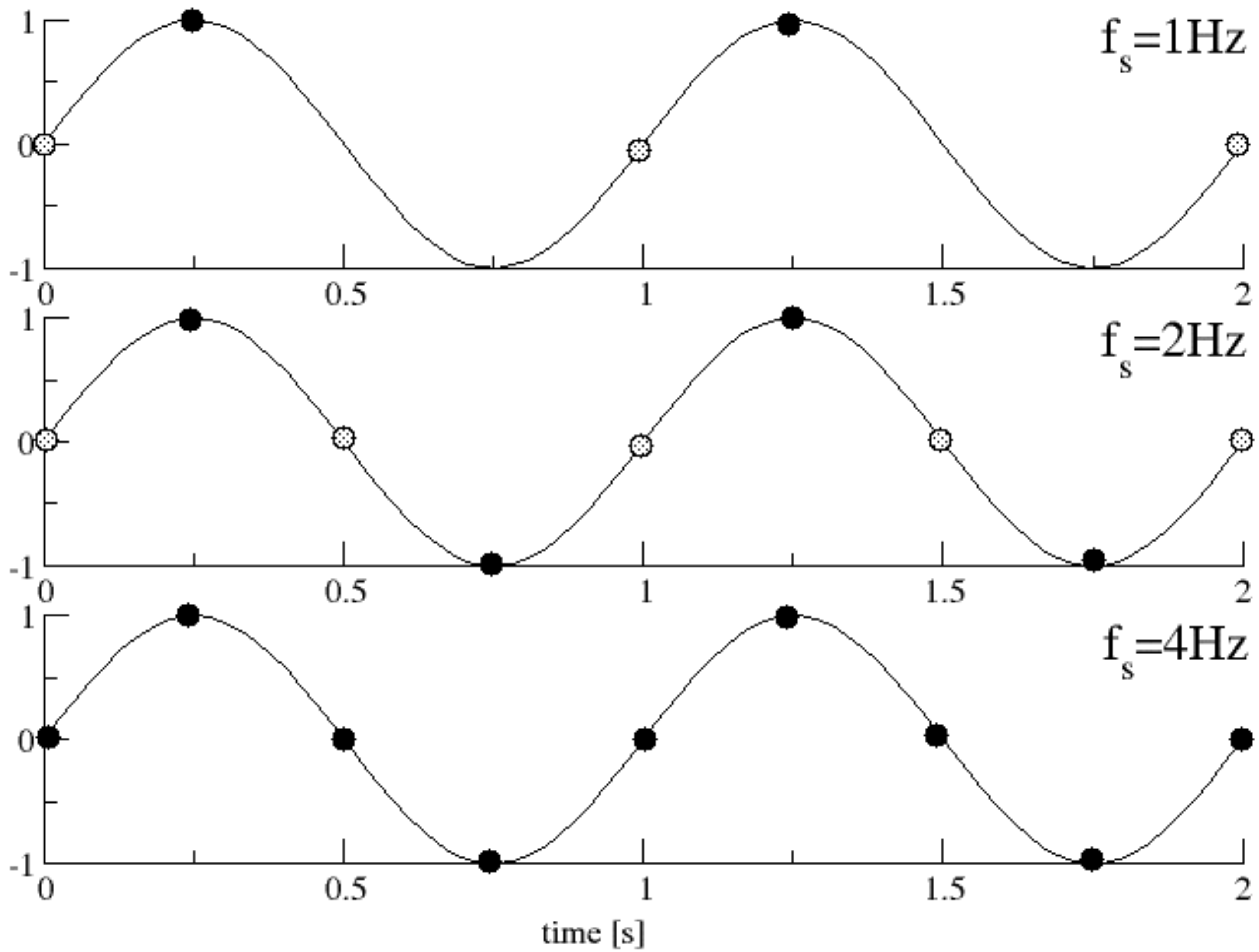
Sampling

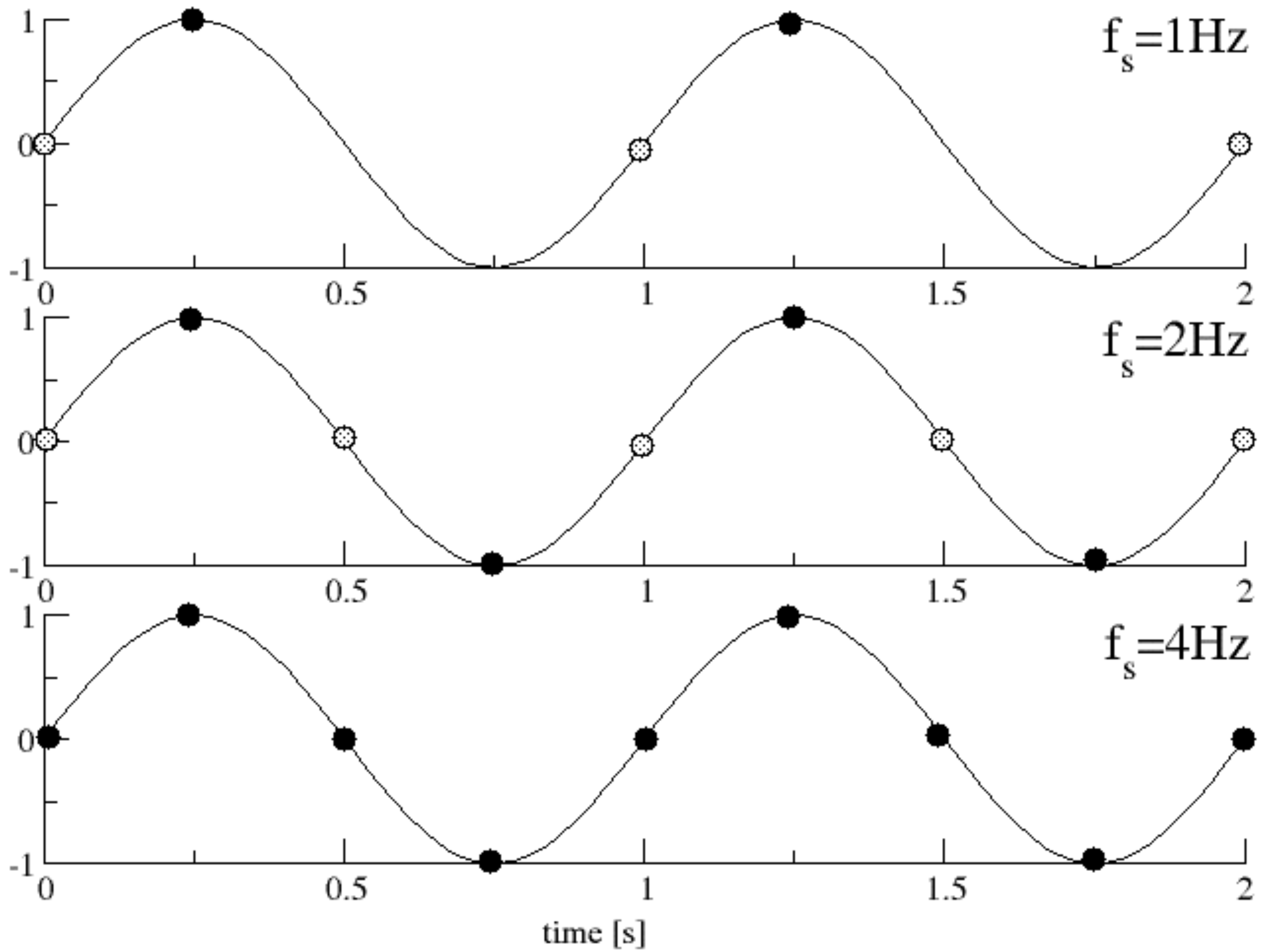
oszillatorisches Signal mit 1 Hz



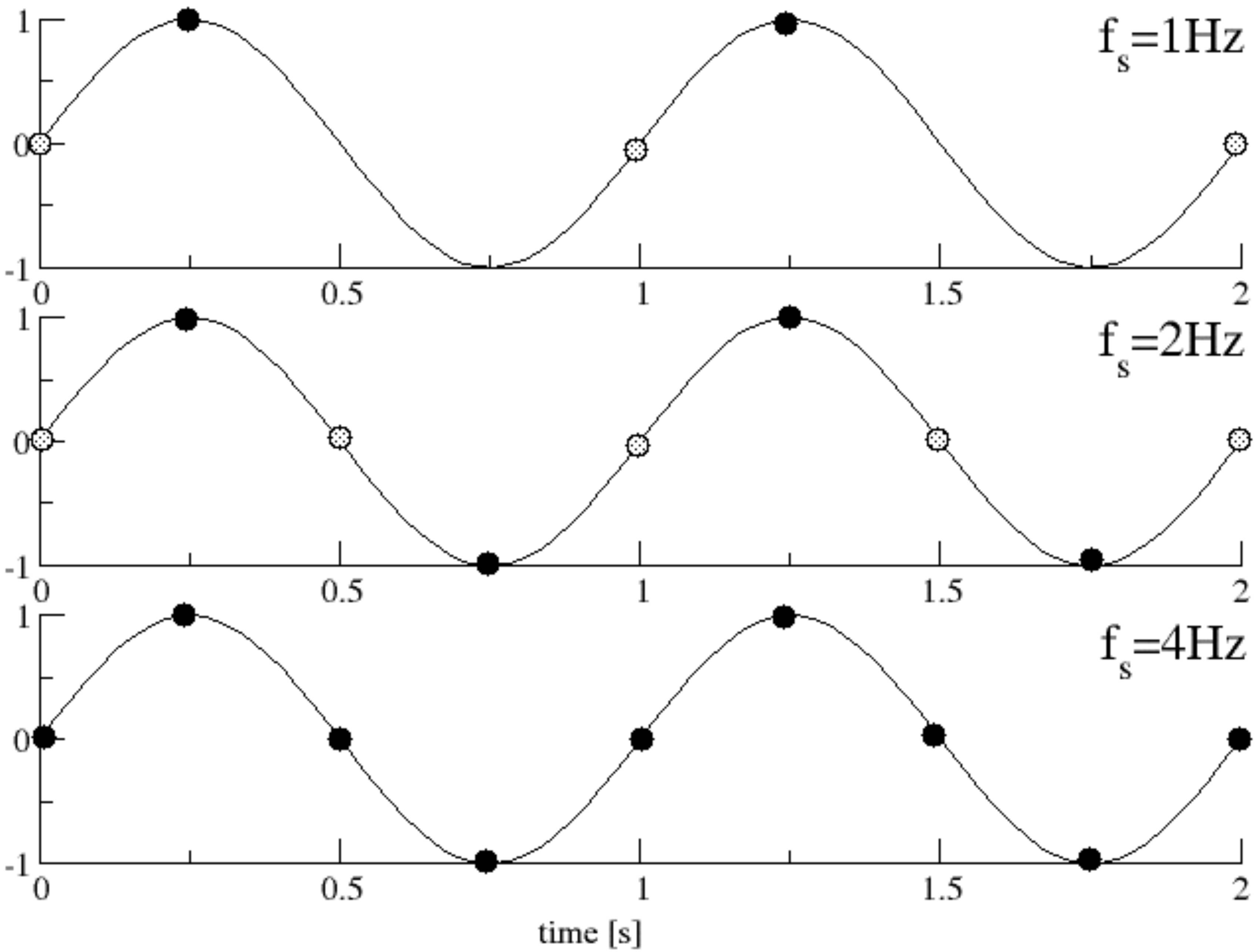
Sampling

oszillatorisches Signal mit 1 Hz





$$f_s > 2f_{signal} \;\rightarrow\; f_{signal} < f_s/2$$



$$f_s > 2f_{signal} \;\rightarrow\; f_{signal} < f_s/2$$

kleinste Abtastfrequenz: Nyquist Frequenz $f_{Nyquist} = 2f_{Signal}$

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

gegeben: kontinuierliche Funktion $s(t)$

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

<u>gegeben</u>: kontinuierliche Funktion s(t)

s(t) enthält maximale Frequenz f_m

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

<u>gegeben</u>: kontinuierliche Funktion s(t)

s(t) enthält maximale Frequenz f_m

s(t) wird abgetastet mit Frequenz $f_s \longrightarrow s(t_n)$

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

<u>gegeben</u>: kontinuierliche Funktion $s(t)$

$s(t)$ enthält maximale Frequenz f_m

$s(t)$ wird abgetastet mit Frequenz $f_s \longrightarrow s(t_n)$

<u>Vermutung</u>: Informationsverlust durch Abtastung

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

<u>gegeben</u>: kontinuierliche Funktion $s(t)$

$s(t)$ enthält maximale Frequenz f_m

$s(t)$ wird abgetastet mit Frequenz $f_s \longrightarrow s(t_n)$

<u>Vermutung</u>: Informationsverlust durch Abtastung

<u>gesucht:</u> Abtastfrequenz, für welche Rekonstruktion von $s(t)$ aus $s(t_n)$ (durch Interpolation) ohne Informationsverlust möglich ist.

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

Lösung:

Abtast-Theorem (Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

<u>Lösung:</u> $\boxed{\text{Abtastfrequenz } f_s > 2f_m}$

Abtast-Theorem (Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

Lösung: $\boxed{\text{Abtastfrequenz } f_s > 2f_m}$

Grenz-Abtastfrequenz

Nyquistfrequenz $\boxed{f_{Nyquist} = 2f_m}$

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

Lösung: $\boxed{\text{Abtastfrequenz } f_s > 2f_m}$

Grenz-Abtastfrequenz

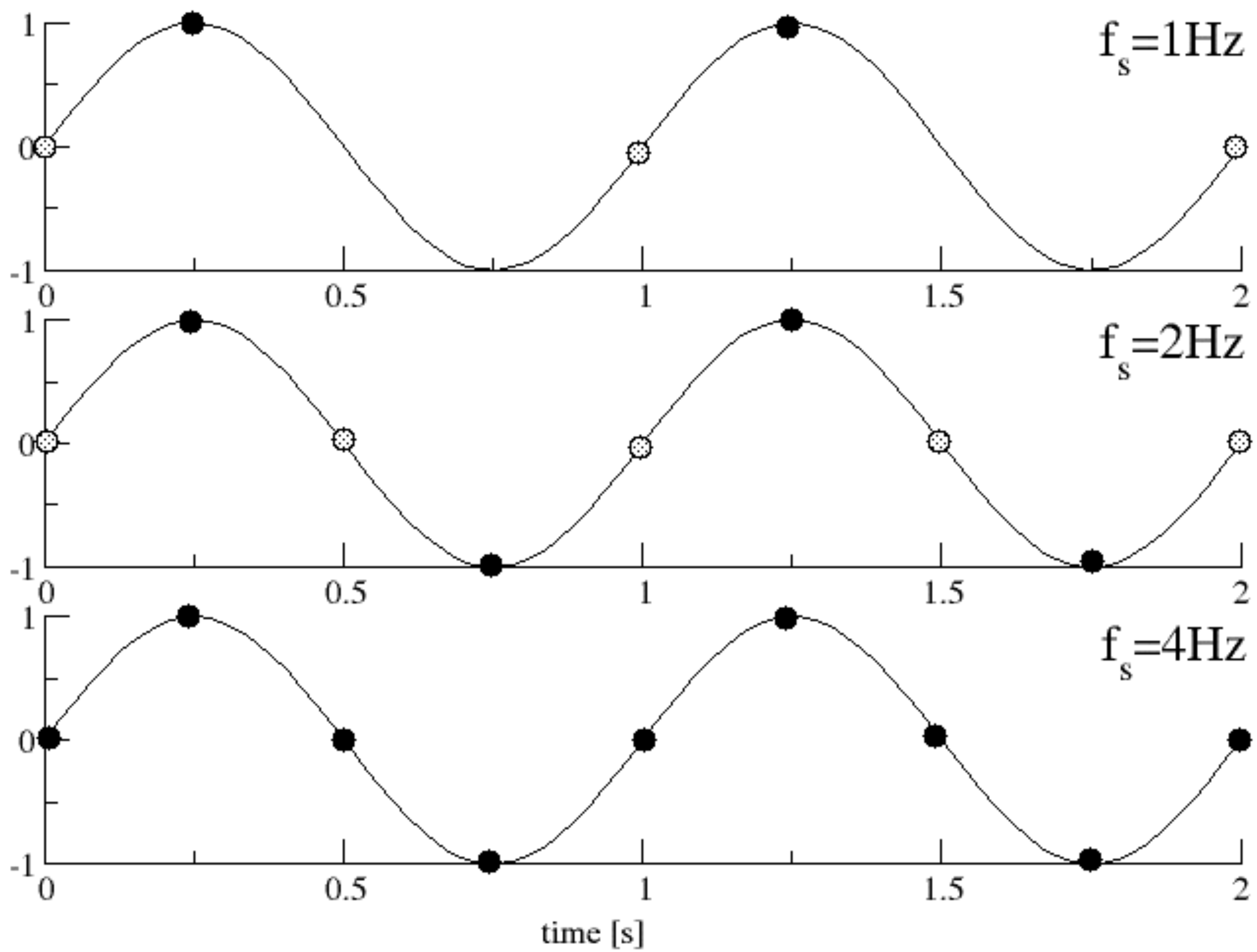
Nyquistfrequenz $\boxed{f_{Nyquist} = 2f_m}$

