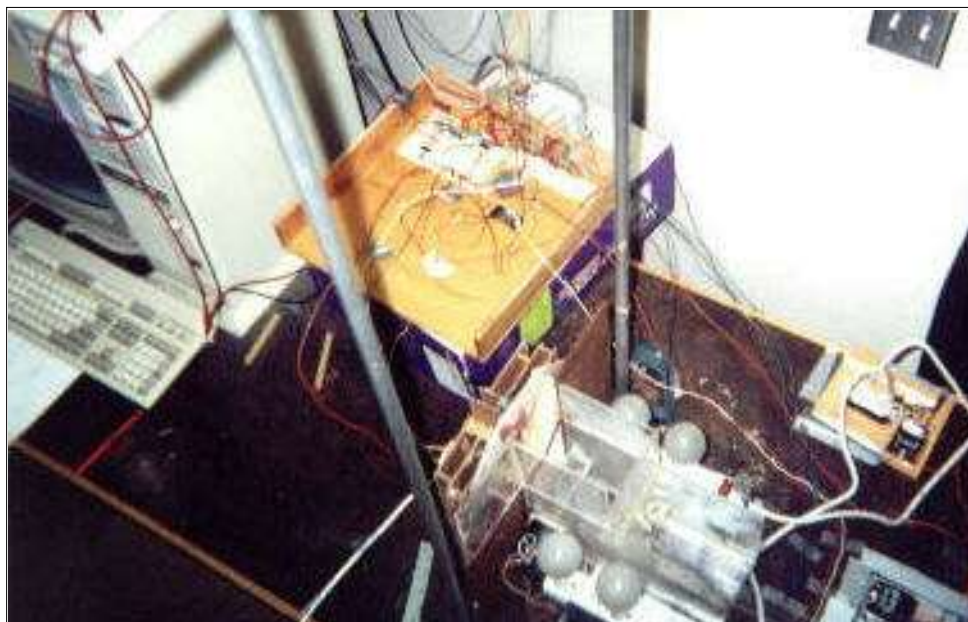


WUERFELPHYSIK

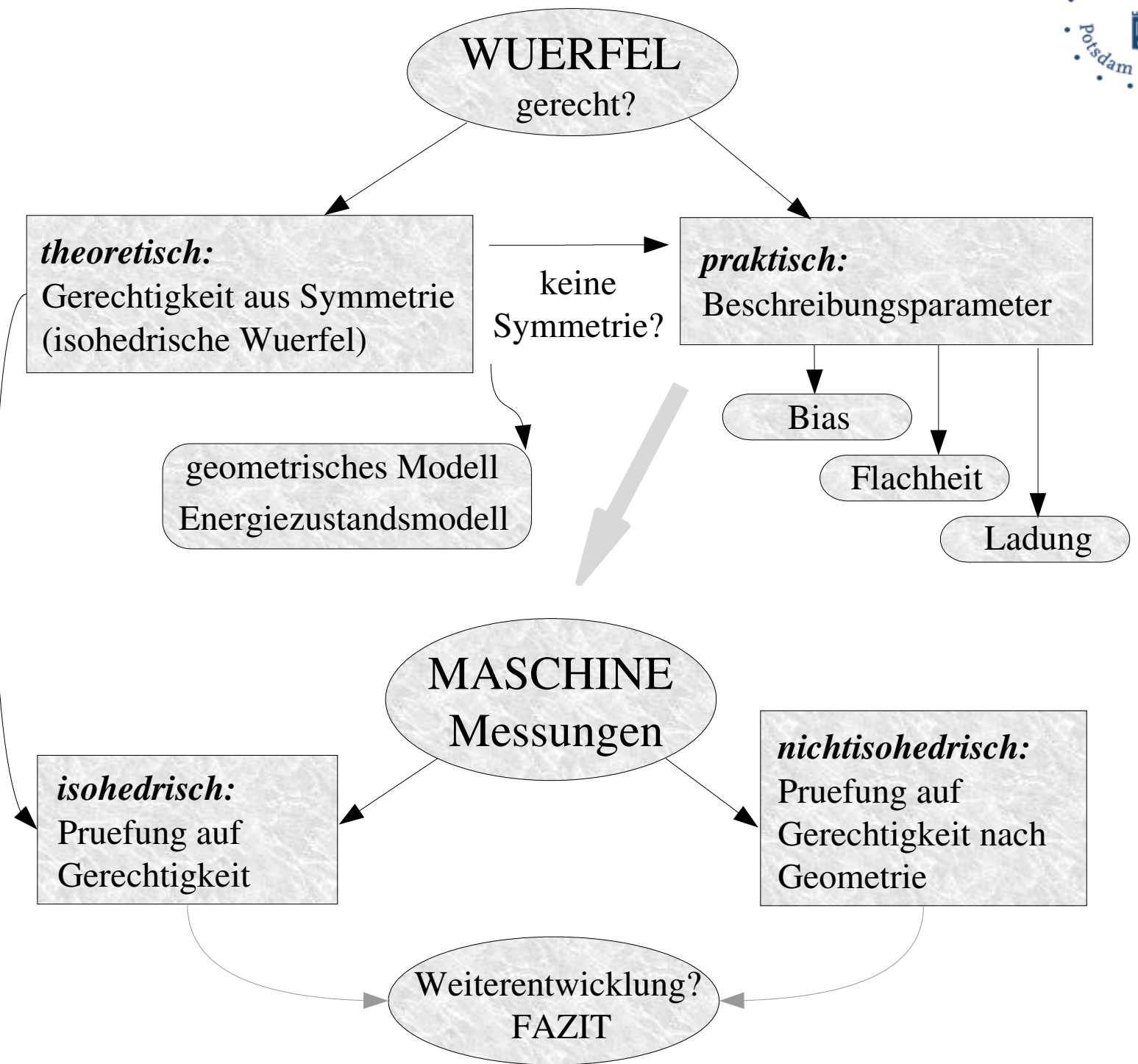


Antonio Recuenco-Munoz

Experimentalphysik-Seminar

2. Mai 2006

WUERFELPHYSIK



WUERFEL

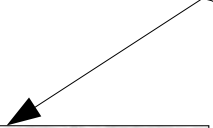
gerecht?

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL



WUERFEL
gerecht?



theoretisch:
Gerechtigkeit aus Symmetrie
(isohedrische Wuerfel)



WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

ISOHEDRISCHE WUERFEL

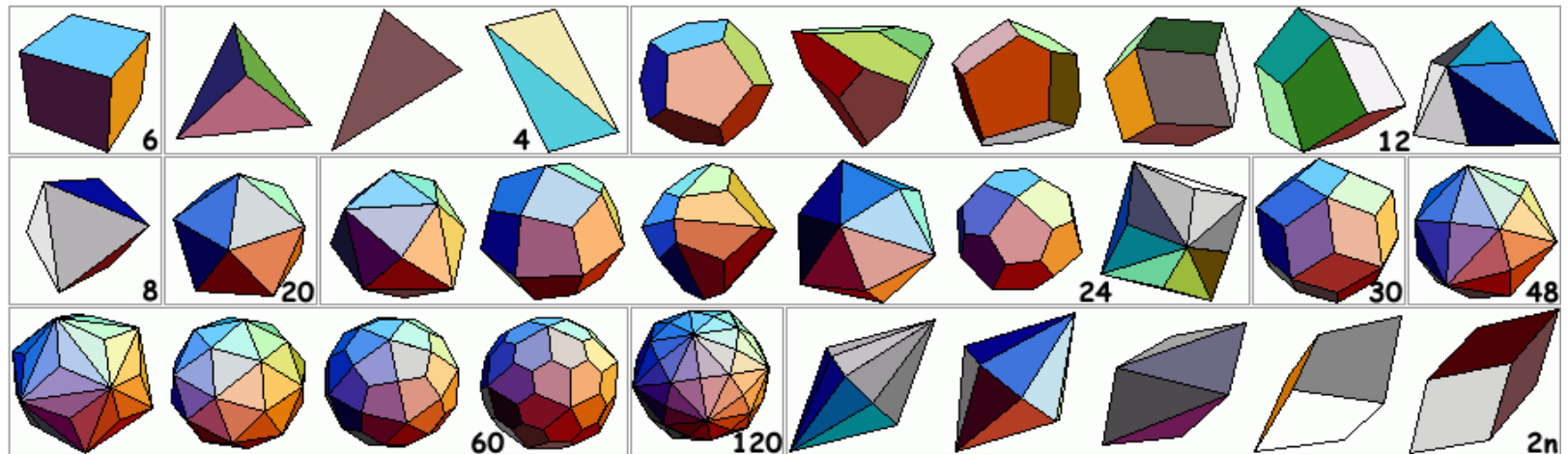
WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

