

Carga y Descarga de un Condensador

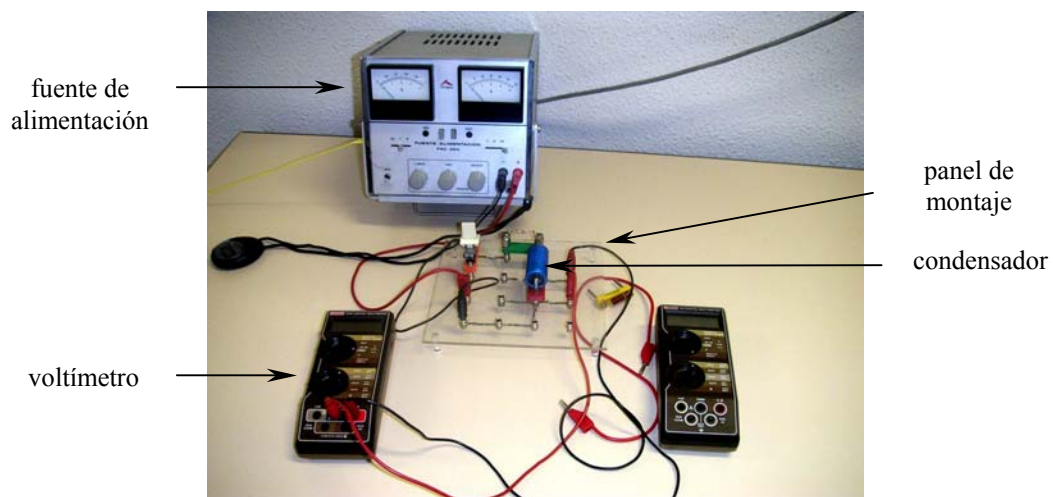
Fecha: 07/02/05

1. Objetivo de la práctica

Estudio de la carga y la descarga de un condensador; medida de su capacidad

2. Material

- Fuente de alimentación
- Polímetros (funcionando como voltímetros, $R_V = (11,10 \pm 0,02) \text{ M}\Omega$)
- Cronómetro
- Panel de montaje con condensador desconocido, resistencia de $\sim 3,7 \text{ M}\Omega$, resistencia de $\sim 470 \Omega$ y puente utilizado como interruptor



3. Teoría

3.1. Parte A: Carga de un condensador

Considérese el circuito representado en la figura 1. Al cerrar el interruptor S, el condensador C empieza a cargarse a un ritmo variable, cada vez más lento, el cual depende del valor de R . Para deducir la fórmula que rige el proceso de carga, vamos a aplicar las leyes de Kirchhoff a este circuito.

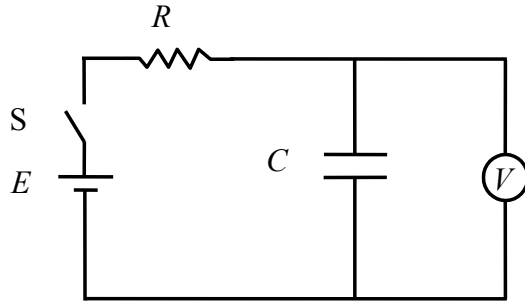


Fig. 1. Esquema del circuito eléctrico para experimentar con la carga de un condensador C a través de una resistencia R .

En la figura 2 se indican los nudos (**A** y **B**) y las intensidades (I , I_1 , e I_2) que consideraremos en el circuito para aplicar las leyes de Kirchhoff sobre las mallas.

$R_V = (11,10 \pm 0,02) \text{ M}\Omega$ es la resistencia interna del voltímetro. Denotaremos por q la carga del condensador. Aplicando la primera ley de Kirchhoff al nudo **A** se tiene:

$$(i) \text{ Nudo A: } I = I_1 + I_2 = \frac{dq}{dt} + I_2 \quad (1)$$

Teniendo en cuenta ahora la segunda ley de Kirchhoff aplicada a la malla formada por la fuente de tensión E , la resistencia R y el condensador C , se tiene:

