

# דו"ח מעבדה

## התאבכות ועקיפה

דב פלדשטון

### 1 רקע תיאורטי

אחת התופעות המעניינות והמוזרות בפיסיקה, היא הדואליות של האור: לפעמים האור מתנהג כחלקי-קום, ולעתים - כגלים. בניסויים אלה, ניסינו לבחון כמה מהתופעות הקשורות בהתנהגות הגלית של האור - התאבכות ועקיפה - הן בקרני לייזר והן בגלי מיקרו (אפילו השמות הפופולריים האלה - קרני לייזר, גלי מיקרו - מצביעים על הדואליות הזאת!).

#### 1.1 התאבכות - הסבר איכותי

כפי שאמרנו, ניתן מצד אחד לראות באור תופעות שהן ייחודיות לגלים, כגון התאבכות, ומצד שני התנהגות של חלקיקים. ככלל, תנועת האור מותאימה לתנועת חלקיק בשדה פוטנציאלי: החלקיק (האור) נע במסלול שעבורו הזמן הוא אקסטרימלי (עקרון זה נקרא עקרון פרמה). בפרט, בפוטנציאל קבוע (בתוך הומוגני, כגון אוויר) התנועה תהיה בקוים ישרים. אז אם יש מקור אור, ניתן לחשוב על האור היוצא ממנו כאוסף קרניים הנעות ממנו בקוים ישרים. אם נסתכל על אוסף כל הקרניים, נוכל לחשוב על "חזית גל" הניצבת בכל נקודה ונקודה לקרניים. הסתכלות אחרת, או משלימה, על האור היא לפי עקרון הויגנס: מקור האור פולט חלקיקים הנעים בקוים ישרים. כל חלקיק כזה מתקדם, ומהווה בעצמו מקור הפולט חלקיקים נוספים בכל הכיוונים. כשיש לנו חזית גל, יש לנו למעשה המון חלקיקים סמוכים, שכל אחד מהם פולט אור בכל הכיוונים: התוצאה הסופית היא שכל החלקיקים מבטלים אחד את השני (שניים זהים נעים בכיוונים מנוגדים), למעט אלה הנעים בכיוון התקדמות חזית הגל (שאינן מי שיבטל אותם), ולכן כיוון התנועה הוא ישר.

ואולם, כאשר מדובר במקרה שבו הפוטנציאל אינו אחיד (תוך לא הומוגני), העסק מסתבך. דוגמא קיצונית לכך היא סדק, שרק דרכו יכול האור לעבור, ואילו הקיר הסובב אטום לאור. לפי עקרון פרמה, היינו מצפים שהאור יעבור דרך הסדק בקוים ישרים, ושנראה על מסך את הצורה המדוייקת של הסדק, וסביבו - חושך. ואולם בפועל, אנו יודעים שיש "זליגה" של האור לצדדים, ורואים צורה הרבה יותר מטושטשת של הסדק על המסך, ובפרט - יש אור בנקודות שמהן אין קו ישר דרך הסדק אל המקור. עקרון פרמה לא יכול להסביר זאת, אולם אם נטפל במקרה זה גם לפי עקרון הויגנס, נוכל להסביר את התופעה: בסדק עצמו נמצאים חלקיקים שפולטים אור לכל הכיוונים, אבל עכשיו אין לצידם חלקיקים נוספים שיבטלו את האור הנפלט מהם הצידה. לכן האור יכול להגיע גם לצדדים, בלי שמשוהו יבטל אותו.

כאשר הסדק מאד צר, נוכל לראות תופעה מורכבת עוד יותר, ובה יבוא לידי ביטוי האופי הגלי של האור: האור הוא למעשה גלים, וכאשר שני גלים נפגשים הם מתחברים יחד בסופרפוזיציה: אם שני הגלים היו ברגע המפגש בשיאם, נקבל שיא שגודלו הוא כסכום שני השיאים; לעומת זאת, אם אחד היה בשיא ושני בשפל, הגלים יבטלו בדיוק אחד את השני, ולא נראה באותה נקודה כלום; וכמובן שייתכן משהו באמצע. החיבור הזה נקרא התאבכות. גל נמצא בשיא או בשפל כתלות בזמן שלוקח לאור להגיע לנקודת המפגש (האור נע כגל מחזורי, ולכן ברגע המפגש אנו עשויים להיות בכל שלב במחזור, כתלות בזמן ובאורך המחזור). כפי שאמרנו, מכל נקודה בסדק ינוע אור גם לצדדים, ולכן בנקודה מסויימת תפגע עכשיו לא רק הקרן המכוונת ישר אליו, אלא גם קרניים שיצאו מנקודות שונות לאורך הסדק. אבל לקרניים שמגיעות מנקודות שונות לוקח זמן שונה להגיע לנקודה אחת מסויימת, ולכן הם יגיעו בשלבים שונים של המחזור שלהם - ב"פאות" שונות - ונקבל התאבכות. בכל נקודה ונקודה על המסך, המרחקים המעורבים יהיו שונים, ולכן נקבל דרגה שונה של אור או חושך. זוהי "תבנית ההתאבכות" שיוצר הסדק. אנו רוצים לחשב את תבניות ההתאבכות שאמורות להתקבל עבור פרמטרים שונים של הניסוי (רוחב הסדק, אורך הגל, וכדו').