- Jede Seite des Wuerfels kann auf alle anderen Seiten durch Rotationen und/oder Spiegelungen abgebildet werden



Aus PEGG (1997): A Complete List of Fair Dice.

University of Colorado (Master's Thesis)

- Isohedrische Wuerfel sind **gerecht**: die Wahrscheinlichkeit, der Wuerfel liege auf der Seite n , ist fuer alle Seiten gleich
- Vollstaendigkeitsbeweis moeglich mittels Gruppentheorie (Ausgang: Gerechtigkeit der platonischen Polyhedren)

NICHTISOHEDRISCHE WUERFEL

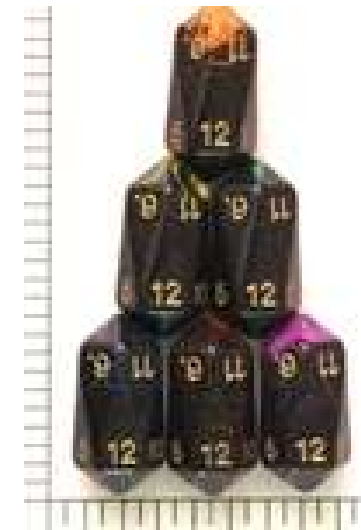
WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch



- Keine aus Symmetrien folgende Gerechtigkeit
- Ergebnis durch aeussere Bedingungen beim Werfen einfach zu beeinflussen; schwere Reproduzierbarkeit
 - ✦ wie kann man das in einer quantitativen Analyse beruecksichtigen?
 - ✦ kann man die Gerechtigkeit nichtisohedrischer Wuerfel pruefen?

WUERFEL
gerecht?

theoretisch:
Gerechtigkeit aus Symmetrie
(isohedrische Wuerfel)

keine
Symmetrie?

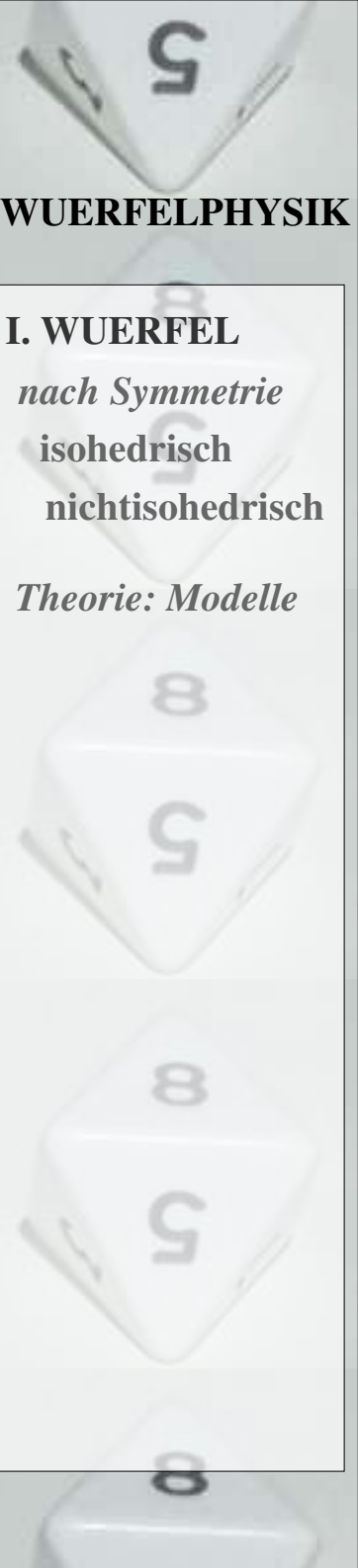
geometrisches Modell
Energiezustandsmodell

WUERFELPHYSIK

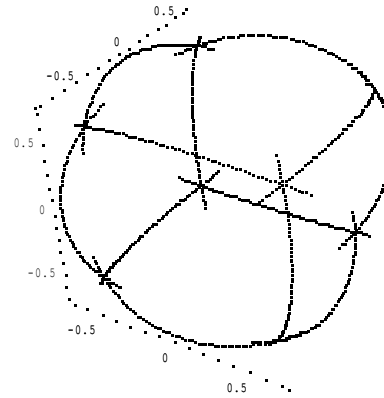
I. WUERFEL

nach Symmetrie
isohedrisch
nichtisohedrisch

Theorie: Modelle



GEOMETRISCHES MODELL



Aus PEGG (1997)

- Die Wahrscheinlichkeit, auf einer Seite zu liegen, haengt von dem von der Seite eingenommenen Raumwinkel ab
- Nachteile
 - Die Dynamik des Vorgangs (Reibung, Stosszahl...) wird nicht beruecksichtigt
 - Nicht gueltig fuer Wuerfel mit *instabilen Seiten* (= Basis, die Projektion des Schwerpunkts auf dem „Boden“ nicht davon eingeschlossen)
- Geometrisches Modell dennoch als grobe Naeherung nuetzlich; weiterhin fuehrt nach Betrachtung der Wurfdynamik zum *Energiezustandsmodell*

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

ENERGIEZUSTANDSMODELL

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

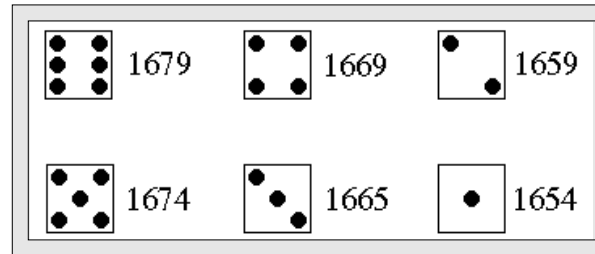
isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand



*Ergebnisse eines kubischen Wuerfels mit hohlen Punkten
nach 10000 Wuerfen (aus PEGG, 1997)*

- Basiert auf Markov-Ketten:
 - Anfangszustand eines Wuerfels = Vektor
(berechnet nach dem geometrischen Modell)
 - n-ter Sprung des Wuerfels = Matrix A_N
nach Beruecksichtigung der Systemdynamik
 - a_{ij} = Wahrscheinlichkeit, der Einfluss der Seite i
bewege sich auf Seite j

Nachteil

- Dissipatives System $\Rightarrow A_N$ verschieden, aufwendig!
insbesondere $A_N \Rightarrow I$

WUERFEL
gerecht?

theoretisch:
Gerechtigkeit aus Symmetrie
(isohedrische Wuerfel)

keine
Symmetrie?