oder: falls f_s gegeben, dann

$$f_m < f_s/2$$

Kommentar aus der Praxis

$$f_{signal} < f_s/4$$



I. Einleitung

II. Fourier Analyse

III. Zeit-Frequenz Analyse

II. Fourier Analyse

II.1. Grundlagen

a) Koeffizienten

b) Fourier Theorem

II.2. Mögliche Fehler in der Fourier Analyse

Aliasing

Periodizität

Spectral leakage

II.3. Berechnung von Spektren

II. Fourier Analyse

II.1. Grundlagen

a) Koeffizienten

b) Fourier Theorem

II.2. Mögliche Fehler in der Fourier Analyse

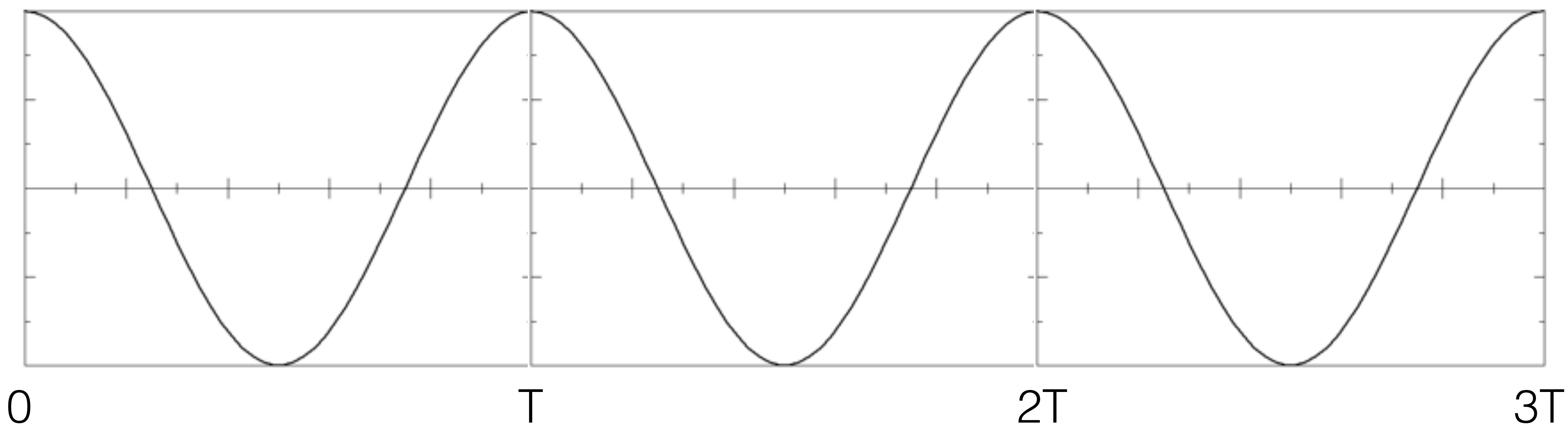
Aliasing

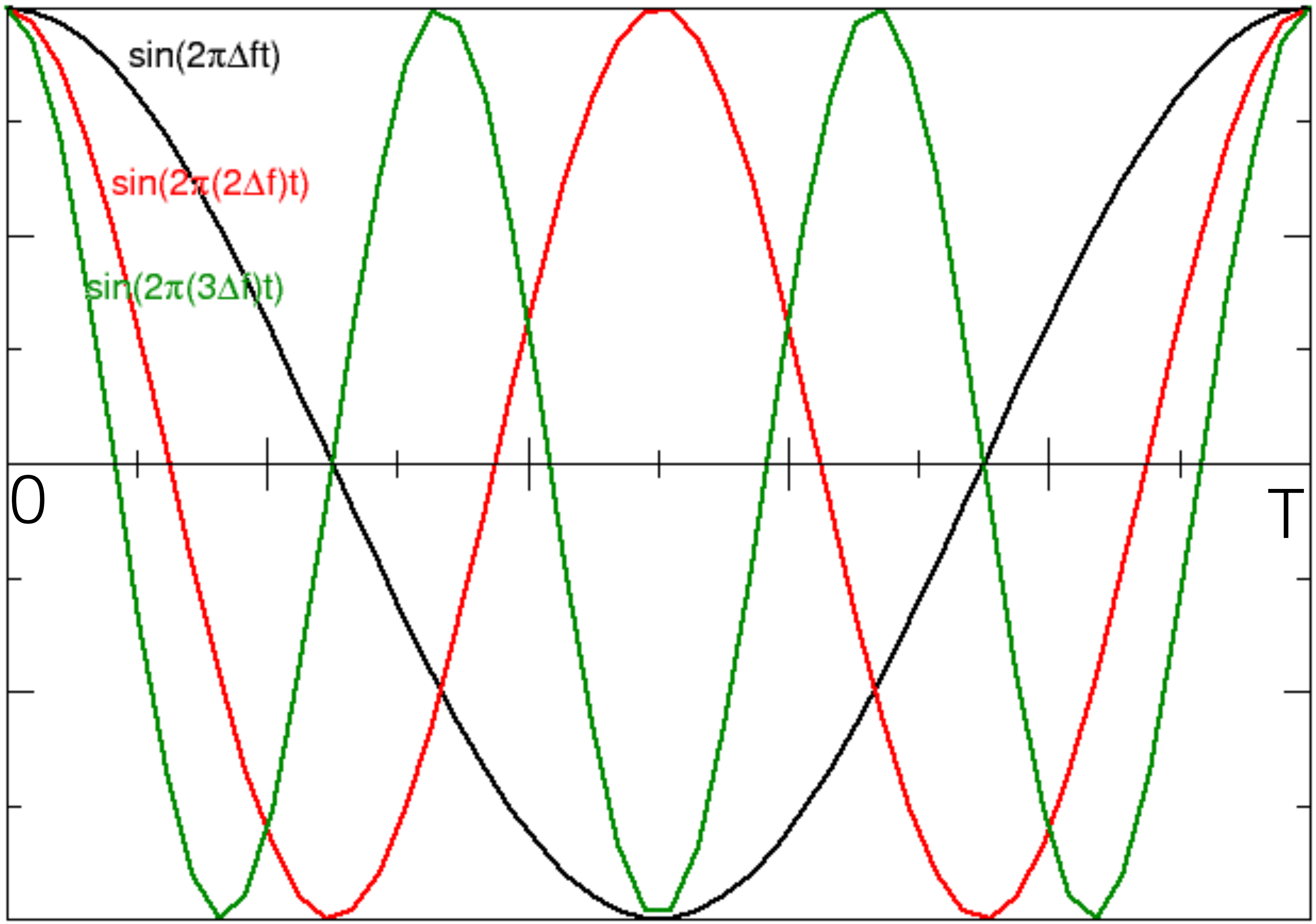
Periodizität

Spectral leakage

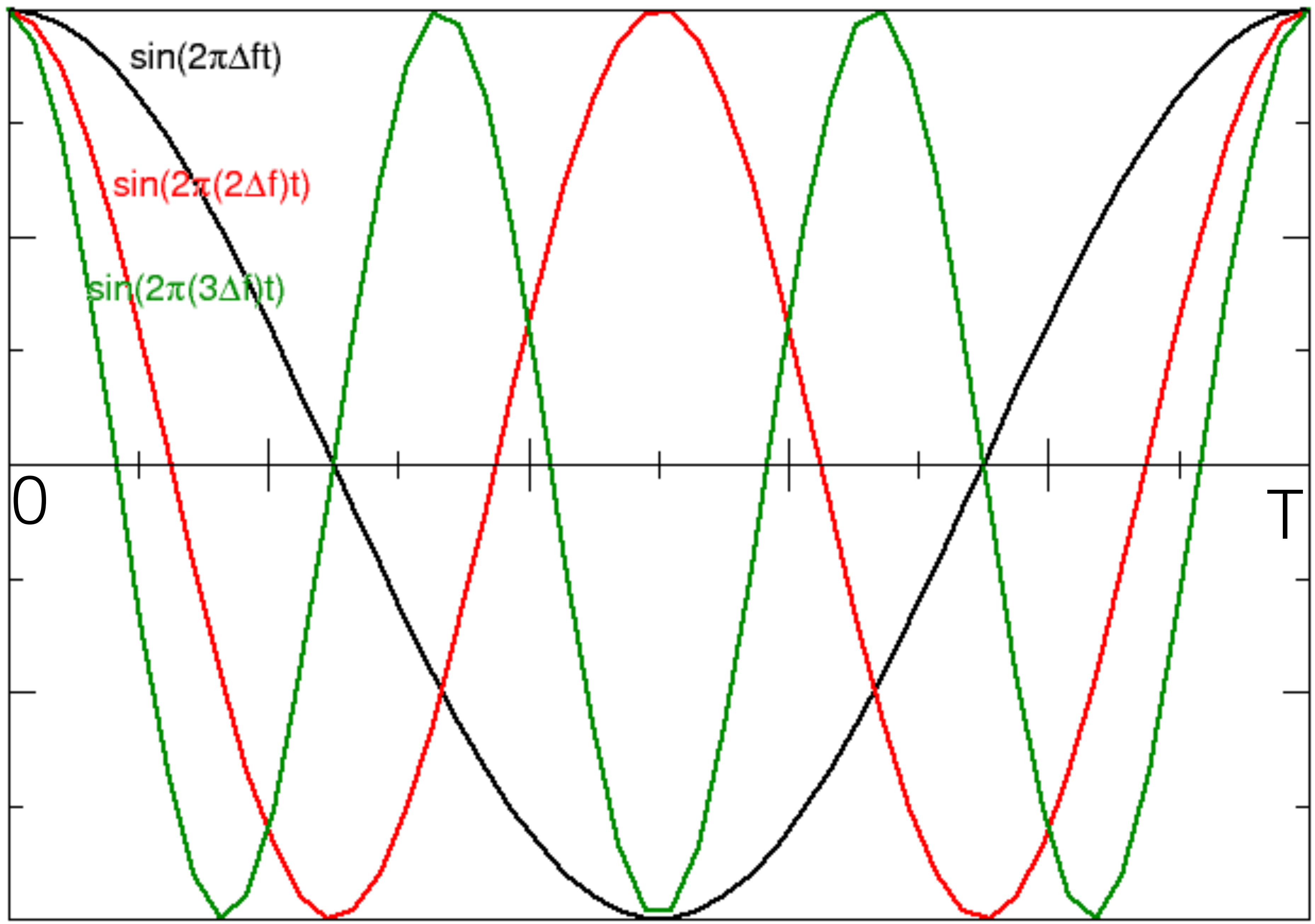
II.3. Berechnung von Spektren

periodisches Signal

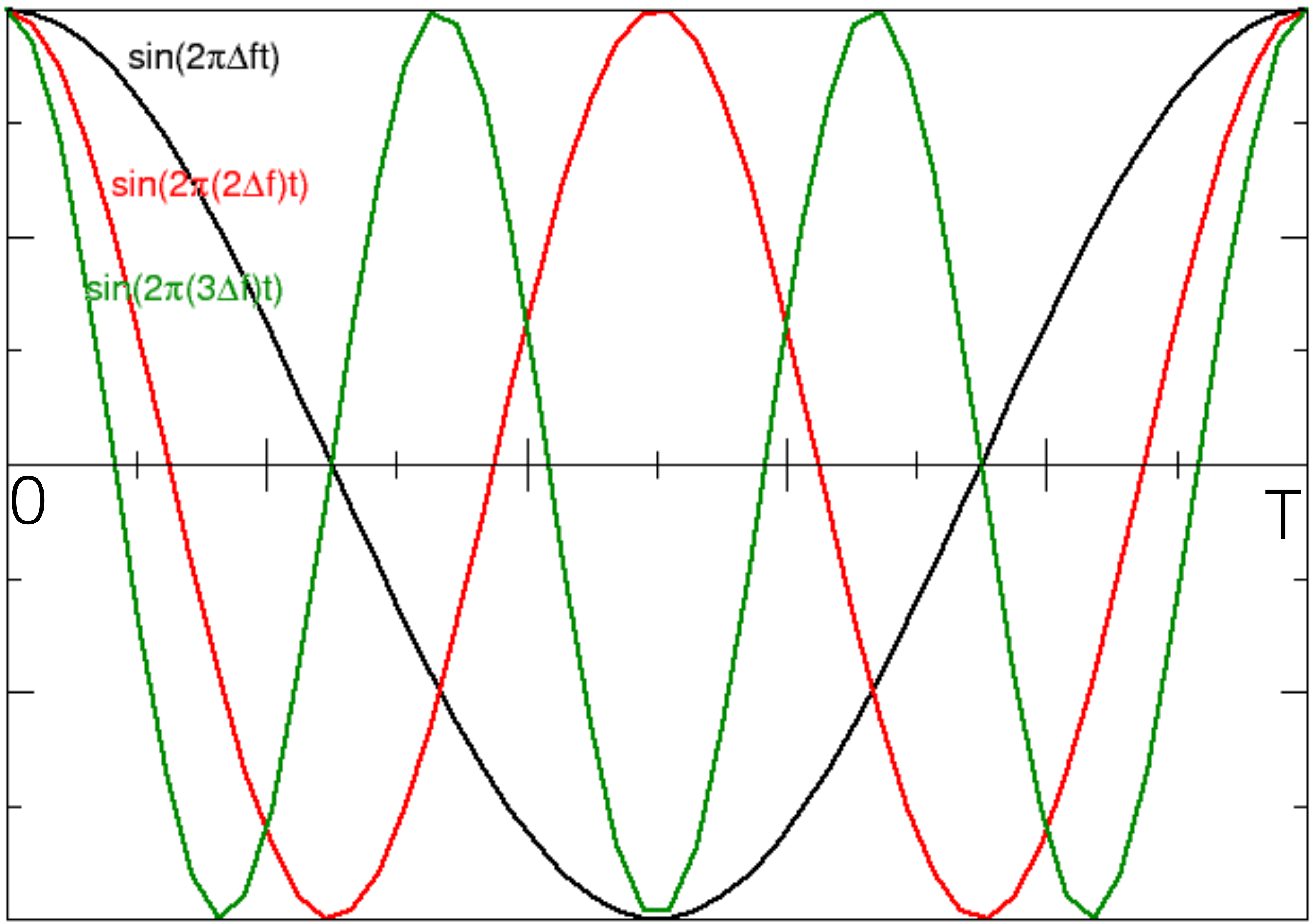




sin(2πΔft)
sin(2π(2Δf)t)
sin(2π(3Δf)t)
0
T



kleinste Frequenz: $\Delta f = 1/T$



kleinste Frequenz: $\Delta f = 1/T$

$f_n = n\Delta f \qquad n \in \mathbf{N}_0$

Fourieranalyse

Jedes Signal,
das periodisch in der Zeit ist mit Periode T,
kann durch N *Fouriermoden* beschrieben werden

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t + \phi_n\right)$$

mit den Koeffizienten a_n und den Phasen ϕ_n

Fourieranalyse

Jedes Signal,
das periodisch in der Zeit ist mit Periode T,
kann durch N *Fouriermoden* beschrieben werden

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t + \phi_n\right)$$

$=2\pi f_n = 2\pi n \Delta f$

mit den Koeffizienten a_n und den Phasen ϕ_n

mit $$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t):$$

mit $$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t):$$

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}}, \quad c_n = \frac{a_n}{2}\left(\cos(\phi_n) + i\sin(\phi_n)\right)$$

mit $$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t):$$

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}}, \quad c_n = \frac{a_n}{2}\left(\cos(\phi_n) + i\sin(\phi_n)\right)$$

mit Koeffizienten $$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t')e^{-i\frac{2\pi n}{T}t'}\,dt' \qquad c_{-n} = c_n^*$$

(siehe Übungsblatt)

Beispiel:

$$s(t) = a \sin(2\pi\nu t) \qquad t \in [0,T]$$

Beispiel:

$$s(t) = a\sin(2\pi\nu t) \qquad t\in[0,T]$$

$$= \frac{a}{2i}(e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t})$$

Beispiel:

$$s(t) = a\sin(2\pi\nu t)$$ t∈[0,T]

$$= \frac{a}{2i}(e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t})$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{a}{2i}\left(e^{i2\pi\nu t'} - e^{-i2\pi\nu t'}\right)e^{-i2\pi n t'/T}dt'$$

Beispiel:

$$s(t) = a\sin(2\pi\nu t) \qquad\qquad \text{t} \in [0,\text{T}]$$

$$= \frac{a}{2i}(e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t})$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{a}{2i}\left(e^{i2\pi\nu t'} - e^{-i2\pi\nu t'}\right) e^{-i2\pi n t'/T} dt'$$