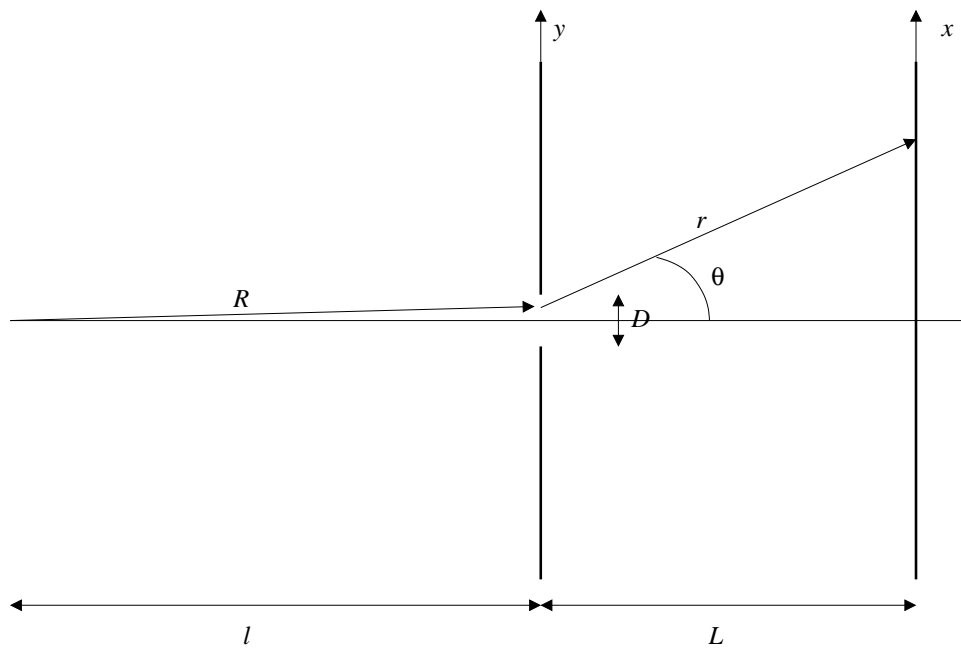
כדי שאכן נקבל תמונת התאבכות שהיא קבועה בזמן, המקורות השונים הפולטים את האור צריכים להיות "קוהרנטיים": כלומר, התדירויות צריכות להיות שוות, והפרש הפאזה היחסי ביניהם צריך להיות קבוע. לולא קיום תנאי זה, בנקודה מסויימת על המסך יתקבל ברגע מסויים חיבור של שיא ושפל, ואילו בזמן אחר - בגלל השינוי בהפרש הפאזה היחסי - חיבור של שני שיאים, למשל, וכך לא נוכל לדבר על נקודה שבה תמיד חשוך או תמיד יש אור, וממילא אין מה לדבר על "תבנית התאבכות". הדרך הנסיונית לקבל מקורות קוהרנטיים, היא ע"י שימוש בלייזר, וע"י העברת האור מאותו מקור יחיד דרך מספר סדקים, כך שכל הסדקים למעשה נובעים מאותו מקור קוהרנטי יחיד, ולכן הם קוהרנטיים זה עם זה.

## 1.2 חישוב תבנית ההתאבכות

כדי לחשב את תבנית ההתאבכות, עלינו לחשב את העוצמה היחסית של הגל בכל נקודה ונקודה על המסך. העוצמה מתכונתית לאמפליטודה בריבוע, ולכן עלינו לחשב את האמפליטודה. הגל בכל נקודה הוא, כאמור, סופרפוזיציה של כל הגלים המגיעים אליה, וזה מה שעלינו למצוא. נתחיל מקרן בודדת (ראה איור 1), היוצאת מהמקור, ומגיעה לסדק בנקודה  $y$  כלשהי. מנקודה זו, לפי עקרון הויגנס, יוצאות קרניים לכל הכיוונים, ובפרט יש גם קרן שמגיעה לאיזושהי נקודה  $x$  על המסך. פונקציית הגל המתארת את הקרן הבודדת בנקודה  $y$  בסדק היא  $\psi = A(R)e^{-i(\omega t + kR)}$ , כאשר  $A(R)$  היא האמפליטודה במרחק  $R$  מהמקור,  $\omega t$  מבטא את המחזוריות בזמן, ו- $kR$  מבטא את הפרש הפאזה הנובע מהמרחק בין המקור לנקודת המדידה (אורך הגל  $\lambda$  נכנס למרחק  $R$  פעמים,  $\frac{R}{\lambda}$  פעמים, ולכן הפרש הפאזה שזה יוצר הוא  $\frac{2\pi R}{\lambda}$ ;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , ומכאן הנוסחה). ושוב, אם נחשב באותו אופן בדיוק את פונקציית הגל על המסך בנקודה  $x$ , נקבל  $\psi = A(R+r)e^{-i(\omega t + kR + kr)}$ . עד כאן חישבנו השפעת קרן בודדת בנקודה אחת על המסך. כעת, כדי לחשב את פונקציית הגל הכוללת בנקודה מסויימת במסך, כל שעלינו לעשות הוא לסכום את כל הקרניים - מכל הנקודות בסדק - המגיעות אל נקודת המדידה. פונקציית הגל שנקבל היא:

$$\psi = e^{-i\omega t} \sum_j^N A(R_j + r_j) e^{-i(kR_j + kr_j)} \quad (1)$$

נשים לב שהתלות בנקודת המדידה  $x$ , כמו גם האיבר עליו אנתנו בעצם סוכמים  $y_j$ , מתחבאים בתוך  $R_j = \sqrt{L^2 + y_j^2}$  ו- $r_j = \sqrt{L^2 + (x - y_j)^2}$ . כמו כן, חשוב לשים לב לכך שאנו מעוניינים בעוצמה היחסית בנקודות השונות, ולא דוקא בעוצמה המוחלטת - דבר שיקל על החישובים בהמשך.



איור 1: תיאור סכימטי של קרן אור העוברת דרך סדק

### 1.3 קירוב Far-field

בעקרון, הנוסחה 1 אליה הגענו היא מספיקה כדי לחשב את פונקציית הגל בכל נקודה ונקודה על המסך, ועל ידי כך לחשב את תבנית ההתאבכות. אבל זו אינה נוסחה סימפטית במיוחד - קצת קשה מהסתכלות עליה לענות למשל על השאלה: מהי צורתה הכללית של תבנית ההתאבכות, וכיצד זו תלויה בפרמטרים השונים? נרצה, אם כן, להגיע לנוסחה פשוטה יותר, וזאת נוכל לעשות אם נניח כמה הנחות מקילות.