$$(ii) \text{ Malla 1: } E = RI + \frac{q}{C} \quad (2)$$

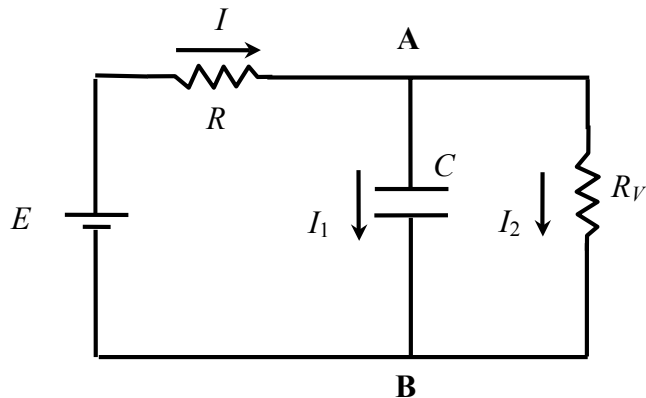


Fig. 2. Esquema equivalente del circuito eléctrico de la figura 1, donde se considera que el voltímetro posee una resistencia interna $R_V < \infty$.

y aplicada a la malla 2 formada por el condensador C y la resistencia del voltímetro R_V , se obtiene:

$$(iii) \text{ Malla 2: } \frac{q}{C} = I_2 R_V \quad (3)$$

Sustituyendo ahora la ecuación (1) en la ecuación (2) se obtiene:

$$E = R \left(\frac{dq}{dt} + I_2 \right) + \frac{q}{C} \quad (4)$$

y teniendo en cuenta (3):

$$E = R \frac{dq}{dt} + \frac{R}{R_V} \frac{q}{C} + \frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_V} \right) \frac{q}{C} \quad (5)$$

Por tanto, reordenando, la ecuación diferencial que hay que integrar es la siguiente:

$$\frac{dq}{CE - (1 + R/R_V)q} = \frac{1}{RC} dt \quad (6)$$

La condición inicial que impondremos en el experimento será que el condensador esté descargado antes de cerrar el interruptor. Para que la ecuación (6) cumpla esta "condición de contorno", basta hacer

$$q = 0, V = 0 \quad (\text{para } t = 0) \quad (7)$$

De modo que integraremos la ecuación anterior entre $t = 0$ y un instante cualquiera t en el que la carga es q , es decir:

$$\int_0^q \frac{dq}{CE - (1 + R/R_V)q} = \frac{1}{RC} \int_0^t dt \quad (8)$$

Si efectuamos la integración, y tomamos el antilogaritmo del resultado, queda:

$$q = \frac{CE}{1 + R/R_V} \left(1 - e^{-\frac{1 + R/R_V}{RC} t} \right) \quad (9)$$

la cual, haciendo

$$R' = \frac{RR_V}{R + R_V} \quad \text{y} \quad \tau_s = R'C \quad (10)$$

se puede escribir del siguiente modo:

$$q = \frac{R'}{R} CE \left(1 - e^{-t/\tau_s} \right) \quad (11)$$

y por tanto la variación del voltaje con el tiempo resulta ser:

$$V = \frac{q}{C} = \frac{R'}{R} E \left(1 - e^{-t/\tau_s}\right) = V_{max} \left(1 - e^{-t/\tau_s}\right) \quad (12)$$

La magnitud τ_s definida en (10) tiene dimensiones de tiempo y, de hecho, su valor se utiliza como indicativo del tiempo que tarda en cargarse el condensador (tiempo de subida de la carga, en inglés *rise-time*). Estrictamente, el tiempo de carga es infinito dado el carácter asintótico del término con exponencial en (12), y el valor de V cuando el condensador está completamente cargado es el que tomaría si no hubiese condensador en el circuito, es decir,

$$V_{(t \rightarrow \infty)} = V_{max} = \frac{R'}{R} E = \frac{1}{1 + R/R_V} E \quad (13)$$

En la práctica, se alcanza un valor experimental indistinguible de (13) en un tiempo razonable (dependiendo de los valores de R y de R_V).

