

## COMPROBACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

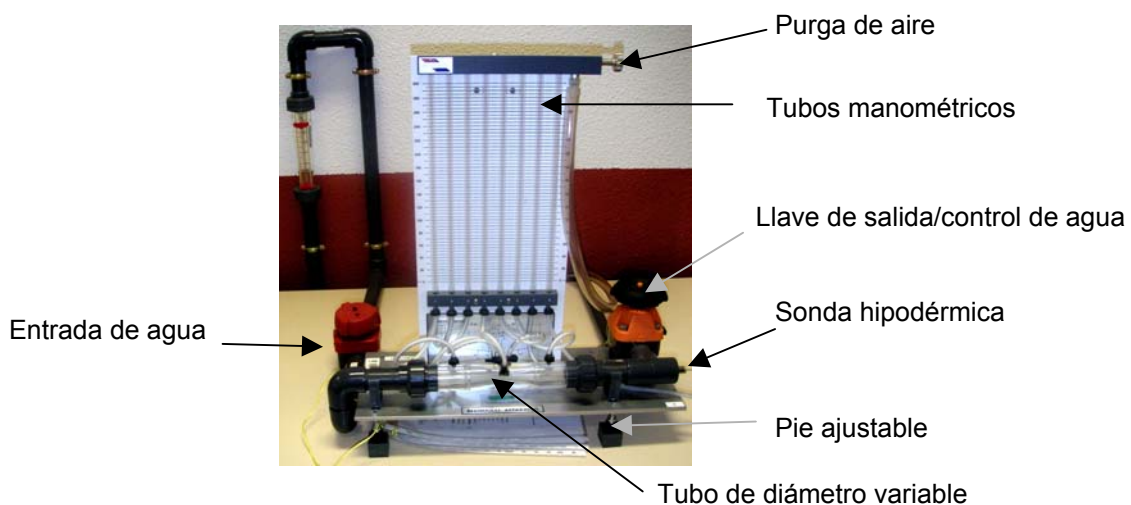
Fecha: 07/02/05

### 1. Objetivo de la práctica

Comprobación experimental de la ecuación de Bernoulli de la dinámica de fluidos con flujo estacionario de agua en un tubo de diámetro variable.

### 2. Material

- Sistema completo "Aparato Bernoulli" compuesto de:
  - Tubo horizontal de diámetro variable calibrado con conectores y tubos de entrada y salida de agua
  - Tubos manométricos verticales de presión estática con válvula de purga
  - Sonda hipodérmica horizontal de inoxidable para medida de presión total
  - Llaves reguladoras de entrada y salida del agua
- Caudalímetro
- Depósito y bomba de agua para circuito de circulación cerrado



### 3. Teoría

La ecuación de Bernoulli representa la ley de conservación de la energía mecánica para el caso de un fluido incompresible, sin rozamiento y en régimen de flujo estacionario, y se escribe:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 \quad (1)$$

donde  $p_j$ ,  $v_j$ ,  $z_j$  son respectivamente la presión estática, la velocidad del fluido y la altura del fluido en el punto  $j$ ;  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\rho$  es la densidad del fluido. Por comodidad práctica, como la presión estática  $p_j = \rho g h_j$  se mide por medio de la altura manométrica  $h_j$ , es útil dividir la ecuación anterior por  $\rho g$ . Además, como en nuestro montaje experimental el movimiento del fluido es horizontal, se tiene  $z_1 = z_2$ . Por tanto, la ecuación de Bernoulli (1) la escribiremos así

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (2)$$

En esta ecuación,  $h_j$  corresponde a la *presión estática*,  $v_j^2/(2g)$  corresponde a la *presión dinámica* y

$$h_t = h_j + \frac{v_j^2}{2g} \quad (3)$$

a la *presión total*. La ecuación de Bernoulli (2) implica que la altura  $h_t$  correspondiente a la presión total permanece constante a lo largo del recorrido.