#### 1.3.1 ההנחות של קירוב Far-field

הקירוב בו נשתמש נקרא קירוב פראנהופר (Fraunhofer). ההנחה המקילה העומדת בבסיס הקירוב הזה, היא שהמרחקים בין המקור לסדק, ובין הסדק למסך, הם גדולים מאד ביחס לרוחב הסדק, המשמעותיות הנובעות מהנחה זו הן:

1. אמפליטודת הגל  $A(R+r)$  של כל קרן וקרן המגיעה אל נקודת המדידה על המסך - שווה.
2. קרניים היוצאות מכל נקודה שהיא לאורך הסדק, כולן מגיעות אל הנקודה על המסך באותה זווית.
3. בסדק עצמו, כל הקרניים נמצאות באותו הפרש פאזה.

הבה ננסח את ההנחה מבחינה מתמטית, ונראה איך המשמעותיות הנ"ל נובעות מהן. נסתכל שוב באיור 1. אנו מניחים, כאמור, ש- $D \gg l, L$ . אזי:

$$R \leq \sqrt{l^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}, \quad l \gg D \implies R \approx \sqrt{l^2} = l$$

וכמו כן, אם נפתח טור טיילור עבור  $r$  סביב  $y = 0$ :

$$r_y = \sqrt{L^2 + (x - y)^2} \approx \sqrt{L^2 + x^2} - \frac{xy}{\sqrt{L^2 + x^2}}$$

נשים לב ש- $\frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}} = \sin \theta$  ונקבל

$$r_y = \sqrt{L^2 + x^2} - y \sin \theta$$

כעת, ניתן להגיע למשמעות מס' 1:  $A(R_y + r_y) \approx A(l + \sqrt{L^2 + x^2} - y \sin \theta)$ , ובגבול  $l, L \gg y$  התלות ב- $y$  זניחה<sup>1</sup>. התוצאות אליהן הגענו הן גם שקולות למשמעות מס' 2, וכפי שנראה בהמשך (סעי' 1.3.2), אם ניקח את משמעות 2 כהנחה, נגיע בדיוק לאותה נוסחה שקיבלנו כאן עבור  $r_y$ , מה שמראה על השקילות של ההנחה המקורית עם משמעות זו. כדי לקיים את התנאי של משמעות מס' 3, עלינו לדאוג לכך שהפרש המרחקים מהמקור לשתי נקודות כלשהן בסדק יהיה קטן משמעותית מחצי אורך הגל (כדי שלא יצטבר הפרש פאזה ניכר בנקודות שונות בסדק - הפרש של חצי אורך גל גורם להתאבכות הורסת). כלומר:

$$\begin{aligned} \sqrt{l^2 + y^2} - l \ll \frac{\lambda}{2} &\iff \sqrt{l^2 + y^2} \ll l + \frac{\lambda}{2} \iff \\ l^2 + y^2 \ll l^2 + l\lambda + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 &\iff y^2 \ll l\lambda + \frac{\lambda^2}{4} \approx l\lambda \end{aligned}$$

והנה קיבלנו תנאי נוסף שנחזק כדי לקיים את משמעות מס' 3, והוא בעצם מגדיר לנו כמה רחוק זה "מספיק" רחוק - עבור סדק נתון ואורך גל מסויים - כדי לקיים את קירוב Far-field:

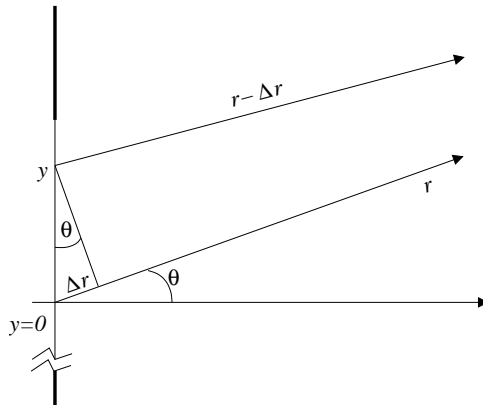
$$D^2 \ll l\lambda \quad (2)$$

בצורה דומה מאד מגיעים לכך שאותו תנאי בדיוק תקף גם עבור  $L$  במקום  $l$ .

### 1.3.2 חישוב הנוסחה הכללית לקירוב Far-field

לאחר שהראינו שהמשמעות הנ"ל נובעות מההנחה המקורית, נוכל להתייחס אל המשמעות כאל הנחות, שלפיהן נפתח את הנוסחה. נתחיל מנוסחה 1 שכבר יש בידינו לחישוב פונקצית הגל בנקודת המדידה. מהנחה מס' 1, אנו יכולים לומר שלכל קרן, ללא תלות ב- $j$ , מתקיים  $A(R_j + r_j) = A$ , ולכן נוכל להוציא את  $A$  מחוץ לסכימה. מהנחה מס' 3, גם  $kR_j = kR$  לכל  $j$ , וגם את זה נוכל להוציא מחוץ לסכימה. הגענו אם כן למשוואה  $\psi = Ae^{-i(\omega t + kR)} \sum_j^N e^{-ikr_j}$ . נתמקד עתה ב- $r_j$ . מהנחה 2, אנו רואים שכל הקרניים היוצאות מהסדק - ובפרט, הקרן היוצאת מ- $y = 0$  - מקבילות. לכן, אם אורך הקרן היוצאת מהראשית הוא  $r$ , הרי שאורך הקרן היוצאת מנקודה כלשהי  $y$  הוא  $r - \Delta r$  (איור מספר 2). קל לראות מהאיור שמתקיים  $\Delta r = y \sin \theta$ . אם נציב זאת בנוסחה, נקבל

<sup>1</sup> אמנם נשארה עדיין תלות ב- $x$ . אם נתייחס למצב שבו גם  $x$  קטן יחסית ל- $L$ , נוכל להתעלם גם מהתלות הזאת. לחליפין, כפי שנראה בהמשך, הניסוי שלנו טיפה שונה מהמתואר באיור, משום שהגודל  $r$  אצלנו אינו תלוי למעשה ב- $x$ , שכן המכפילור מורכב על זרוע נעה שאורכה קבוע, ניתן לפתח את הנוסחאות באופן מפורש עבור מקרה כזה, ולגלות שאין בעובדה זאת כדי להשפיע על התוצאות שנפתח כאן, מלבד התלות של האמפליטודה במרחק זה.