3.2. Parte B: Descarga de un condensador

Si, estando cargado el condensador hasta un potencial V_0 , se abre el interruptor, el condensador empieza a descargarse a través de la resistencia interna del voltímetro,

$R_V = (11,10 \pm 0,02) \text{ M}\Omega$ (figura 3). Tomando esta condición inicial, es decir,

$$V = V_0, \quad q = q_0 = V_0/C \quad (\text{para } t = 0) \quad (14)$$

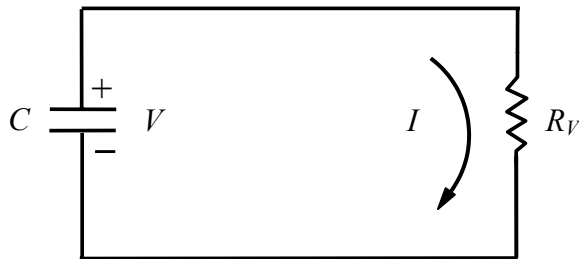


Fig. 3. Esquema del circuito eléctrico que ilustra la descarga de un condensador de capacidad C a través de la resistencia óhmica R_V del voltímetro.

y siguiendo pasos análogos a los del apartado 3.1. (Parte A), se puede demostrar que el potencial disminuye con el tiempo de acuerdo con la ecuación:

$$V = V_0 e^{-t/\tau_d} ; \quad \tau_d = R_V C \quad (15)$$

el tiempo τ_d ahora es el tiempo en el que el potencial (o la carga) cae en un factor e , es decir para $t = \tau_d$ se tiene $V = V_0/e$ y se llama tiempo de descarga o decaimiento (en inglés *decay* o *fall-time*).

4 Método experimental

◆ PRECAUCION:

¡Cuidado al manejar el condensador!, puede tener mucha carga almacenada, y al cortocircuitar sus polos (sin resistencia) pueden saltar chispas que funden los cables y producen quemaduras. Hay que tener la precaución de dejarlo siempre descargado, conectando una resistencia entre sus polos para que no salte la chispa; la más pequeña de $470\ \Omega$ da lugar a una descarga más rápida.

4.1. Parte A

Se trata de utilizar la evolución temporal del potencial durante la carga del condensador, fórmula (12), para determinar la capacidad C del mismo. Para ello:

- Se monta el circuito de la figura 1 ajustando a 10 V la salida de c.c. (corriente continua) de la fuente de alimentación.
- Después de comprobar que el condensador está totalmente descargado, se cierra el interruptor S al mismo tiempo que se dispara el cronómetro. Así se cumplen las condiciones iniciales (7) que se han impuesto al integrar (6). Se toma el valor del potencial que indica el voltímetro para diferentes tiempos parciales en el cronómetro hasta llegar a $V \geq V_{max}(1-e^{-1}) \approx 5\text{ V}$, y se anotan V y t en la Tabla 1. Al principio cada 10 s, después cada 20 s, luego cada 30 s y a partir de 4 min basta una medida cada minuto.
- Se espera hasta que el potencial en el condensador permanezca constante, y se anota dicho valor. Este valor corresponde al V_{max} de saturación de la subida.

4.2. Parte B

Se trata de utilizar la evolución temporal del potencial durante la descarga del condensador, fórmula (15), para determinar la capacidad C del mismo. Para ello:

- Con el mismo montaje de la figura 1, pero conectando la resistencia de $470\ \Omega$ para que la carga sea rápida, se cierra el circuito y se ajusta la salida de la fuente hasta que el potencial alcance un valor $V_0 = 10\text{ V}$.
- Se abre el interruptor y se dispara el cronómetro; así se cumplen las condiciones iniciales (14). Manteniendo abierto el circuito, el condensador se descarga sólo a través de la resistencia $R_V = (11,10 \pm 0,02)\text{ M}\Omega$ del voltímetro. Se toma el valor del potencial que indica el voltímetro para diferentes tiempos parciales en el cronómetro hasta llegar

a $V \leq V_0/e \approx 3,6$ V, y se anotan V y t en la Tabla 2. Al principio cada 10 s, después cada 20 s, luego cada 30 s y a partir de 4 min basta una medida cada minuto.