### 4. Montaje

La parte central del sistema es un tubo de metacrilato de diámetro variable y calibrado por el que, al pasar un caudal constante de agua, varía la velocidad del agua y la presión estática en función del diámetro. Sobre el panel frontal están indicadas todas las dimensiones geométricas del tubo para usar las que sean necesarias. El agua entra en el tubo por el extremo izquierdo y sale por la llave de control de la derecha. En el eje del tubo se coloca la sonda hipodérmica que, al tener su orificio haciendo frente al flujo de agua, mide la presión total (estática y dinámica) en el último de los tubos manométricos al cual está acoplada. Su posición se puede cambiar aflojando a mano un poco la tuerca que la fija, desplazándola por la parte derecha con **mucho cuidado para evitar doblarla**, de modo que se puede medir la

presión total en diferentes posiciones. Los otros tubos manométricos toman el agua por orificios que son tangenciales a la velocidad del agua, por lo que sólo miden la presión estática en la posición de cada orificio. Los tubos manométricos están comunicados por la parte superior, y una válvula situada a la derecha los comunica, a través de un tubo de goma, con el desagüe y por tanto con la atmósfera; por este tubo, los manómetros se pueden purgar de posibles burbujas de aire.

La velocidad del agua  $v$  en una cierta posición del tubo se puede determinar conociendo la sección de tubo  $A$  en esa posición y el caudal de agua (volumen por unidad de tiempo),  $C = dV/dt = A \cdot dl/dt = A \cdot v$ . Este caudal viene indicado por el caudalímetro (en litros/hora) en cada momento. Por tanto, la velocidad del agua será

$$v = \frac{C}{A} \quad (4)$$

Además, dado que estamos considerando un fluido incompresible, la conservación de la masa exige la conservación del volumen y por tanto se cumple la *ecuación de continuidad*:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \dots \quad (5)$$

## 5. Medidas

1. En primer lugar, hay que tomar las *precauciones* adecuadas y *familiarizarse* con el sistema.
  - A. Inicialmente la sonda hipodérmica se debe desplazar hasta superar la toma del manómetro 6, pero no se debe sacar del sistema. Para ello se debe aflojar un poco con la mano la tuerca de fijación y, una vez desplazada la sonda, apretarla ligeramente; todo **con mucho cuidado** para evitar que se dañe.
  - B. Para empezar es necesario purgar el aire que hay en el sistema. Para ello, se comprueba que esté abierta la llave de purga en la parte alta de los tubos manométricos. Partiendo de la situación en que las llaves de entrada y salida están cerradas, se empieza a abrir lentamente la llave de entrada. El agua empezará a subir por los tubos manométricos para salir por la válvula de purga, arrastrando lentamente a las burbujas de aire. (El tubo flexible de la llave de purga debe desaguar al depósito, en caso contrario el agua inundará el suelo).
2. Una vez purgados de aire los tubos, se empieza a abrir muy lentamente la llave de salida y el agua iniciará su descenso por los tubos. Cuando el nivel de todos los tubos esté dentro de la zona de medición, se debe de abrir un poco más la

llave de entrada y luego la de salida para que, al aumentar el caudal (la velocidad), aumente el desnivel entre los tubos. Todo ello suficientemente despacio para mantener el nivel de todos los tubos dentro de la zona de medición.

3. La altura mayor, cercana a 30 cm, será la del tubo 1 (mayor diámetro) y la menor, cercana a 1 cm, la del tubo 5 (menor diámetro). Se espera un poco hasta que se estabilicen los niveles, salvo pequeñas variaciones aleatorias debidas a las variaciones de presión del circuito cerrado que hay que tomar como errores aleatorios. Si los niveles varían muy bruscamente debido a un cambio de régimen de la bomba, se debe esperar otro poco y repetir la medida para ese caudal. Se anotan en la Tabla 1 el caudal y todas las alturas manométricas.
4. Manteniendo las mismas condiciones y el mismo caudal que antes, se introduce ahora la sonda hipodérmica y se mide (y se anota en la Tabla 1) la presión total a lo largo del conducto en las posiciones de los manómetros y cada dos centímetros.
5. Se repiten los pasos 2 y 3, pero haciendo que inicialmente la diferencia de altura máxima entre los tubos manométricos 1 y 5,  $h_1-h_5$ , sea aproximadamente: a) la mitad de la usada antes para una segunda medida, y b)  $h_1-h_5 \cong 5$  cm para una tercera medida. Se anotan los datos en las Tablas 2 y 3 respectivamente.
6. Se representan gráficamente las presiones estática, dinámica y su suma en función del diámetro de cada sección para los manómetros del 1 al 4. ¿Con qué precisión se cumple la ecuación de Bernoulli (2)? ¿Qué ocurre al representar los valores de los manómetro 5 y sobre todo el 6?; este último resultado se debe explicar teniendo en cuenta que en esas posiciones el régimen del flujo de agua deja de ser laminar para pasar a turbulento.
7. Por último, escribiendo la ecuación (3) en la forma