איור 2: קרניים מקבילות היוצאות מהסדק אל המסך

$$\psi = Ae^{-i(\omega t + kR + kr)} \sum_j^N e^{iky_j \sin \theta} \quad (3)$$

זוהי הנוסחה הבסיסית שתשמש אותנו בהמשך. למעשה, היא פשוט מבטאת את העובדה שיש לעשות סופרפוזיציה של כל הקרניים היוצאות מהסדק אל המסך. כעת נראה כיצד הסכימה הזאת באה לידי ביטוי בכמה מקרים פרטיים.

### 1.3.3 סדק בודד

אז צריך לסכם על כל הקרניים. עבור סדק יחיד שרוחבו  $D$ , יש לנו למעשה רצף של מקורות לכל אורך הסדק, וכרגיל במעבר לרצף - נחשב את האינטגרל. כזכור, אנו מעוניינים רק בעוצמה היחסית, ולכן נוכל להתעלם מכל מה שמחוץ לסכום (אינטגרל), שהוא קבוע. אזי נקבל מהסכימה:

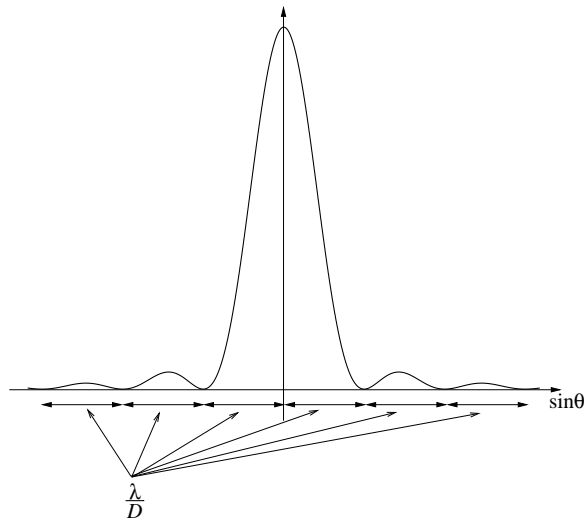
$$\psi \propto \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{iky \sin \theta} dy = \frac{-i}{k \sin \theta} \left( e^{ik \frac{D}{2} \sin \theta} - e^{-ik \frac{D}{2} \sin \theta} \right) = \frac{\sin \left( k \frac{D}{2} \sin \theta \right)}{k \frac{1}{2} \sin \theta}$$

את התוצאה מותר לחלק ב- $D$  (הוא קבוע, ולנו חשובה רק העוצמה היחסית). העוצמה היא ריבוע פונקציית הגל, ולכן נקבל

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \left( k \frac{D}{2} \sin \theta \right)}{k \frac{D}{2} \sin \theta} \right)^2 \quad (4)$$

הנוסחה היא מהצורה הכללית  $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ , וגרף סכימטי של פונקציה זאת משורטט באיור מס' 3. כפי שניתן לראות, במרכז הגרף מתקבל מקסימום, כאשר  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ , ובמקרה שלנו מתקבלת שם העוצמה  $I_0$ . מלבד נקודה זאת, מתקבל גרף של סינוס בריבוע, בתוך מעטפת של  $\frac{1}{x^2}$ . נקודות ההתאפסות של הגרף מתקבלות כאשר הסינוס מתאפס, כלומר  $x = \pm \pi n$ . במקרה שלנו,  $x = k \frac{D}{2} \sin \theta$ , ולכן נקודות ההתאפסות יתקבלו בנקודות  $k \frac{D}{2} \sin \theta = \pm \pi n$ , כלומר  $\sin \theta = \pm \frac{2\pi}{kD} n = \pm \frac{\lambda}{D} n$ .

ניתן לחשב את נקודות ההתאפסות גם משיקולים אלמנטריים, מבלי לעשות את כל החישובים שעשינו עד כה: כאשר הפרש המרחקים מנקודת מדידה מסויימת לשתי קצוות הסדק הוא כפולה שלמה של



איור 3: צורת ההתאבכות מסדק יחיד

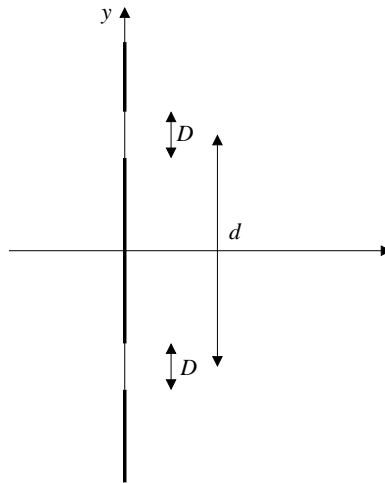
אורך הגל, ומכיוון שיש רצף של נקודות בין הקצוות, אזי חייב להיות שלכל הפרש פאזה, יש נקודת ביניים בסדק (או מספר נקודות, כמספר הכפולה של אורך הגל) שהקרן היוצאת ממנה לנקודת המדידה היא באותו הפרש פאזה; ומכיוון שזה נכון לכל הפרש פאזה, אזי מגיעות אל הנקודה אותו מספר קרניים בכל הפרש פאזה; וכמובן שסכום של כל הפרשי הפאזה במעגל נותן אפס! ואם כן, התנאי לכך שנקבל נקודת התאפסות הוא שרוחב הסדק כפול סינוס הזווית יתן כפולה שלמה של אורך הגל, וזה בדיוק מה שקיבלנו גם מהחישוב הנ"ל.