$$= \frac{}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2} \left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right) dt'$$

Beispiel:

$$s(t) = a\sin(2\pi\nu t) \qquad t\in[0,T]$$

$$= \frac{a}{2i}(e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t})$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{a}{2i}\left(e^{i2\pi\nu t'} - e^{-i2\pi\nu t'}\right) e^{-i2\pi n t'/T} dt'$$

$$= \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2} \left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu+n/T)t'}\right) dt'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt \;=\; ?$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n} \sin(2\pi f_n T/2)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n} \sin(2\pi f_n T/2)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n} \sin(2\pi f_n T/2)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}$$

$$2\pi f_n T/2 = 2\pi (n/T) T/2 = \pi n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n} \sin(2\pi f_n T/2)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}$$

$$2\pi f_n T/2 = 2\pi(n/T)T/2 = \pi n$$

$$= 0 \quad , \quad n \neq 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n}\left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2}\right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n}\sin(2\pi f_n T/2)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}$$

$$2\pi f_n T/2 = 2\pi(n/T)T/2 = \pi n$$

$$= 0 \quad , \quad n \neq 0$$

$$= \lim_{f_n \to 0} \frac{\pi T \cos(\pi f_n T)}{\pi} = T \quad , \quad n = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n}\left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2}\right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n}\sin(2\pi f_n T/2)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}$$

$$2\pi f_n T/2 = 2\pi(n/T)T/2 = \pi n$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= 0 \quad , \quad n \neq 0 \\ &= \lim_{f_n \to 0} \frac{\pi T \cos(\pi f_n T)}{\pi} = T \quad , \quad n = 0 \end{aligned}}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right)dt'$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2} \left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'} \right) dt'$$

$\nu = m/T, a = 1 :$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right) dt'$$

$\nu = m/T, a = 1:$

$$= \frac{1}{2i}\left(\delta_{n,m} - \delta_{n,-m}\right)$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right) dt'$$

$\nu = m/T, a = 1:$

$$= \frac{1}{2i}\left(\delta_{n,m} - \delta_{n,-m}\right)$$

$$c_m = \frac{1}{2i}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right) dt'$$

$\nu = m/T, a = 1:$

$$= \frac{1}{2i}\left(\delta_{n,m} - \delta_{n,-m}\right)$$

$$c_m = \frac{1}{2i} \longrightarrow \frac{1}{i} = a_m(\cos(\phi_m) + i\sin(\phi_m))$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu-n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu+n/T)t'}\right)dt'$$