$$v_j^2 = 2g(h_0 - h_j) = 2g \Delta h_j \quad (3)$$

se ve que  $2g$  es la pendiente de la gráfica de  $v_j^2$  en función de  $\Delta h_j$ . Representando esta gráfica con los datos de los manómetros 1 al 4, ¿qué valor se obtiene para la aceleración de la gravedad  $g$ ? ¿Con qué error?

## **Precauciones**

Al acabar de usar el aparato de Bernoulli es importante dejar el sistema con el interruptor de la bomba desconectado, con objeto de evitar que se queme la bomba y que se produzcan inundaciones.

## **Bibliografía**

Cualquier libro de Física General, por ejemplo:

1. F. W. Sears, M. W. Zemansky, H. D. Young y R. A. Freedman, "Física Universitaria", Vol. II, Ed. Pearson Educación (1999).

**Tabla 1.** Presiones estáticas y dinámicas para el caudal  
 $C_1 = \text{_____} \pm \text{_____} \text{ m}^3/\text{s}$

Tubo	Diámetro (mm)	Area ( $10^{-6} \text{ m}^2$ )	Velocidad $v \pm \Delta v$ (m/s)	Presión estática $h \pm \Delta h$ (m)	Presión dinámica $v^2/(2g) \pm \Delta(v^2/2g)$ (m)	Estática + Dinámica $h_s \pm \Delta h_s$ (m)	Presión total $h_t \pm \Delta h_t$ (m)
1	25.0±0.1	490±4					
2	13.9±0.1	151±2					
3	11.8±0.1	109±2					
4	10.7±0.1	90±2					
5	10.0±0.1	78±2					
6	25.0±0.1	490±4					

**Tabla 2.** Presiones estáticas y dinámicas para el caudal  
 $C_2 = \text{_____} \pm \text{_____} \text{ m}^3/\text{s}$

Tubo	Diámetro (mm)	Area ( $10^{-6} \text{ m}^2$ )	Velocidad $v \pm \Delta v$ (m/s)	Presión estática $h \pm \Delta h$ (m)	Presión dinámica $v^2/(2g) \pm \Delta(v^2/2g)$ (m)	Estática + Dinámica $h_s \pm \Delta h_s$ (m)	Presión total $h_t \pm \Delta h_t$ (m)
1	25.0±0.1	490±4					
2	13.9±0.1	151±2					
3	11.8±0.1	109±2					
4	10.7±0.1	90±2					
5	10.0±0.1	78±2					
6	25.0±0.1	490±4					

**Tabla 3.** Presiones estáticas y dinámicas para el caudal  
 $C_3 = \text{_____} \pm \text{_____} \text{ m}^3/\text{s}$

Tubo	Diámetro (mm)	Area ( $10^{-6} \text{ m}^2$ )	Velocidad $v \pm \Delta v$ (m/s)	Presión estática $h \pm \Delta h$ (m)	Presión dinámica $v^2/(2g) \pm \Delta(v^2/2g)$ (m)	Estática + Dinámica $h_s \pm \Delta h_s$ (m)	Presión total $h_t \pm \Delta h_t$ (m)
1	25.0±0.1	490±4					
2	13.9±0.1	151±2					
3	11.8±0.1	109±2					
4	10.7±0.1	90±2					
5	10.0±0.1	78±2					
6	25.0±0.1	490±4					