מהנוסחה, קל לראות את התלות של הגרף בפרמטרים השונים: הרוחב של הגרף הוא ביחס ישר לאורך הגל, וביחס הפוך לרוחב הסדק. מכאן גם נוכל בצורה פשוטה מאד למצוא את אורך הגל או רוחב הסדק, בהינתן הפרמטר השני: כל שעלינו לעשות הוא למדוד את המרחק הזוויתי בין שתי התאפסויות עוקבות, ולהשוות זאת לנוסחה שזה עתה קיבלנו.

### 1.3.4 זוג סדקים

נסתכל כעת על זוג סדקים (איור מספר 4) בעלי רוחב  $D$ , ומרחק  $d$  בין מרכזי הסדקים: אין שום הבדל ממשי בין החישוב הזה לחישוב הקודם - האינטגרל עכשיו מחושב על תחום קצת אחר:

$$\begin{aligned} \psi &\propto \int_{-\frac{d+D}{2}}^{-\frac{d-D}{2}} e^{iky \sin \theta} dy + \int_{\frac{d-D}{2}}^{\frac{d+D}{2}} e^{iky \sin \theta} dy = \\ &= \frac{-i}{k \sin \theta} \left( e^{-ik \frac{d-D}{2} \sin \theta} - e^{-ik \frac{d+D}{2} \sin \theta} + e^{ik \frac{d+D}{2} \sin \theta} - e^{ik \frac{d-D}{2} \sin \theta} \right) = \\ &= \frac{-i}{k \sin \theta} \left( 2i \sin \left( k \frac{d+D}{2} \sin \theta \right) - 2i \sin \left( k \frac{d-D}{2} \sin \theta \right) \right) = \\ &= \frac{2}{k \sin \theta} \left( 2 \cos \left( k \frac{d}{2} \sin \theta \right) \sin \left( k \frac{D}{2} \sin \theta \right) \right) \end{aligned}$$



איור 4: התאבכות משני סדקים

כאשר השתמשנו בנוסחה  $\sin s - \sin t = 2 \cos\left(\frac{s+t}{2}\right) \sin\left(\frac{s-t}{2}\right)$  שוב נחלק ב- $D$  ונעלה בריבוע כדי להגיע לעוצמה, ונקבל:

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin\left(k\frac{D}{2} \sin \theta\right)}{k\frac{D}{2} \sin \theta} \right)^2 4 \cos^2\left(k\frac{d}{2} \sin \theta\right) \quad (5)$$

את ניתוח הנוסחה נעזוב כרגע. בהמשך נראה שנוכל לומר דברים שנכונים באופן כללי עבור  $N$  סדקים, ולכן אין טעם לעשות את הניתוח בנפרד עבור  $N = 2$ .

### 1.3.5 סריג בעל $N$ סדקים

כעת נטפל במקרה הכללי של  $N$  סדקים, ותחילה נניח כי מדובר בסדקים נקודתיים (כלומר בלי רוחב). המרחק בין סדקים סמוכים יהיה  $d$ . מהנוסחה הבסיסית 3 נקבל (שוב, בהתעלם מקבועים):

$$\psi \propto \sum_{j=0}^{N-1} e^{ikjd \sin \theta} = \frac{1 - e^{ikNd \sin \theta}}{1 - e^{ikd \sin \theta}}$$

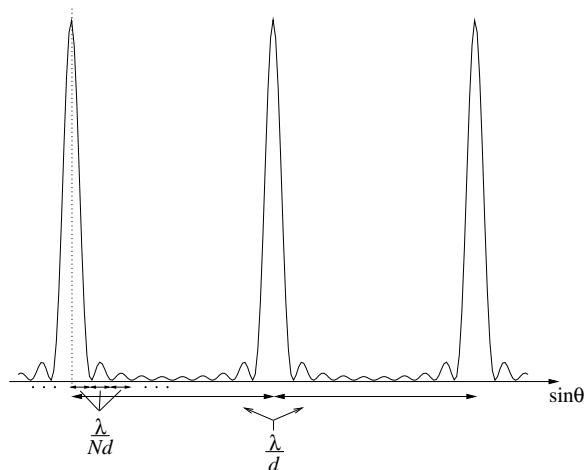
וכרגיל, כדי לחשב את העוצמה, נעלה בריבוע:

$$\begin{aligned} I &= |\psi|^2 = \psi \bar{\psi} \propto \frac{1 - e^{ikNd \sin \theta}}{1 - e^{ikd \sin \theta}} \cdot \frac{1 - e^{-ikNd \sin \theta}}{1 - e^{-ikd \sin \theta}} = \\ &= \frac{1 - e^{-ikNd \sin \theta} - e^{ikNd \sin \theta} + 1}{1 - e^{-ikd \sin \theta} - e^{ikd \sin \theta} + 1} = \frac{2 - 2 \cos kNd \sin \theta}{2 - 2 \cos kd \sin \theta} \end{aligned}$$

ולפי הזהות  $1 - \cos 2x = \sin^2 x$  נקבל:

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin\left(kN\frac{d}{2} \sin \theta\right)}{\sin\left(k\frac{d}{2} \sin \theta\right)} \right)^2 \quad (6)$$

הפעם הנוסחה היא מהצורה  $\frac{\sin^2 Nx}{\sin^2 x}$ . שרטוט של הגרף מובא באיור מס' 5. בכל פעם שהמכנה מתאפס



איור 5: צורת ההתאבכות מסריג (N סדקים ללא עובי)