$\nu = m/T, a = 1:$

$$= \frac{1}{2i}\left(\delta_{n,m} - \delta_{n,-m}\right)$$

$$c_m = \frac{1}{2i} \longrightarrow \frac{1}{i} = a_m(\cos(\phi_m) + i\sin(\phi_m))$$

$$a_m = 1\ ,\ \ \phi_m = \frac{3\pi}{2}$$

$$c_{-m} = -\frac{1}{2i} \longrightarrow a_{-m} = 1 \ , \ \phi_{-m} = \pi/2$$

$$c_{-m} = -\frac{1}{2i} \longrightarrow a_{-m} = 1\ ,\ \phi_{-m} = \pi/2$$

oder

$$Re(c_m) = Re(c_{-m}) = 0$$

$$Im(c_m) = -Im(c_{-m}) = -1$$

$$c_{n \neq m} = 0 \quad , \quad n = -N, \cdots N$$

$$c_{-m} = -\frac{1}{2i} \longrightarrow a_{-m} = 1\ ,\ \phi_{-m} = \pi/2$$

oder

$$Re(c_m) = Re(c_{-m}) = 0$$

$$Im(c_m) = -Im(c_{-m}) = -1$$

$$c_{n \neq m} = 0 \quad , \quad n = -N, \cdots N$$

für zeitlich kontinuierliche Signale: N beliebig

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s}$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad\qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad\qquad t \rightarrow t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \rightarrow s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad t \rightarrow t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \rightarrow s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t \qquad \Delta f = \frac{1}{T}$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t \qquad \Delta f = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{1}{N\Delta t}$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad\qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t \qquad\qquad \Delta f = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{1}{N\Delta t}$$

$$= \frac{f_s}{N}$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad\qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t \qquad\qquad \Delta f = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{1}{N\Delta t}$$

$$= \frac{f_s}{N}$$

Anzahl der Frequenzen = Anzahl der Datenpunkte falls nun Signal s(t) abgetastet wird mit Frequenz f_s:

$$s(t) = s(t_k) \ , \ t_k = k\Delta t \qquad \Delta t = \frac{1}{f_s}$$

wie werden dann die Fourierkoeffizienten berechnet ?

falls nun Signal s(t) abgetastet wird mit Frequenz f_s:

$$s(t) = s(t_k)\ ,\ t_k = k\Delta t \qquad \Delta t = \frac{1}{f_s}$$

wie werden dann die Fourierkoeffizienten berechnet ?

erst einmal gilt allgemein:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{k=1}^{M} f(t_k)\Delta t\ ,\ t_1 = a\ ,\ t_N = b - \Delta t$$

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t^{`})e^{-i\,\frac{2\pi n}{T}\,t^{`}}\;dt^{`} \qquad \text{zu}$$

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t‘)e^{-i\,\frac{2\pi n}{T}\,t‘}\;dt‘$$ zu

$$c_n = \frac{\Delta t}{M\Delta t}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\,\frac{2\pi n k \Delta t}{M \Delta t}}\;\;,\;\; n = 1, \ldots, N$$

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t')e^{-i\frac{2\pi n}{T}t'}\,dt'$$ zu

$$c_n = \frac{\Delta t}{M\Delta t}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\frac{2\pi n k\Delta t}{M\Delta t}}\ ,\ n = 1,\dots,N$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i2\pi f_n k}\ ,\ f_n = n/M$$

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t')e^{-i\frac{2\pi n}{T}t'}\,dt' \qquad \text{zu}$$

$$c_n = \frac{\Delta t}{M\Delta t}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\frac{2\pi n k\Delta t}{M\Delta t}} \ , \ n = 1, \ldots, N$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i2\pi f_n k} \ , \ f_n = n/M$$

diskrete Frequenz

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t')e^{-i\frac{2\pi n}{T}t'}\,dt'$$ zu

$$c_n = \frac{\Delta t}{M\Delta t}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\frac{2\pi n k \Delta t}{M\Delta t}}\ ,\ \ n = 1, \ldots, N$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i2\pi f_n k}\ ,\ \ f_n = n/M$$

diskrete Frequenz

Discrete Fourier Transformation (DFT)

Annahme: N Zeitpunkte

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi f_n t}$$

Annahme: N Zeitpunkte

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi f_n t}$$

$$s(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi(n\Delta f)(k\Delta t)}$$

Annahme: N Zeitpunkte

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi f_n t}$$

$$s(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi (n\Delta f)(k\Delta t)}$$

$$= \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi nk(\Delta t/T)}$$

Annahme: N Zeitpunkte

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi f_n t}$$

$$s(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi(n\Delta f)(k\Delta t)}$$

$$= \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi nk(\Delta t/T)}$$

$$\boxed{= \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi nk/N}}$$

DFT

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i\frac{2\pi n k}{M}} \qquad n = 1, \ldots, N$$

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i\frac{2\pi nk}{M}} \qquad n = 1, \ldots, N$$

da $$c_{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{+i\frac{2\pi nk}{M}} = c_n^* \qquad (s(t_k) = s^*(t_k))$$

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\frac{2\pi nk}{M}} \qquad n = 1,\ldots,N$$

da $$c_{-n} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{+i\frac{2\pi nk}{M}} = c_n^* \qquad (s(t_k) = s^*(t_k))$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{|c_{-n}| = \sqrt{c_{-n}c_{-n}^*} = \sqrt{c_n^* c_n} = |c_n|}$$

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\frac{2\pi nk}{M}} \qquad n = 1,\dots,N$$

da $$c_{-n} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{+i\frac{2\pi nk}{M}} = c_n^* \qquad (s(t_k) = s^*(t_k))$$

$$\longrightarrow \boxed{|c_{-n}| = \sqrt{c_{-n}c_{-n}^*} = \sqrt{c_n^* c_n} = |c_n|}$$

da $$c_n = a_n + ib_n \;\rightarrow \boxed{a_{-n} = a_n \;,\; b_{-n} = -ib_n}$$

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i\frac{2\pi n k}{M}} \qquad n = 1, \ldots, N$$

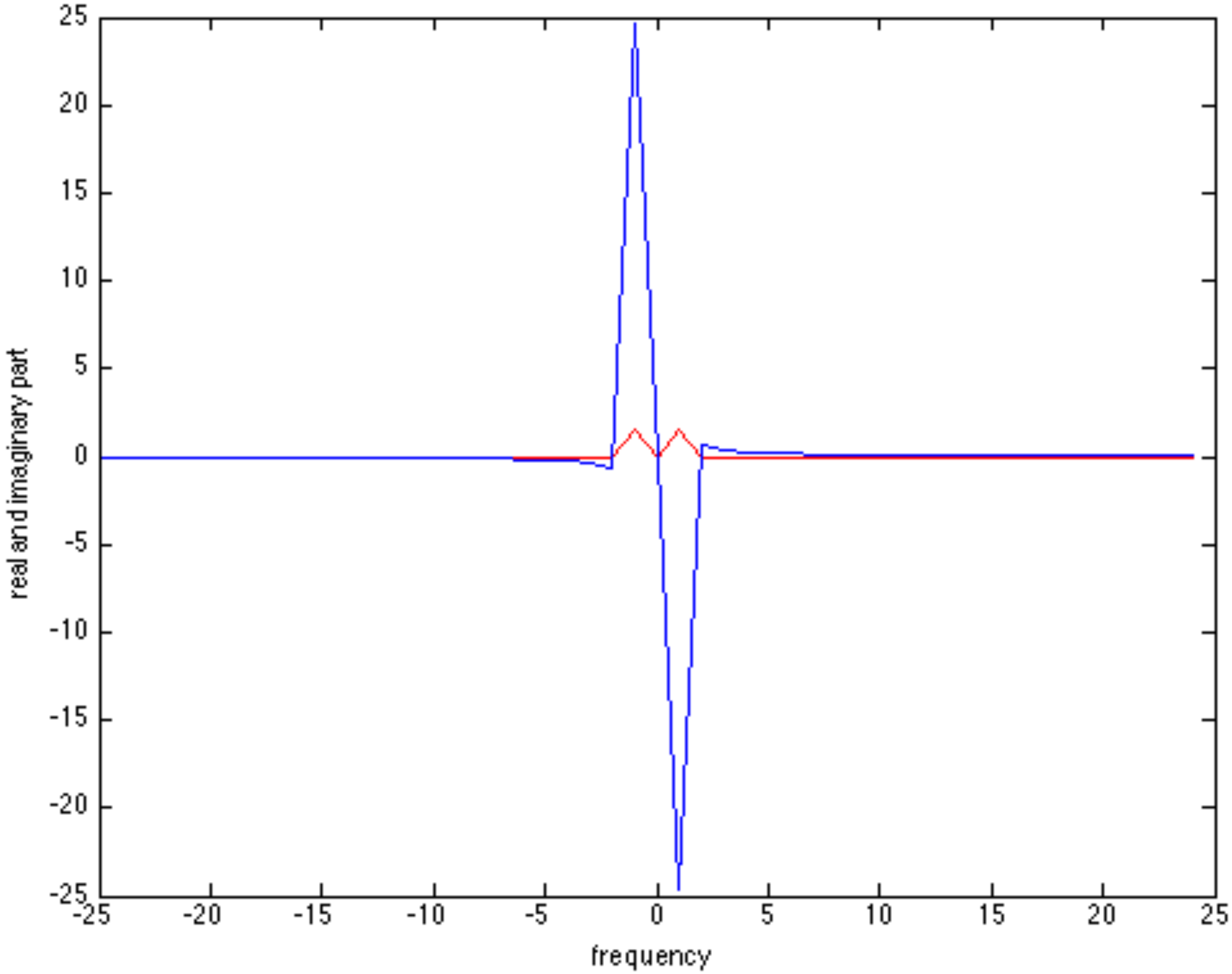
da $$c_{-n} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{+i\frac{2\pi n k}{M}} = c_n^* \qquad (s(t_k) = s^*(t_k))$$