5. Resultados

5.1. Parte A: carga de un condensador

Para obtener C de los datos experimentales se utilizará la segunda expresión de (10), $\tau_s = R'C$, por lo que hay que determinar el valor de τ_s . Para obtener R' hay que medir con mayor precisión, usando el polímetro, el valor de $R \sim 3,7$ M Ω y determinar su error. El valor de τ_s lo determinaremos por dos procedimientos:

- a) Dibujando la gráfica (V, t) . De ella se obtiene el valor de $t = \tau_s$ para el que V vale

$$V_{\tau_s} = V_{max} (1 - e^{-1}) \quad (16)$$

- b) Usando la fórmula (12). Para lo cual, tomando logaritmos, la escribiremos del siguiente modo:

$$\ln \left(1 - \frac{V}{V_{max}} \right) = -\frac{t}{\tau_s} \quad (17)$$

Es decir, si se representa la expresión

$$\ln \left(1 - \frac{V}{V_{max}} \right) \quad (18)$$

en función de t , se tiene una recta. Por tanto, trazando una recta que se ajuste lo mejor posible a los puntos experimentales, y determinando la pendiente de esta recta, se obtiene $1/\tau_s$; primero visualmente y después por mínimos cuadrados. De aquí se obtiene el valor de τ_s y su error (compárese con el valor obtenido en el apartado a).

Usando este último valor de τ_s y las dos expresiones de (10), $R' = RR_v/(R+R_v)$ y $\tau_s = R'C$, se obtiene el valor de la capacidad C del condensador y su error. De acuerdo con la fórmula (13), el valor de $ER'/R = V_{max}$ debe coincidir con la medida experimental de esta magnitud en la Tabla 1, salvo el error experimental.

5.2. Parte B: descarga de un condensador

Para obtener C de los datos de la descarga se utilizará la segunda de las (15) para τ_d , y, análogamente, lo determinaremos por los dos procedimientos siguientes:

- a) Dibujando la gráfica (V, t) . De ella se obtiene el valor de $t = \tau_d$ para el que $V = V_0/e$.

b) Usando la primera de las (15). Tomando logaritmos como antes, se tiene:

$$\ln \frac{V}{V_0} = -\frac{1}{\tau_d} t \quad (16)$$

que representa una recta si se dibuja $\ln (V/V_0)$ en función de t . Por tanto, trazando una recta que se ajuste lo mejor posible a los puntos experimentales, y determinando la pendiente de esta recta, se obtiene $1/\tau_d$; primero visualmente y después por mínimos cuadrados. De aquí se obtiene el valor de τ_d y su error (compárese con el valor obtenido en el apartado a).

Usando este último valor de τ_d y la expresión (15), $\tau_d = R_V C$, se obtiene el valor de la capacidad C del condensador y su error. Compárese con el valor de C obtenido en la **Parte A**. Compárense también los valores de τ_s y τ_d . La relación teórica entre ellos, usando (10) y la segunda de (15), viene dada por:

$$\frac{\tau_d}{\tau_s} = 1 + \frac{R_V}{R} \quad (17)$$

¿Cómo se compara este cociente teórico con el obtenido en el experimento?

Nota

- Sólo si el polímetro es de escala automática (cambia la escala de medida automáticamente, según sea la magnitud de la tensión), puede producirse un cambio en su resistencia interna $R_V = 11,10 \text{ M}\Omega$ al cambiar de escala. Este efecto es indeseable en esta práctica, por lo que, para evitarlo y una vez seleccionada la función de voltímetro en c.c. (continua), se pulsará la tecla “RANGE” las veces necesarias para que el polímetro pase a modo "manual" y no varíe la escala de 30 V.

Re-análisis de la carga y descarga (no es obligatorio)

En todo condensador existe una corriente de fuga (I_{fuga} en la figura 4) que circula por dentro del mismo desde el polo positivo hasta el negativo. En general, para un condensador no defectuoso I_{fuga} es muy pequeña; esto equivale a que la resistencia interna R_C del condensador para c.c. es muy grande, idealmente infinita. Pero en los condensadores de gran capacidad, la I_{fuga} puede competir en cierta medida con la intensidad I_2 que pasa a través del voltímetro. Si se quiere tener en cuenta este efecto hay que corregir las ecuaciones iniciales (1) a (3) del siguiente modo:

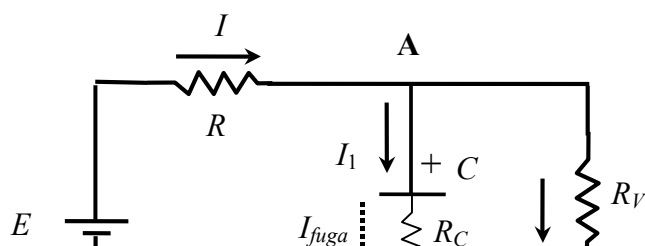


Fig. 4. Igual que la figura 2, pero con mayor separación entre las placas del condensador C con objeto de ilustrar la corriente de fuga en el mismo

$$(i) \text{ Nudo A: } I = I_1 + I_2 = \frac{dq}{dt} + I_{fuga} + I_2 \quad (1')(18)$$

$$(ii) \text{ Malla 1: } E = RI + \frac{q}{C} \quad (2')(19)$$

$$(iii) \text{ Malla 2: } \frac{q}{C} = I_2 R_V = I_{fuga} R_C \quad (3')(20)$$

Ahora se procede de modo análogo a como se ha hecho con las (1)-(3). Substituyendo las dos ecuaciones (3') en (1') se tiene,

$$I = \frac{dq}{dt} + \frac{q}{R_C C} + \frac{q}{R_V C} \quad (4')(21)$$

y substituyendo ésta en (2'),

$$E = R \left(\frac{dq}{dt} + \frac{q}{R_C C} + \frac{q}{R_V C} \right) + \frac{q}{C} \quad (5')(22)$$

Si se introducen los parámetros R'' (similar a R') y τ_s ("tiempo de carga") dados por

$$R'' = \frac{1}{1/R + 1/R_V + 1/R_C}; \quad \tau_s = R'' C \quad (10')(23)$$

y se reordena, la (5') queda así

$$\frac{dq}{q - ER''C/R} = -\frac{dt}{\tau_s} \quad (6')(24)$$

Integrando, se obtiene finalmente

$$V = \frac{R''}{R} E \left(1 - e^{-t/\tau_s} \right) = V_{max} \left(1 - e^{-t/\tau_s} \right) \quad (12')(25)$$

equivalente a la (12), pero con una expresión para el V_{max} experimental que está dado en función del parámetro R'' (en vez de R'):

$$V_{max} = \frac{R''}{R} E \quad (13')(26)$$

Ahora, utilizando el valor experimental de V_{max} anotado en la Tabla 1, se obtienen: R'' a partir de (13') (compárese con R'); R_c a partir de la primera de (10'); y el valor corregido de C de la segunda de (10'):

$$R'' = R \frac{V_{max}}{E} \quad R_c = \left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{R} - \frac{1}{R_V} \right)^{-1} \quad C = \frac{\tau_s}{R''} \quad (27)$$

Otro método, alternativo al anterior, para obtener R_c y el valor corregido de C , es utilizar una expresión análoga a la (17) para el cociente τ_d/τ_s . Ahora, las expresiones (15) para la descarga del condensador se convierten en:

$$V = V_0 e^{-t/\tau_d} ; \quad \tau_d = \frac{C}{1/R_V + 1/R_c} \quad (15')$$

y la (17), dividiendo la (15') entre la (10') resulta

$$\frac{\tau_d}{\tau_s} = 1 + \frac{1/R}{1/R_V + 1/R_c} \quad (17')$$

de donde se puede obtener $1/R_c$ a partir del valor experimental del cociente τ'_d/τ'_s

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1/R}{\tau_d/\tau_s - 1} - \frac{1}{R_V} \quad (28)$$

y de aquí el valor de C usando (15').

Bibliografía

1. J. R. Reitz y F. J. Milford, "Fundamentos de la teoría electromagnética", Ed. Addison-Wesley Iberoamericana (1986).
2. F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young y R. A. Freedman, "Física Universitaria", Vol. II, Ed. Pearson Educación (1999).

Tabla 1. Datos de la carga

$$R = (\quad \pm \quad) \text{ M}\Omega; \quad E = (\quad \pm \quad) \text{ V}; \quad R_V = (11.10 \pm 0.02) \text{ M}\Omega$$

precis. cronómetro \pm (s)	precis. voltímetro \pm (V)	error fórmula
t (s)	V (V)	$\ln [1 - VR/(R'E)] \pm \Delta \ln [\quad]$
0	0	0
10		
20		
40		
60		
90		
120		
150		
180		
210		
240		
300		
360		
420		
510		
600		
$\sim \infty$	$V_{max} =$	

Tabla 2. Datos de la descarga

precis. cronómetro \pm (s)	precis. voltímetro \pm (V)	error fórmula
t (s)	V (V)	$\ln (V/V_0) \pm \Delta \ln[]$
0		
10		
20		
40		
60		
90		
120		
150		
180		
210		
240		
300		
360		
420		
510		
600		