(כאשר  $x = \pm\pi n$ ), גם המונה יתאפס. אם נבדוק את הגבול, נגלה ש-  $\lim_{x \rightarrow \pm\pi n} \frac{\sin^2 Nx}{\sin^2 x} = N^2$ , כלומר בכל נקודה כזאת מתקבל שיא מאותה עוצמה. השיאים האלה יתקבלו, כאמור, כאשר  $x = \pm\pi n$ , כלומר בנקודות  $k \frac{d}{2} \sin \theta = \pm\pi n$ , או  $\sin \theta = \pm \frac{2\pi}{kd} n = \pm \frac{\lambda}{d} n$ . ושוב, קיבלנו מדד נוח למציאת אורך הגל או המרווח בין הסדקים, ע"י מדידת המרחק בין שיאים סמוכים. אם נסתכל באיזור שסביב כל מקסימום, נראה שנקודות התאפסות יתקבלו כאשר במונה יש אפס (אבל עכשיו לא יתאפס המכנה), כלומר  $kN \frac{d}{2} \sin \theta = \pm\pi n$ ; ונקבל שהמרחק בין נקודות התאפסות סמוכות יהיה  $\pm \frac{\lambda}{Nd} n$ . כלומר  $\sin \theta = \pm \frac{2\pi}{kNd} n = \pm \frac{\lambda}{Nd} n$  (יהיו  $N - 1$  נקודות התאפסות בין שני שיאים מרכזיים סמוכים). את התוצאות האלה אפשר להסביר גם בצורה אינטואיטיבית: כאשר הזווית היא כזו, שהפרש המרחקים מסדקים סמוכים לנקודת המדידה הוא כפולה שלמה של אורך הגל, הרי שמכל הסדקים יגיעו קרניים שהם באותה פאזה אל נקודת המדידה, ולכן הם יחזקו אחד את השני, ונקבל מקסימום. ואילו כאשר הפרש המרחקים בין קצוות הסריג הוא כפולה שלמה של אורך הגל (וקצוות הסריג הם במרחק  $Nd$  זה מזה) אזי התרומות מכל הקרניים מתפרשות בצורה אחידה על פני כל הפאזות שבמעגל, וסכום של תרומות כאלה הוא אפס!

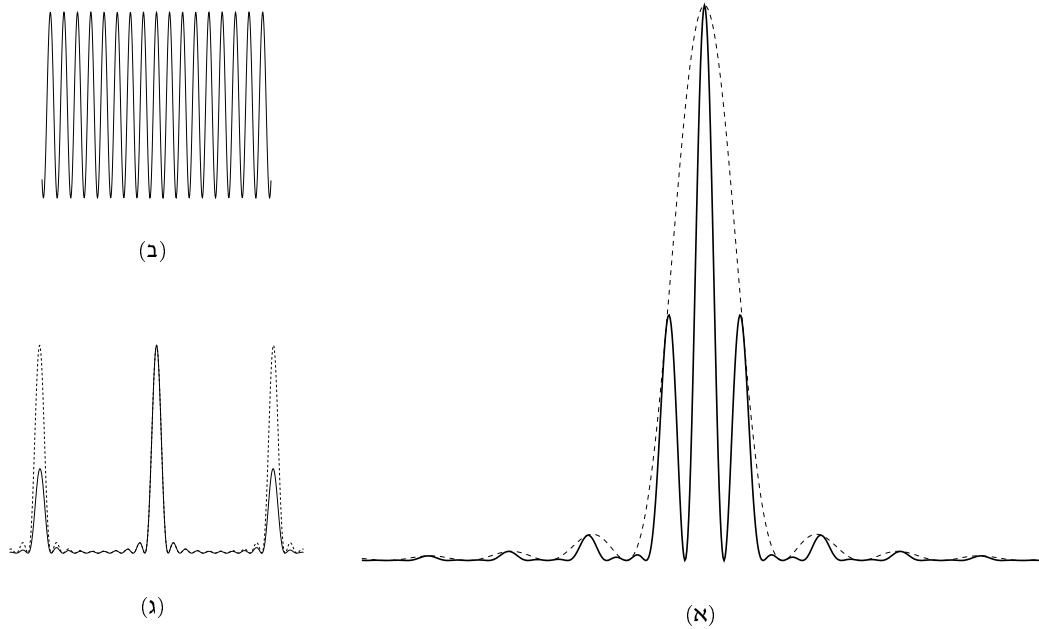
מהנוסחה הכללית שהגענו אליה זה עתה, נוכל לפתח את הנוסחה עבור המקרה הפרטי של שני סדקים<sup>2</sup>:  
ע"י הצבת  $N = 2$ , ובעזרת הזהות  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  נקבל

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin(kd \sin \theta)}{\sin(k \frac{d}{2} \sin \theta)} \right)^2 = I_0 \left( \frac{2 \sin(k \frac{d}{2} \sin \theta) \cos(k \frac{d}{2} \sin \theta)}{\sin(k \frac{d}{2} \sin \theta)} \right)^2 = I_0 4 \cos^2 \left( k \frac{d}{2} \sin \theta \right)$$

אם נשווה נוסחה זו לנוסחה 5, שקיבלנו ישירות עבור שני סדקים בעלי רוחב, אנו רואים דמיון: התבנית המתקבלת שם היא אותה תבנית שקיבלנו פה, אלא שכל התבנית שם מוכפלת בתבנית ההתאבכות של סדק יחיד (נוסחה 4) שרוחבו כרוחב כל אחד מהסדקים בפני עצמו. ההסבר לכך הוא זה: התרומה לפאזה של כל אחד מהסדקים (שיש לו למעשה רוחב), זהה לתרומת מקור נקודתי במרכז הסדק. לעומת

<sup>2</sup> נציין רק, שאפשר גם לפתח את הנוסחה עבור סדק יחיד מתוך נוסחה זאת! כל שעלינו לעשות הוא להשאיר את  $N \rightarrow \infty$  בנוסחה 6, תוך שמירת מרחק קבוע (רוחב הסדק) בין המקורות הקיצוניים. כמו כן שגם בשיטה זאת מגיעים לאותה נוסחה בדיוק שאליה הגענו.

זאת, האמפליטודה של כל סדק תלויה ברוחבו, בדיוק כפי שראינו עבור סדק יחיד, וזה יוצר מעטפת של האמפליטודה סביב הנוסחה הנ"ל (ראה איור מס' 6א) - והשווה ל6ב) שהוא זוג סדקים ללא רוחב).



