

3. Übung der Vorlesung *Spektralanalyse physiologischer Signale*

Wintersemester 2016/2017, Universität Frankfurt am Main

Dozent: PD Axel Hutt (axel.hutt@dwd.de)

abzugeben bis 10. November 2016, auf Papier oder per email

1. Betrachten Sie ein zeitlich kontinuierliches Signal $x(t) = \sin(6\pi t)$ der Dauer $T=5\text{s}$.
 - (a) Geben Sie den analytischen Ausdruck für dessen Fouriertransformierte an. Bei welchen Frequenzen hat die Fouriertransformierte Nullstellen ?
 - (b) Wie verändert sich die Transformierte, wenn man die Dauer zu $T=1\text{s}$ und $T=0.333\text{s}$ wählt ?
2. Nehmen Sie das Modellsignal *TransienteOszillationen.dat* (liegt auf der Vorlesungshomepage), das in der Vorlesung vorgestellt wurde. Berechnen Sie numerisch den Real- und Imaginärteil der Fouriertransformierte. Wie gross ist der *spectral leakage*-Effekt ?
3. Das **Wiener-Khinchin Theorem** stellt eine Beziehung zwischen der Autokorrelationsfunktion $C(\tau)$ und der *power spectral density* (PSD) her. Wir zeigen dies im Folgenden.
Für ein *im weiteren Sinn stationäres* Signal $x(t) \in \mathcal{R}$ in einem Zeitintervall $t \in [-T/2; T/2]$ der Länge T gilt $C(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$ mit der Zeitverschiebung τ . Hier ist $E[\cdot]$ der Erwartungswert. Nach Definition ist die Energiedichte des Signals gegeben als $\rho(\nu) = E[X_T^*(\nu)X_T(\nu)]$ mit Frequenz ν , wobei

$$X_T(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

die Fouriertransformierte von $x(t)$ ist.

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\rho(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} E[x(t)x(s)] e^{-i2\pi(t-s)\nu} dt ds .$$

- (b) Zeigen Sie weiterhin, dass mittels der Koordinatentransformation $\tau = s - t$, $\eta = s + t$ in die Koordinaten τ, η

$$\rho(\nu) = T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) C(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

- (c) Nun ist PSD definiert als Leistungsdichte, d.h. man kann definieren

$$S_T(\nu) = \frac{\rho(\nu)}{T} = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) C(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

Leiten Sie hieraus die bekannte Beziehung zwischen Autokorrelationsfunktion und PSD $S(\nu)$ für unendlich lange Signale ab, i.e. $T \rightarrow \infty$. Zeigen Sie ausserdem, wie sich aus einer gegebenen Funktion $S(\nu)$ die Autokorrelationsfunktion berechnen lassen kann und dass $C(0)$ der statistischen Varianz σ^2 und der Gesamtleistung des Signals gleich ist.

- (d) Für unendlich lange Signale gemessen in ergodischen Systemen gilt nun zusätzlich

$$C(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt. \quad (1)$$

Leiten Sie diese Beziehung ab. Zeigen Sie, wie sich hieraus direkt die *Parseval-Identität*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu$$

ergibt.