praktisch:
Beschreibungsparameter

Bias

Flachheit

Ladung

geometrisches Modell
Energiezustandsmodell

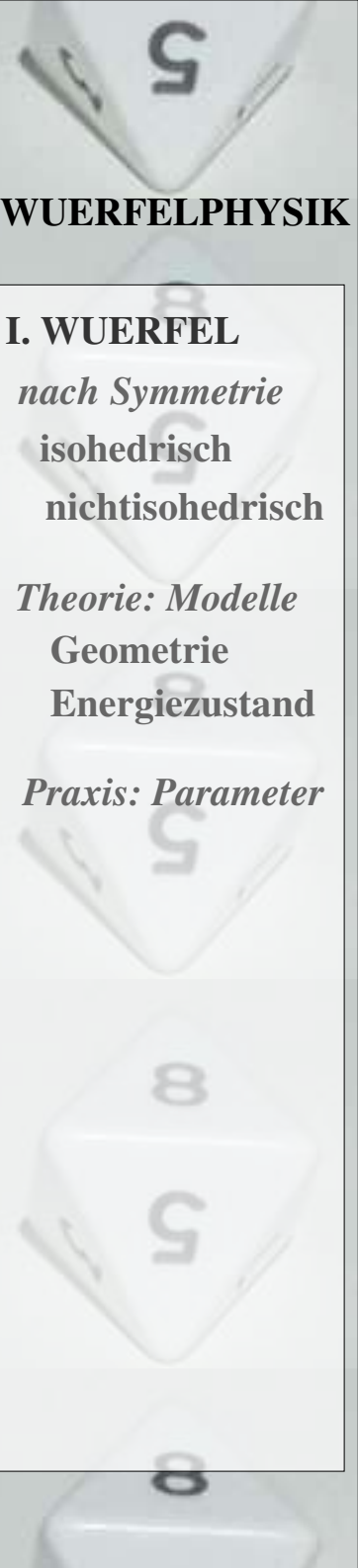
WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie
isohedrisch
nichtisohedrisch

Theorie: Modelle
Geometrie
Energiezustand

Praxis: Parameter



BESCHREIBUNGSPARAMETER

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

BIAS:

Seiten: $j = 1, 2, \dots, n$

Wahrscheinlichkeit: $p(j)$

↘ Bias der Seite j :

$$b(j) = n * p(j) - 1 \quad (n \text{ Wuerfe, davon } n/2=6 \Rightarrow b(6)=2)$$

FLACHHEIT [*kubischer Wuerfel*]:

Abstaende: $d1:6, d2:5, d3:4$

"1-6-flats": $d1:6 < d2:5 = d3:4$

↘ Flachheit:

$$f1:6 = (d2:5 + d3:4 - 2 * d1:6) \quad (18 * 20 * 20 \Rightarrow f1:6 = 0.1)$$

LADUNG [*Seiten kubischer Wuerfel*]:

Schwerpunktslage bezueglich Seite j : $CM(j)$

(Schwerpunkt im geom. Zentrum: $CM(j) = 0$)

Laenge aller 3 Seiten: d

↘ Ladung auf Seite j :

$$L(j) = 2 * CM(j) / d = 0 \text{ (gerecht) bis } 1 \text{ (Schwerpunkt auf } j)$$

WUERFELPHYSIK

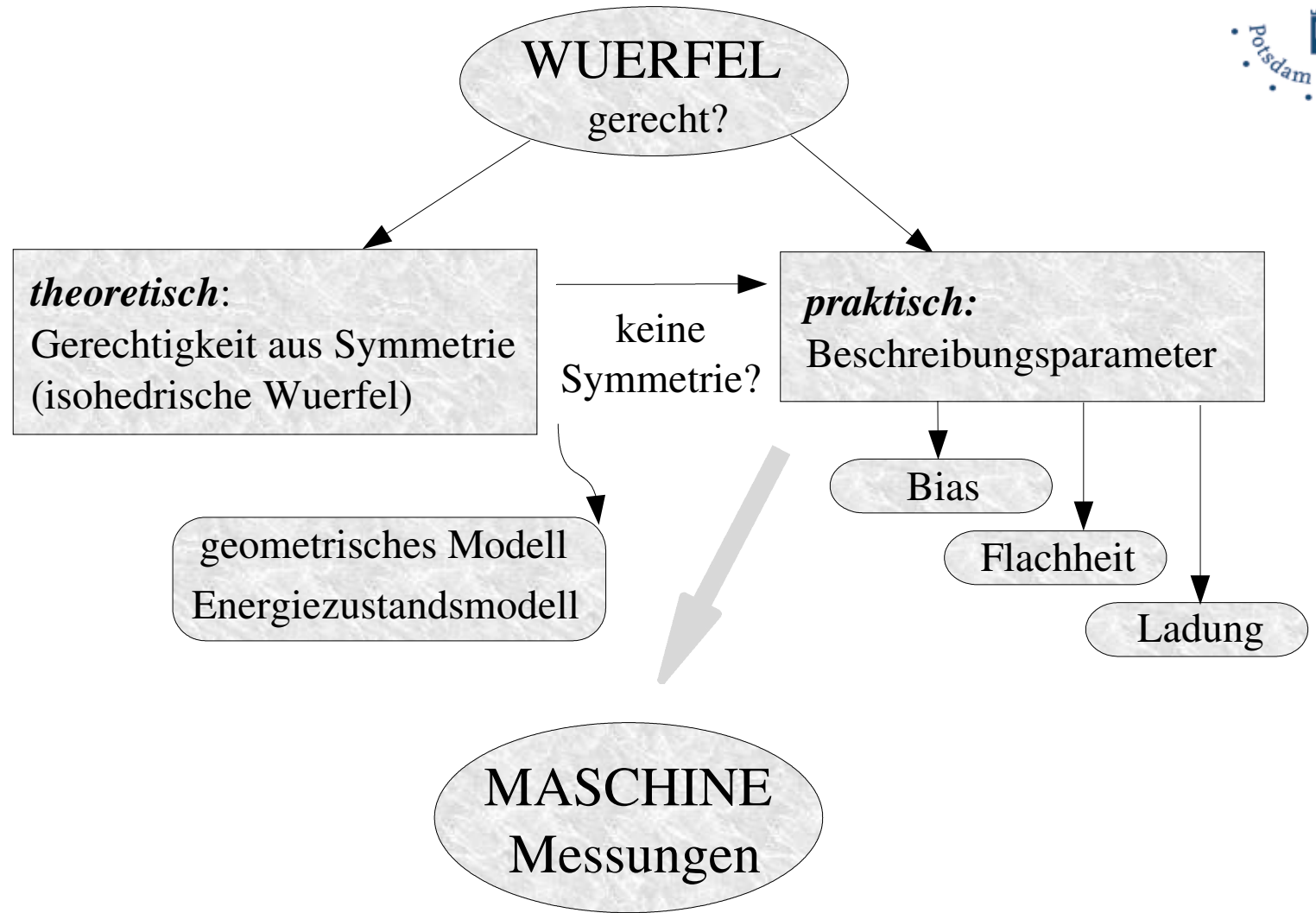
I. WUERFEL

nach Symmetrie
isohedrisch
nichtisohedrisch

Theorie: Modelle
Geometrie
Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN



WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

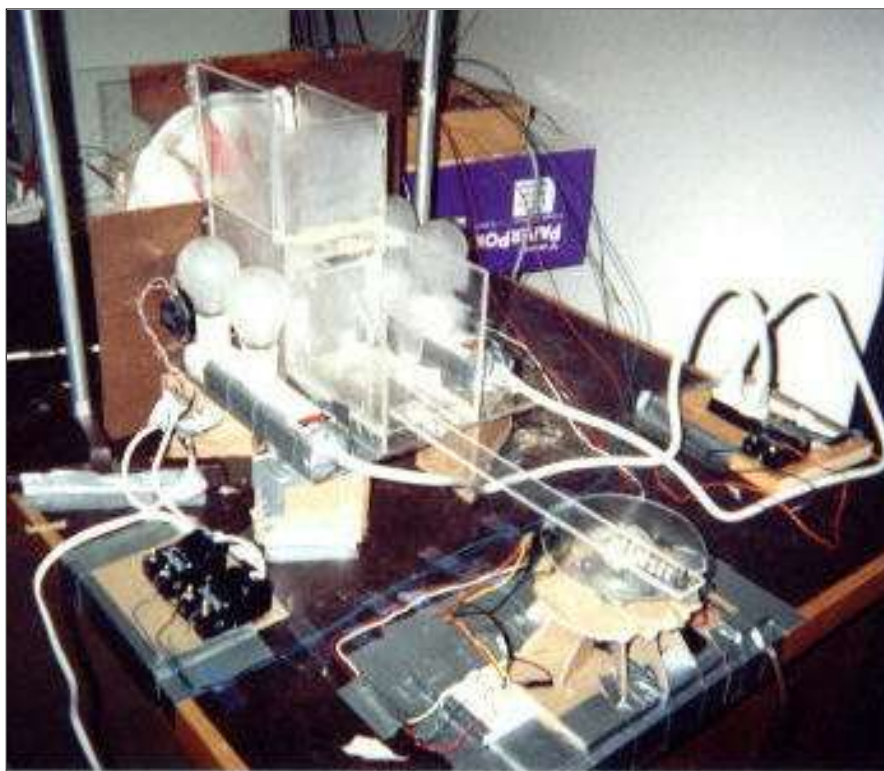
Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine

DIE MASCHINE



*(Dr. Daniel Murray, University of British Columbia
Baujahr: 2001)*

Jeder Wurf nimmt 2.5 s (1 Tag = 34560 Wuerfe!)

SWEEPER

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

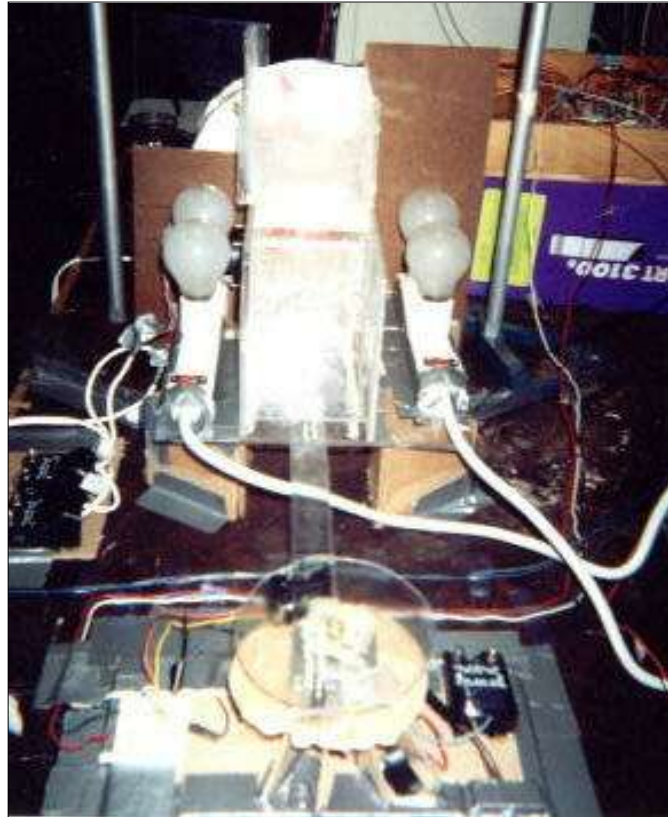
Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine



Motor (72 rpm) treibt den
Wuerfel vom Tisch zum Rad:

- Computersignal schaltet 120 V ein
 - kleines Licht + Phototransistor (PT)
 - ✦ PT nach 1 Zyklus blockiert
 - Spannung aus PT wird abgelesen
 - Motor wird ggf. ausgeschaltet
-
- Sicherheitstuer (Wuerfe sollen nicht zum Schleuderrad zurueckfallen!)
 - 2 Schaltungen links: Kontroll eines Motors, der die 6 cm x 10 cm Tuer zu- (vor Wurf) und aufmacht (vor Wuerfelabfegen)

WUERFELPHYSIK

SCHLEUDERRAD

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

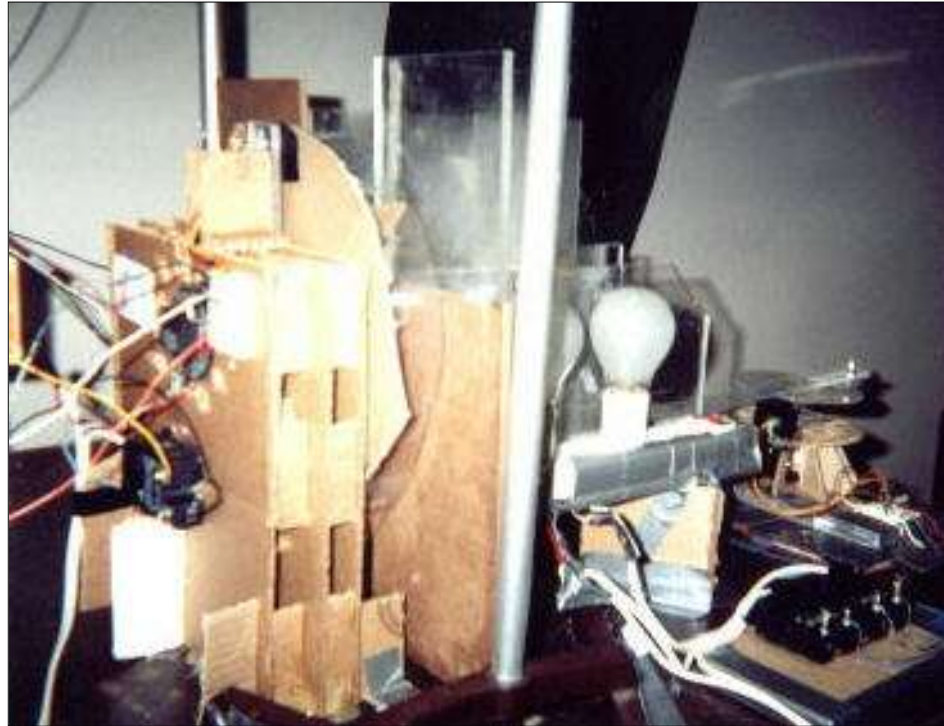
Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine



Rad aus Plastik
(26.5 cm x 3.5 cm),
zu einem Motor verbunden

- Einschalten des Rads durch Computersignal
- Sweeper treibt Wuerfel ins Schleuderrad
- Aufwaertsrollen bis zum hoechsten Punkt des Rads
- Motor haelt, Wuerfel faellt auf Trog und rollt ins Beobachtungsplaettchen

KAMERA

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

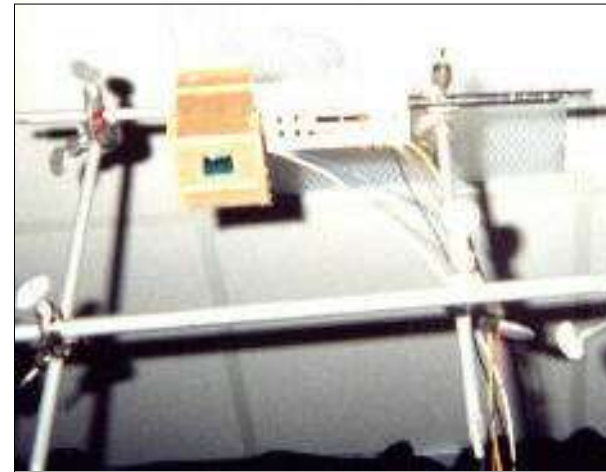
Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine



- Wuerfel faellt auf Plexiglastisch
(10 cm x 10 cm aus 30x30)
- CCD-Kamera nimmt Bild auf
Lichtquelle: 4 Gluehbirnen (100 W)
- Bild wird zum Rechner uebertragen
- Punktzahl wird aufgenommen

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

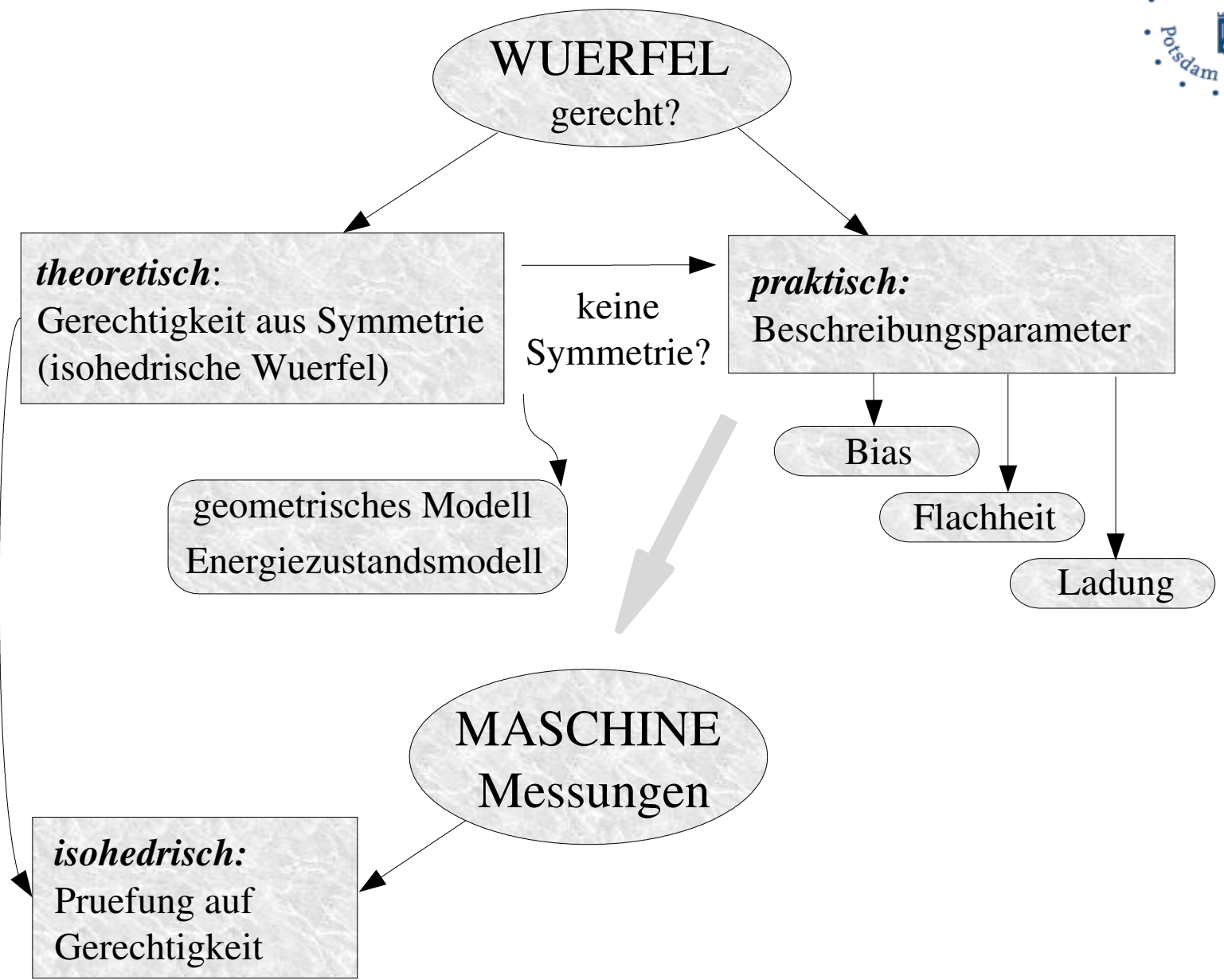
nach Symmetrie
isohedrisch
nichtisohedrisch

Theorie: Modelle
Geometrie
Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine
Wuerfelversuche



WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

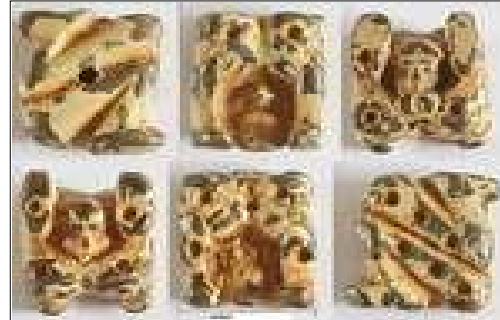
II. MESSUNGEN

Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

ISOHEDRISCH: VERSUCHE MIT KUBISCHEN WUERFELN



EHEM?

ANNAHME

- Wuerfe kraeftig genug, damit ihre detaillierte Dynamik (Reibung, Drehimpuls, Traegheitsmoment...) moeglichst kleine Wirkung auf die Gerechtigkeit des Wuerfels ausuebt
- Gegenbeispiel: Wuerfel wird in einer Fluessigkeit geworfen
 - ↳ sehr hohe Reibung -merke Ladung!-
 Fuer viskoese Medien werden Masse und Stosszahl bedeutungslos (Raumwinkel?)

ERGEBNISSE:

Würfeln aus Nevada-Casinos:

Gleiche Seitenlängen bis auf 0.01 mm (Mikrometer)

Nach 8 Stunden Betrieb entsorgt



- kein Bias nach 640934 Wuerfen auf Plexiglas
- alle 6 Seiten haben $p = 0.1667 \pm 0.001$

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

Wuerfel weniger Qualitaet:



- **0.10\$** aus Kelowna, Canada (21543 Wuerfe auf Wollenfilz):

1:2895

2:42214

3:3389

4:3347

5:4383

6:3315

- **Flache** Wuerfel \Rightarrow Bias proportionell zur Abweichung der kubischen Form:

Gestaucht (3% zw. Seiten 1 & 6), 36000 Wuerfe

1 & 6: 6% haeufiger als 1/6

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine

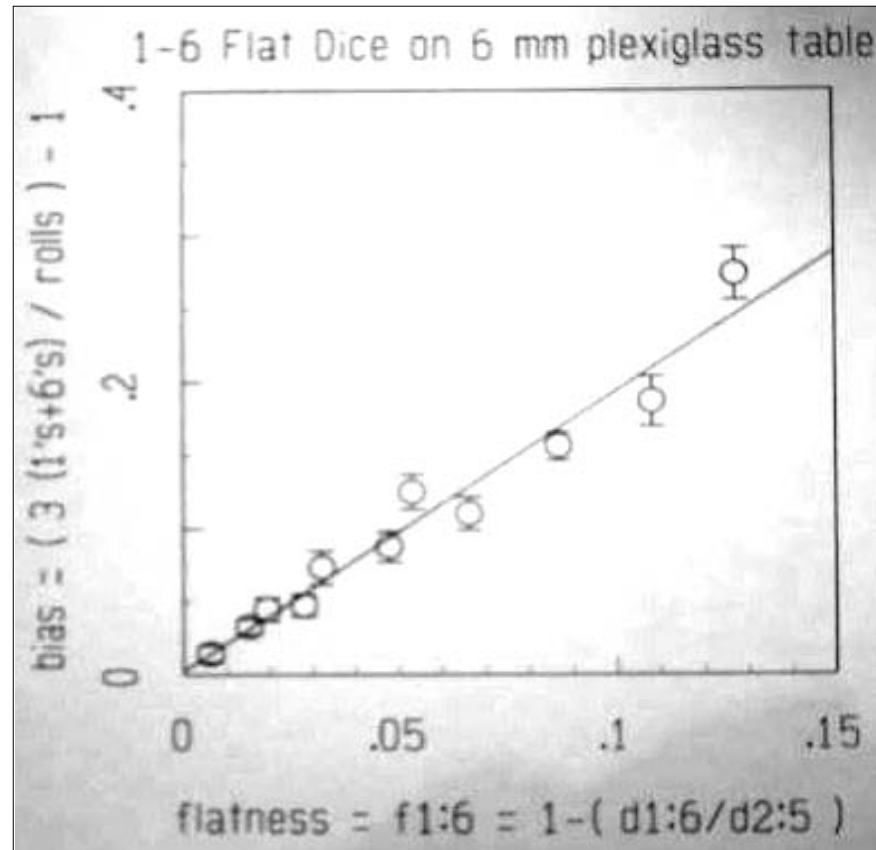
Wuerfelversuche

isohedrisch

PARAMETER-PLOTS

(siehe MURRAY & TEARE, 1993)

- Bias-Flachheit (Balken mit Standardabweichung)



*Casino – Wuerfel, 1:6-Seite wurde
allmaehlich ausgeschnitten*

- *alternativer Plot: Bias-Ladung*

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

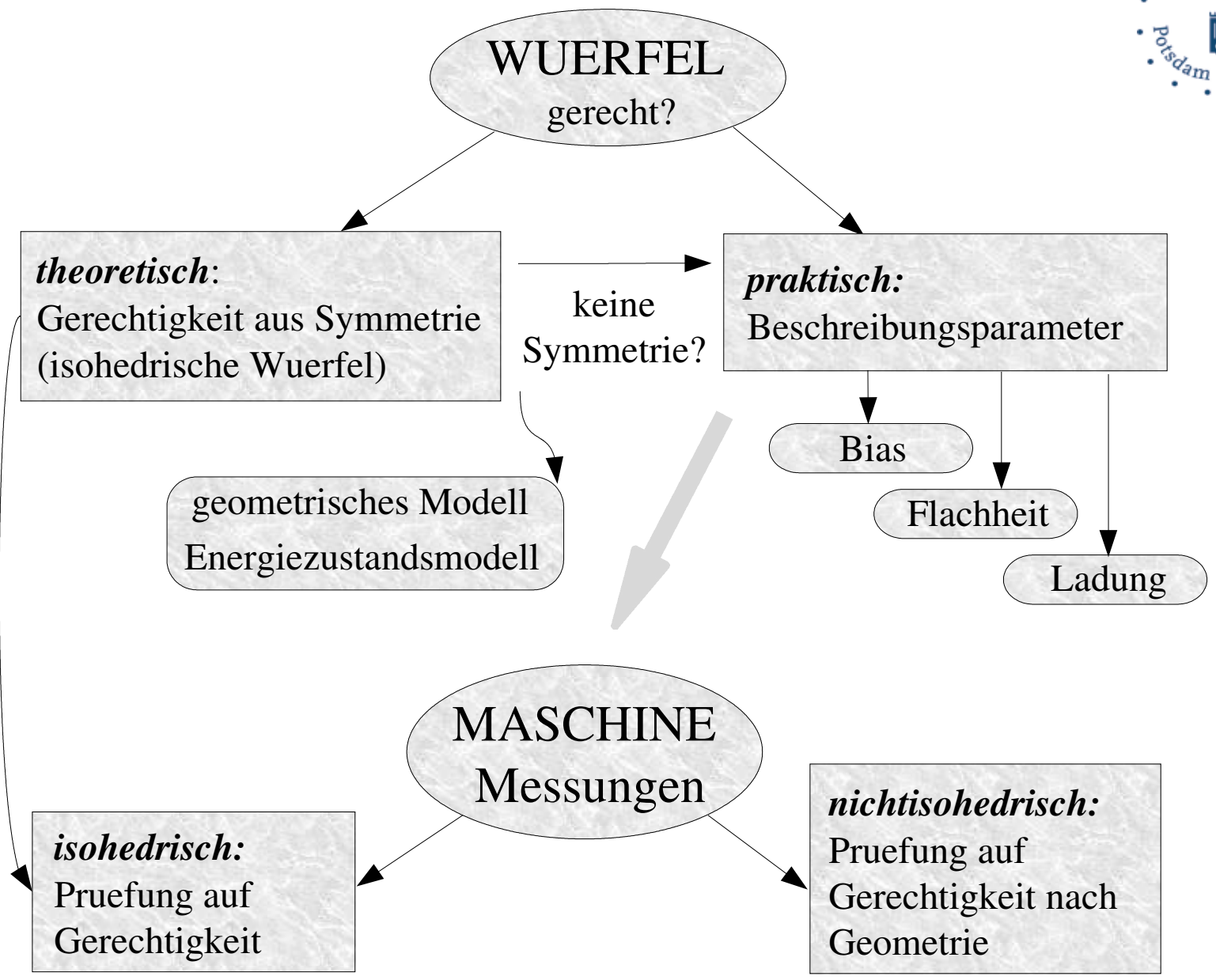
nach Symmetrie
isohedrisch
nichtisohedrisch

Theorie: Modelle
Geometrie
Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine
Wuerfelversuche
isohedrisch



NICHTISOHEDRISCH: VERSUCHE MIT ZYLINDRISCHEN WUERFELN



Naeherung:

- Muenze nichtvernachlaessigbarer Dicke

Herstellung:

- Nylon (19.1 mm Durchmesser, Laenge: 3.5-47 mm)

[alternativ auch:]

- Holz (nicht isotrop \Rightarrow Korn! Jedoch zeigten experimentelle Daten keine dramatische Veraenderung, und die Erstellung ist sauberer)
- Kunstschaum, Aluminium, Polystyren oder Zellstoffazetat (Material fuer Casinowuerfel)