התאבכות מזוג סדקים רחבים (א) או דקים (ב). בשני המקרים המרחק בין הסדקים הוא זהה, אלא שב- (א) ניתן לראות את המעטפת (קיוקו) שהיא תוצאה של הרוחב של כל אחד מהסדקים. אותה תופעה מתרחשת גם עבור סריג עם סדקים רחבים (א) - הקו המקווקוו מתאר את התבנית כאשר לסדקים אין רוחב, והקו הרצוף - כאשר יש להם רוחב.

איור 6: התאבכות ממספר סדקים, עם או בלי רוחב

אותו ניתוח תקף לגבי מספר כלשהו של סדקים, ולכן עבור סריג בעל  $N$  סדקים בעלי רוחב  $D$ , ומרווח  $d$  בין מרכזי סדקים סמוכים, נקבל את הנוסחה

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin \left( k \frac{D}{2} \sin \theta \right)}{k \frac{D}{2} \sin \theta} \right)^2 \left( \frac{\sin \left( k N \frac{d}{2} \sin \theta \right)}{\sin \left( k \frac{d}{2} \sin \theta \right)} \right)^2 \quad (7)$$

והגרף כמובן יהיה דומה לזה שראינו עבור סריג בעל סדקים דקים, אבל שוב - יושפע ממעטפת בצורת ההתאבכות מסדק יחיד (איור מס' 6א).

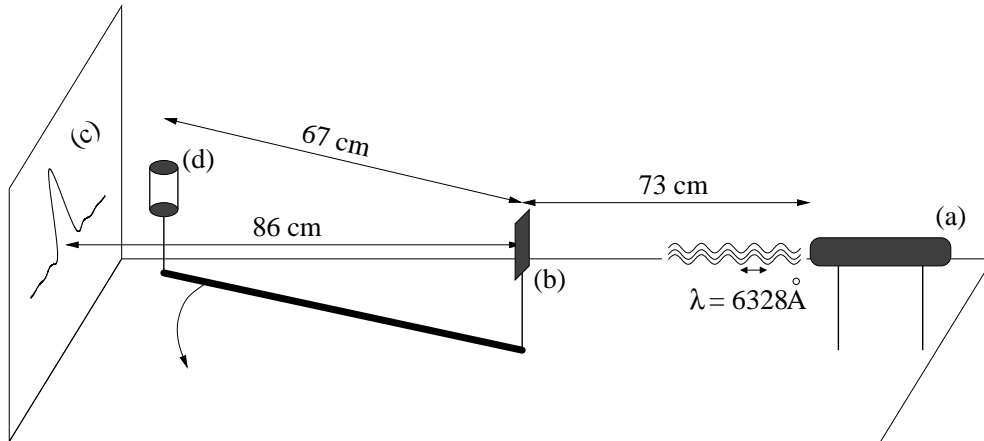
## 2 ביצוע הניסוי

הניסויים שביצענו נעשו בשתי מערכות שונות - ניסויים בלייזר, וניסויים בגלי-מיקרו. אורך הגל של קרני הלייזר נתון לנו, ועלינו למצוא את רוחב הסדקים השונים מתוך המדידות. ואילו בניסוי של גלי המיקרו, אנו בונים בעצמנו את הסדקים (וממילא, יודעים את רוחבם), ועלינו למצוא את אורך הגל, שאינו נתון לנו.

## 2.1 ניסויים בלייזר

### 2.1.1 תיאור המערכת

בניסויים אלה העברנו קרן לייזר דרך שקופית שעליה סדקים שונים. בשלב ראשון, עשינו כמה בדיקות ידניות, כאשר מדדנו את תבניות ההתאבכות שהתקבלו על הקיר. בשלב שני, עשינו מדידות הרבה יותר מדויקות בעזרת מכפילור שהורכב על זרוע מסתובבת, ומדדנו את עוצמת האור המתקבלת בכל נקודה ונקודה על פני תחום של  $30^\circ$ ; המדידות הועברו ישירות למחשב. המערכת עצמה - עם כל הגדלים הרלוונטיים - מתוארת באיור מס' 7.



מהלייזר (a) מוקרן האור על שקופית (b) שבה סדקים שונים. תבנית ההתאבכות מוקרנת על הקיר (c) או עוצמת האור נמדדת במדויק בעזרת מכפילור (d) המעביר את הנתונים למחשב

### איור 7: תיאור המערכת לניסויים בלייזר

לפני תחילת המדידות, היה צורך לכייל את המערכת - לוודא שהקרן מקבילה עד כמה שניתן, שהיא מכוונת למרכז הסדק, וכו'. כמו כן, כיילנו את הפוטנציומטר המחובר למכפילור, כך שכל מעלה של סיבוב הזרוע, גרמה שינוי של  $0.1 V$ . כמובן שאין משמעות פיסיקלית לגודל הזה, והוא רק מספק למחשב מידע על הזווית שבה מתבצעת כל מדידה. כצעד אחרון, ניסינו לכסות את כל מקורות האור הלא רצויים (וכשמכבים את האורות, פתאום מגלים שיש הרבה מאד כאלה!) בעזרת כל הבא ליד - כל זאת כדי שהמדידות תהיינה מדויקות ככל הניתן. במהלך הניסויים, הסתבר לנו שנגיעות שלנו בשולחן - שתחילה אפילו לא שמנו לב אליהן - השפיעו גם כן על איכות התוצאות, ובהמשך הניסויים נמנענו במהלך המדידות ממגע אם השולחן שעליו מורכבת המערכת.

על השקופית, כאמור, סדקים שונים. יש שלושה סדקים בודדים ("רחב", "בינוני" ו"צר"), זוג סדקים אחד, וארבעה סריגים. הנתונים המדויקים של הסדקים, הם מה שעלינו למצוא בעזרת המדידות והחישובים.