$$\longrightarrow \boxed{|c_{-n}| = \sqrt{c_{-n}c_{-n}^*} = \sqrt{c_n^* c_n} = |c_n|}$$

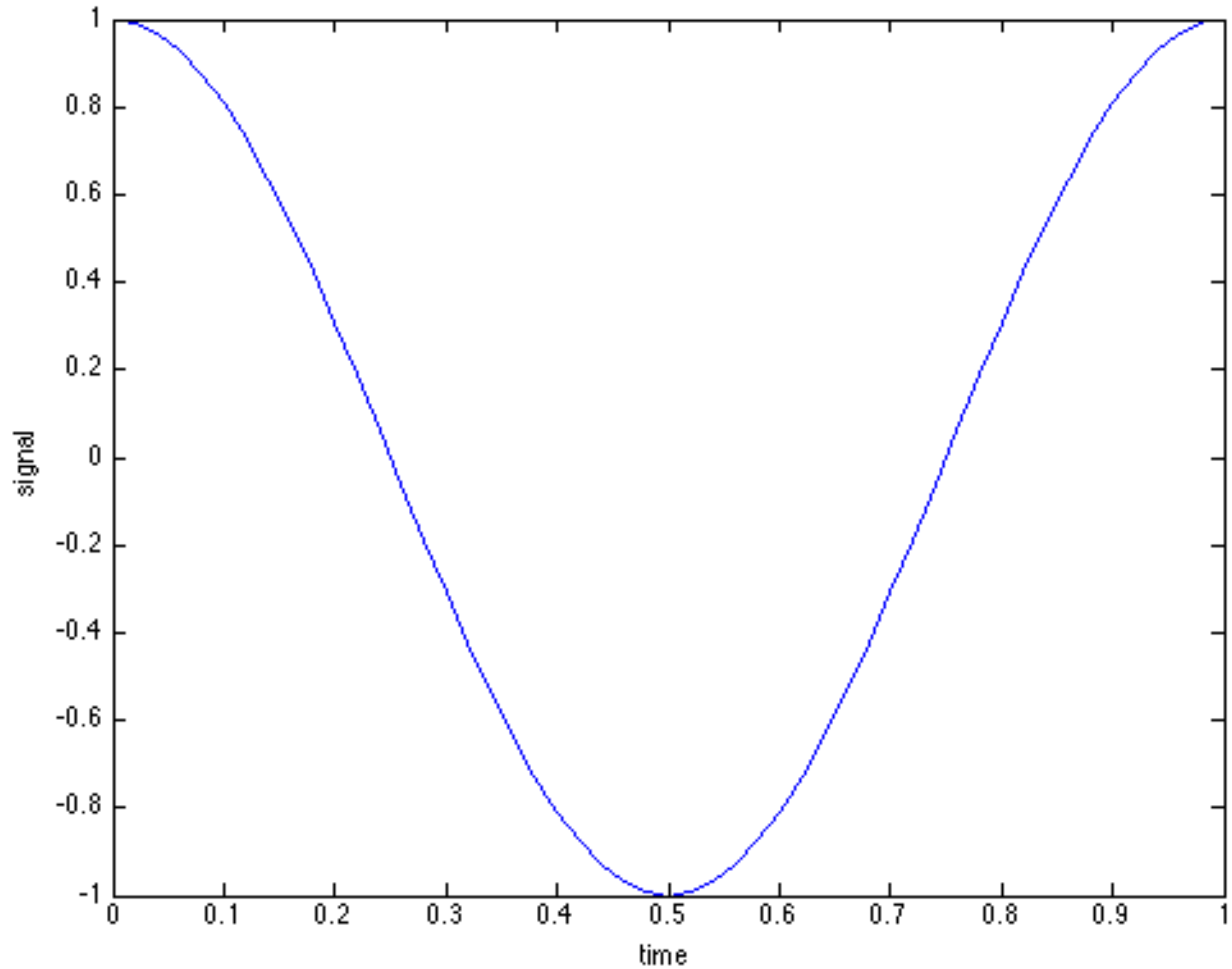
da $$c_n = a_n + ib_n \;\rightarrow\; \boxed{a_{-n} = a_n \;,\; b_{-n} = -ib_n}$$

$$\tan(\phi_n) = \frac{b_n}{a_n} \;\rightarrow\; \boxed{\phi_{-n} = -\phi_n}$$

$\mathrm{Real}(\mathrm{DFT}_n) = \mathrm{Real}(\mathrm{DFT}_{-n})$ $\mathrm{Imag}(\mathrm{DFT}_n) = -\mathrm{Imag}(\mathrm{DFT}_{-n})$