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

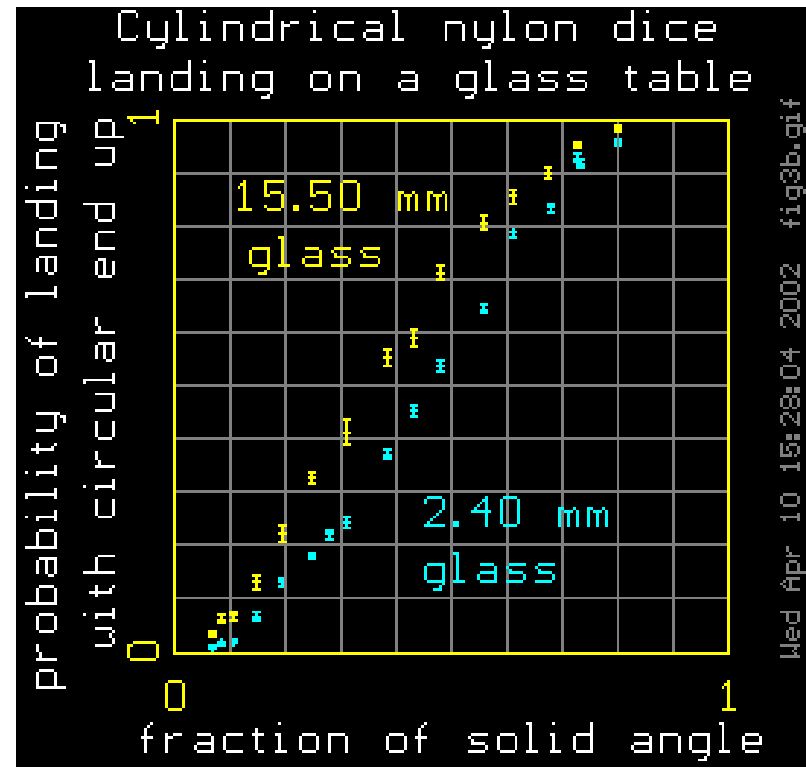
II. MESSUNGEN

Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

nichtisohedrisch



WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

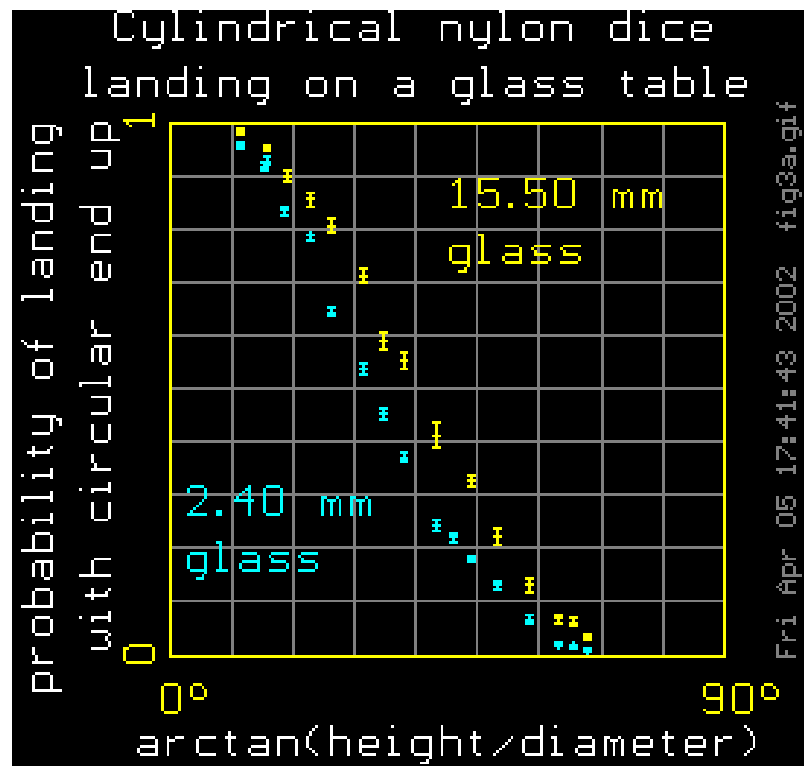
Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

nichtisohedrisch

- etwa 70000 Wuerfe auf abgegrenzte 10 cm x 10 cm-Glasflaeche (Dicke: 2.40 bzw 15.50 mm)
- *2.40 mm dicke Glasplatte:*
Landungswahrscheinlichkeiten von 12% fuer Basen und von 76% fuer die Seite
⇒ *15.50 mm dicke Glasplatte:*
Landungswahrscheinlichkeiten von 19%, 19% und 62%



WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

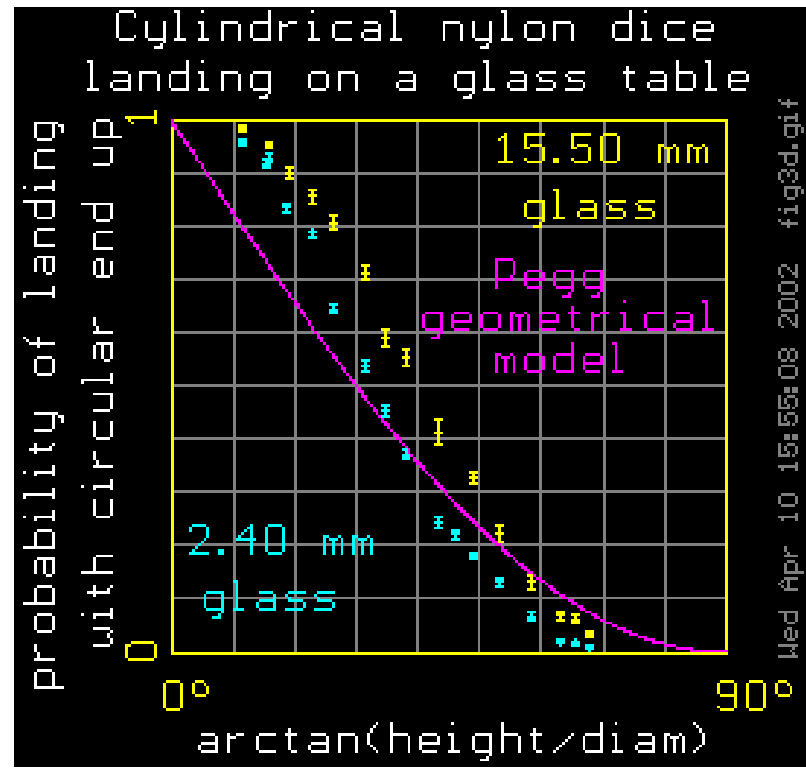
Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

nichtisohedrisch

- etwa 70000 Wuerfe auf abgegrenzte 10 cm x 10 cm-Glasflaeche (Dicke: 2.40 bzw 15.50 mm)
- *Plot nach Hoehe-Querschnitt-Verhaeltnis:*
Anschaulicher als nach Raumwinkelanteil



WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

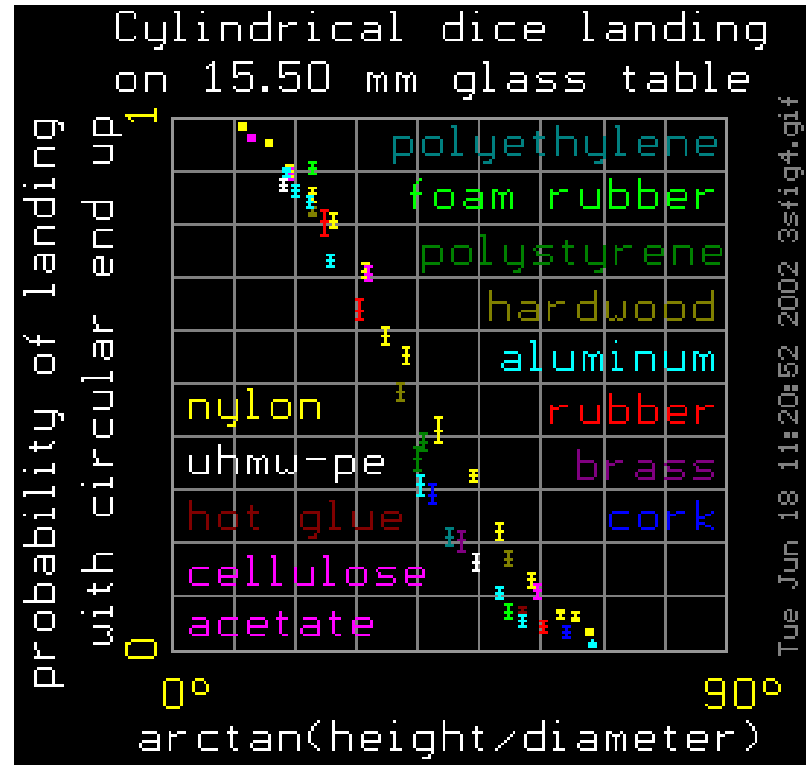
Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

nichtisohedrisch

- etwa 70000 Wuerfe auf abgegrenzte 10 cm x 10 cm-
-Glasflaeche (Dicke: 2.40 bzw 15.50 mm)
- *Plot nach Hoehe-Querschnitt-Verhaeltnis:*
Anschaulicher als nach Raumwinkelanteil
- Geometrisches Modell stimmt nicht ganz ueberein
(insbesondere bei sehr langen Wuerfeln)



WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

- nach Symmetrie*
- isohedrisch
- nichtisohedrisch
- Theorie: Modelle*
- Geometrie
- Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

- Die Maschine
- Wuerfelversuche
- isohedrisch
- nichtisohedrisch

- etwa 70000 Wuerfe auf abgegrenzte 10 cm x 10 cm-Glasflaeche (Dicke: 2.40 bzw 15.50 mm)
- *Plot nach Hoehe-Querschnitt-Verhaeltnis:*
Anschaulicher als nach Raumwinkelanteil
- Einfluss des Wuerfelmaterials deutlich -widerspiegelt an der Stosszahl!

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

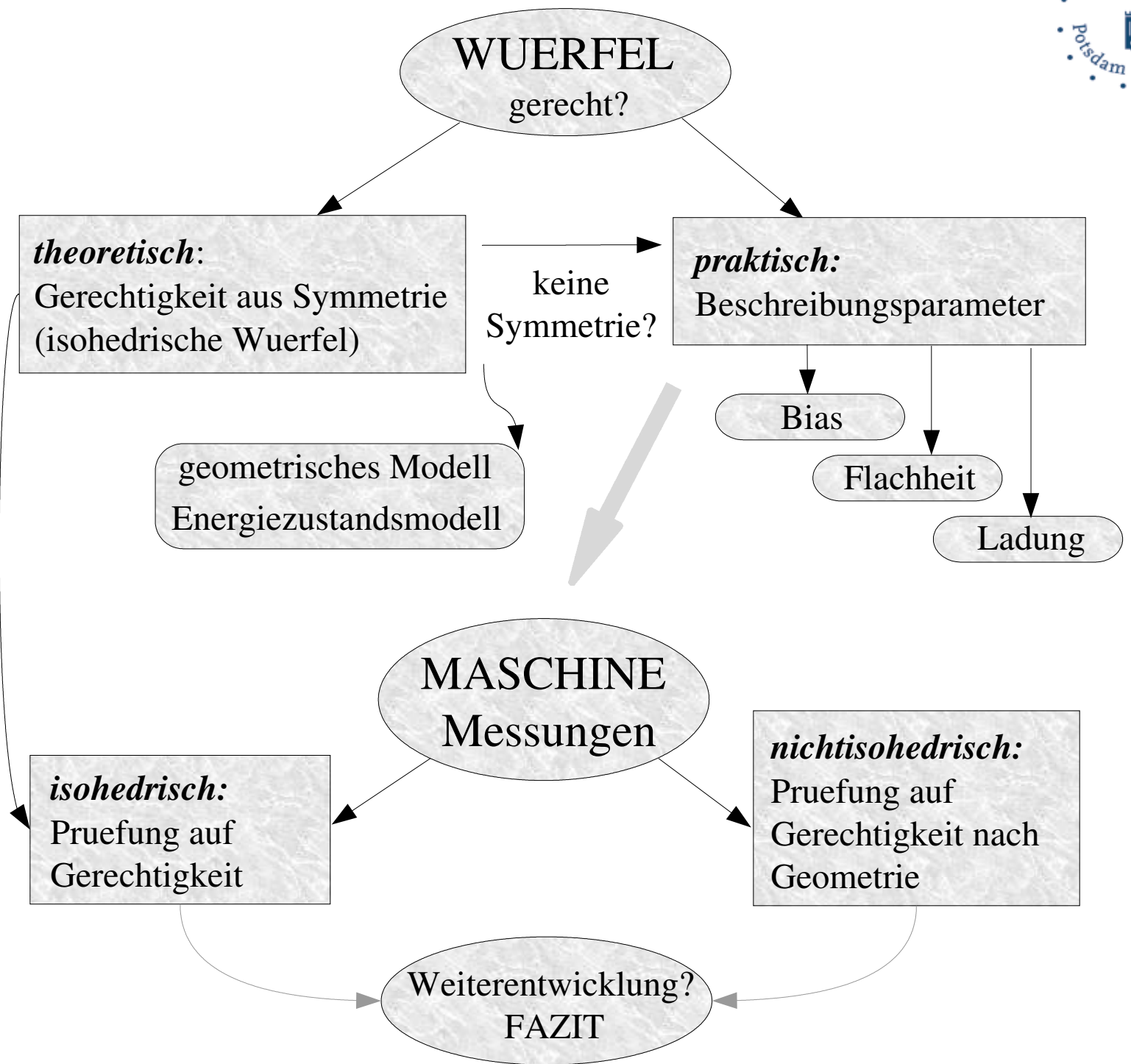
nach Symmetrie
 isohedrisch
 nichtisohedrisch

Theorie: Modelle
 Geometrie
 Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine
 Wuerfelversuche
 isohedrisch
 nichtisohedrisch



FAZIT / ERGEBNISSE

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

nichtisohedrisch

Fazit

- *Erwartete Ergebnisse fuer kubische Wuerfel*
(gerecht wenn Schwerpunkt in der Mitte, lineare Abhaengigkeit des Bias bei Abweichung von Kubizitaet)
- *Nichtisohedrische Wuerfel*
 - Moegliche Abhaengigkeiten fuer zylindrische Wuerfel je nach Geometrie/Laenge (Raumwinkelabhaengig?)
 - Geometrisches Modell stimmt fuer kleine Laengen
- *Noch offene Fragen*
 - Andere Wuerfel: Forschung a priori noch schwierig
 - Berechnung von Kurven aus Energiezustandsmodell und Vergleich mit experimentellen Daten

Bibliographie

WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

nichtisohedrisch

Fazit

Bibliographie

Zu den Versuchen:

LEVIN, Eugene M. (1983): Experiments with loaded dice.
American Journal of Physics, volume 51, pages 149-152

MURRAY, Daniel B. and TEARE, Scott W. (1993): Probability
of a tossed coin landing on edge. Physical Review E, volume
48, 1993, pages 2547-2552

CHRISTIE, Dean; GLASHEEN, Ryan; HAMILTON, Chris;
IMOTO, Masashiro; MATTHEWS, Philip; MOFFAT, James;
MONAJEMI, Thalat; MURRAY, Daniel B.; NELSON, John &
STURM, Arne (2001): Experimentally obtained statistics of dice
rolls. Poster at the 6th Experimental Chaos Conference,
July 22-26, 2001, Potsdam, Germany

Kontakt:

Dan Murray, Associate Professor
Department of Physics and Astronomy
University of British Columbia Okanagan
daniel.murray@ubc.ca

Zur Theorie:

PEGG Jr., Edward T. (1997): A Complete List of Fair Dice.
Master's Thesis

Einige populaerwissenschaftliche Artikeln:

PETERSON, Ivar: Fun and Games in Nevada.
MAA Online, 28.4.1997

" : Unfair Dice. MAA Online, 26.10.1998

" : Tricky Dice Revisited. Science News, 13.04.2002



WUERFELPHYSIK

I. WUERFEL

nach Symmetrie

isohedrisch

nichtisohedrisch

Theorie: Modelle

Geometrie

Energiezustand

Praxis: Parameter

II. MESSUNGEN

Die Maschine

Wuerfelversuche

isohedrisch

nichtisohedrisch

Fazit

Bibliographie