Beispiel



$$s(t) = 1.0 \cdot \cos(2\pi \cdot 1Hz \cdot t)$$

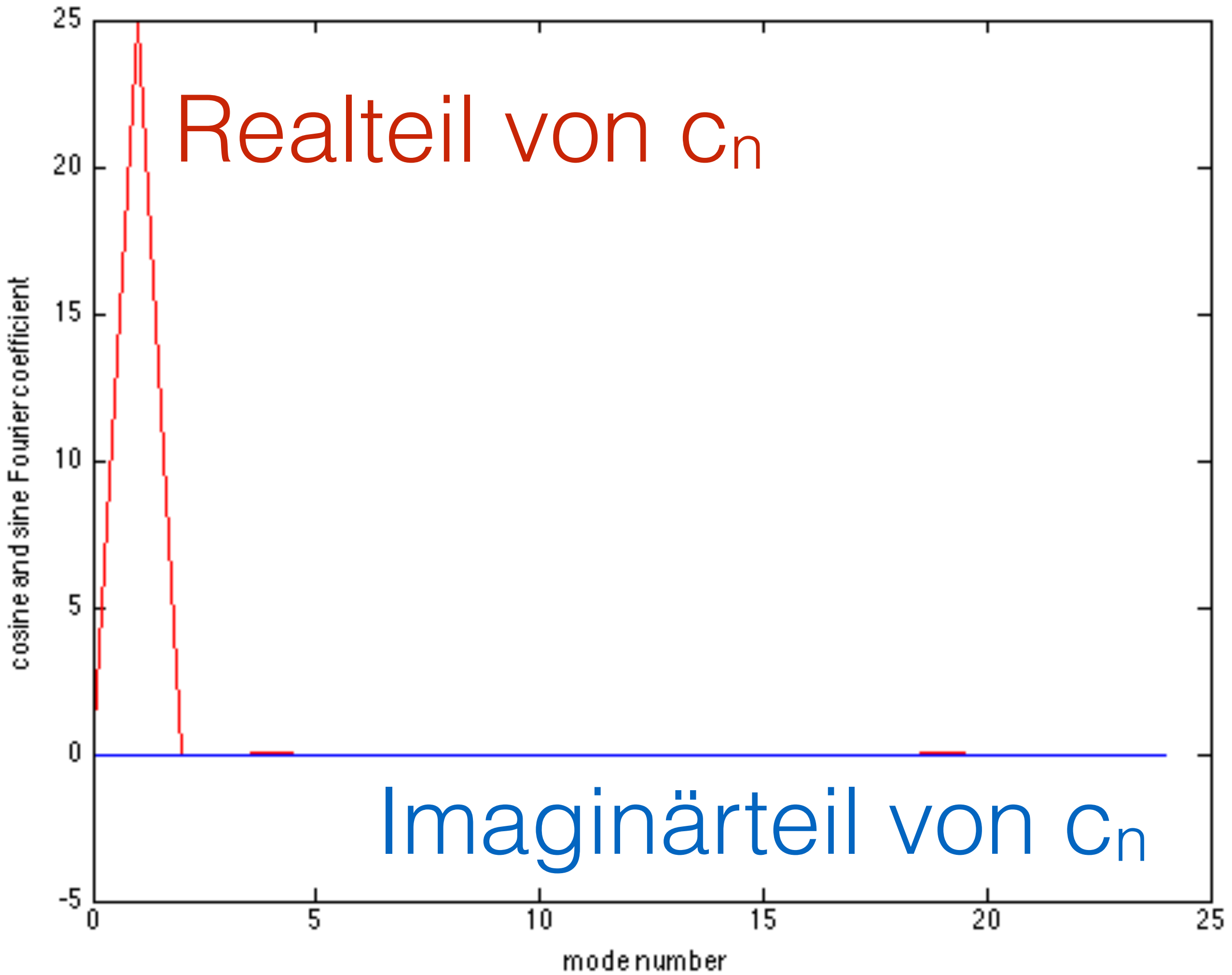
$\longrightarrow$ $a_1 = 1.0, a_{n\neq 1} = 0$

T=1s, N=50, Δt=0.02s

$\longrightarrow$ sample rate: 50Hz

$\longrightarrow$ Nyquist rate: 25Hz

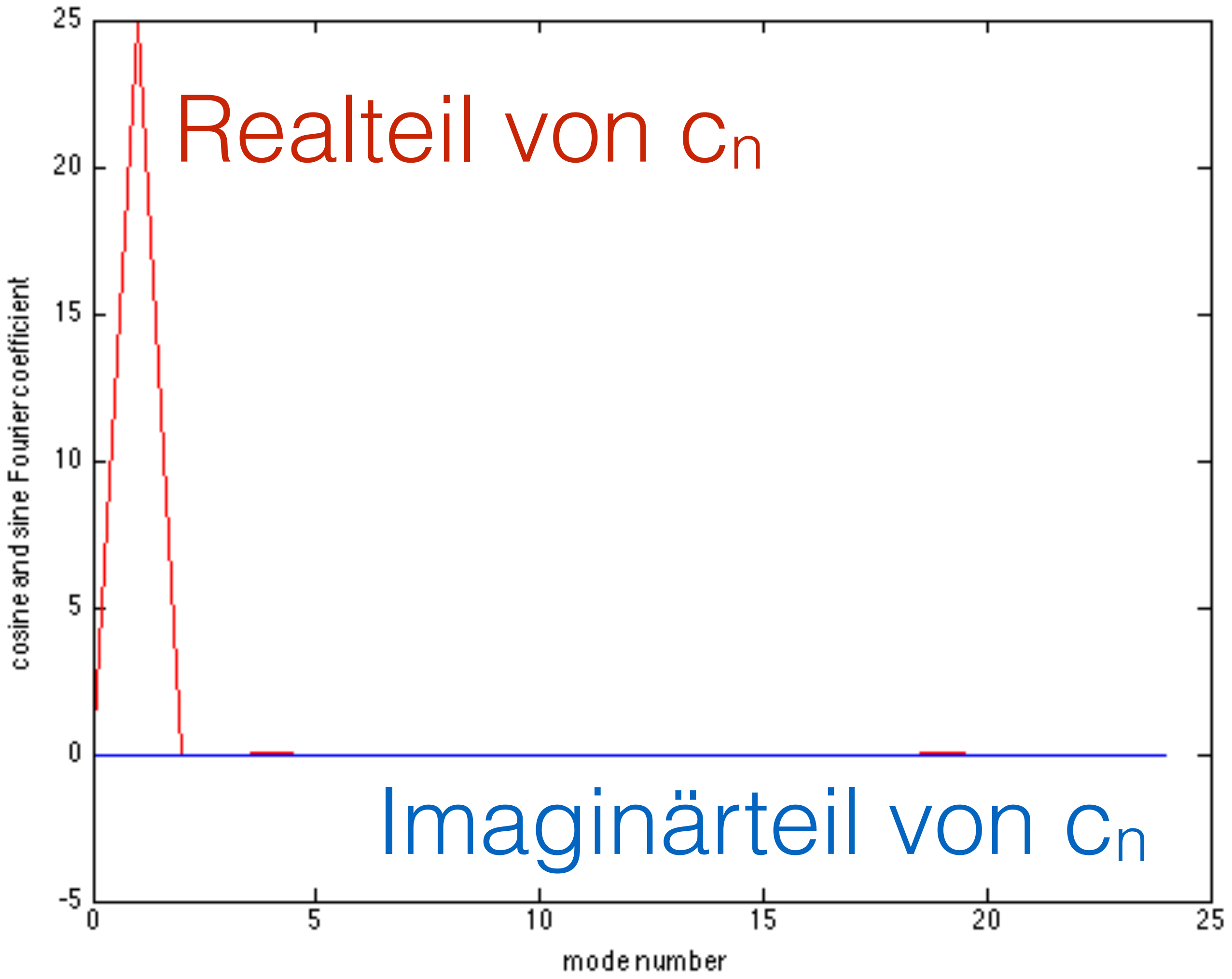
(Fourier_0.m)



$$\frac{a_n}{2} = \frac{Real(DFT_n)}{N}$$

$$\longrightarrow a_n = 2\frac{Real(DFT_n)}{N}$$

$$c_1 = 25/50 \rightarrow a_1 = 1.0$$ ✅



$$\frac{a_n}{2} = \frac{Real(DFT_n)}{N}$$

$$\longrightarrow a_n = 2\frac{Real(DFT_n)}{N}$$

$$c_1 = 25/50 \rightarrow a_1 = 1.0$$ ✅

maximal 25 Fouriermoden wegen Abtasttheorem