### 2.1.2 מדידות ידניות

בשלב ראשון, כאמור, ביצענו מספר מדידות ידניות - הקרנו את הלייזר דרך הסדקים השונים על הקיר. על הקיר הנחנו דף, וסימנו עליו כמה שיותר נקודות התאפסות שהרגשנו שאנו יכולים לסמן באיזשהו

דיוק. כמובן שקשה בעין לזהות איפה בדיוק נמצאת נקודת ההתאפסות - יש איזורים מוארים ואיזורים חשוכים, וקשה להצביע על נקודה מדוייקת שהיא נקודת המינימום - ולכן זהו מקור אחד לשגיאות. מעבר לכך, יש לזכור כי הניסוי נעשה בחושך (אחרת לא ניתן לראות בבירור את תבנית ההתאבכות), ולכן כבר בסימון הנקודות יש שגיאה מסויימת, שכן אי אפשר היה לראות איפה בדיוק קצה העפרון על הדף בעת סימון הנקודות! לכן השגיאה במדידות אלה היא יחסית גדולה.

להלן תוצאות המדידות:

### סדק רחב

הצלחנו לזהות על הקיר ולסמן את השיא המרכזי (שרוחבו היה 3 ס"מ), ועוד שני שיאים מכל צד (כלומר בסה"כ 6 נקודות התאפסות, ועוד נקודת ייחוס במרכז השיא המרכזי). מנקודות ההתאפסות ניתן לחלץ את רוחב הסדק, על בסיס הנוסחה שראינו בסוף 1.3.3:  $\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{D} n$ . עבור כל נקודת התאפסות ניתן לחשב את  $\sin \theta$  (בהינתן המרחק בין הסדק לקיר - 86 ס"מ, כפי שמופיע באיור 7). לאחר מכן ניתן לעשות אחד משני דברים: או לחשב את ההפרשים (במרחב  $\sin \theta$ ) בין כל שתי נקודות התאפסות, ואת ההפרש הממוצע לקחת בתור ההפרש, ולחשב את  $D$ . לחליפין, ניתן להתאים את הנקודות לישר, והשיפוע שיתקבל הוא  $\frac{\lambda}{D}$ . בכל מקרה, בהינתן אורך הגל, ניתן לחשב את רוחב הסדק. בדרך זו (גם מהממוצע, וגם מהתאמה לישר, קיבלנו את אותה הערכה) קיבלנו הערכה על רוחב הסדק הרחב:

$$D = 3.37 \cdot 10^{-5} \pm 4.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

### סדק בינוני

עבור הסדק הבינוני, הצלחנו לזהות רק את השיא המרכזי, והוא היה ברוחב  $2 \pm 17$  ס"מ (כזכור, ככל שהסדק צר יותר, כך הולך ומתרחב השיא). רוחב הסדק המתקבל הוא:

$$D = 6.4 \cdot 10^{-6} \pm 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

### סדק צר

עבור הסדק הצר, כבר לא ניתן לזהות בעין נקודות התאפסות כלל.

### זוג סדקים

עבור זוג הסדקים, מתקבלת תבנית התאבכות מאד ברורה, והצלחנו לזהות די הרבה (כתריסר) נקודות התאפסות. כמובן שבעין ניתן רק לזהות את נקודות ההתאפסות, אך לא לשים לב להבדלים בעוצמת האור באיזורים המוארים השונים. על כן, ניתן לקבל הערכה על המרחק בין הסדקים, שהוא, כזכור, משפיע על נקודות ההתאפסות; אך לא ניתן לקבל הערכה על רוחב הסדקים, שהרי הם משפיעים בעיקר על שינויי העוצמה.

את ההערכה נקבל בצורה דומה מאד למה שעשינו עבור סדק יחיד. הנוסחה המשמשת אותנו פותחה ב-1.3.5, ומהתבוננות באיור 5 ניתן לראות שבמקרה הפרטי של  $N = 2$ , נקבל שהמרחק בין התאפסויות

יהיה  $\sin \theta = \frac{\lambda}{d} n$ . ההערכה המתקבלת עבור המרחק בין הסדקים היא:

$$d = 4.85 \cdot 10^{-5} \pm 8.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

### 2.1.3 מדידות אוטומטיות

כאמור, רוב המדידות נעשו בעזרת מכפילור שחובר למחשב, וסיפק מידע מדויק לגבי עוצמת האור בכל נקודה ונקודה. בבואנו לנתח את התוצאות של מדידות אלו, עשינו התאמות של המדידות לנוסחאות הצפיות, כפי שפותחו בפרקים הקודמים. תחילה, כדי לקבל תחושה לגבי התנהגות הפונקציות, שרטטנו גרפים של הנוסחאות שפותחו, עבור ערכים שונים (שרירותיים - בלי קשר למדידות) של הפרמטרים. על ידי כך, ניתן לקבל תחושה כיצד משפיעים הפרמטרים השונים על צורת הגרף. כמו כן, מהשוואת הגרפים המתקבלים, לאלה שמתקבלים מהמדידות, ניתן "לנחש" בניסוי וטעייה בצורה די טובה את הפרמטרים עבור המדידות נתונות. כמובן שלאחר "ניחוש" כזה צריך לבדוק לוודא שהוא אכן טוב, ע"י מתן ציון (ריבועים פחותים, למשל) להתאמה המתקבלת. הניחוש הזה חשוב גם כדי לתת להתאמות האוטומטיות ניחושים ראשוניים טובים - לפעמים לאלגוריתמים של ההתאמות יש תלות די חזקה בטיב הניחושים ההתחלתיים. בנוסף, שרטוט הגרפים גם נותן חיווי לגבי הנוסחאות להן אנו מנסים לעשות התאמה - זה עוזר מאד למצוא טעויות (אפילו טעויות תקתוק) בנוסחאות, לפני שמנסים להתחיל להתאים את הנתונים לפונקציה שהיא שגויה סתם בגלל טעות תקתוק.

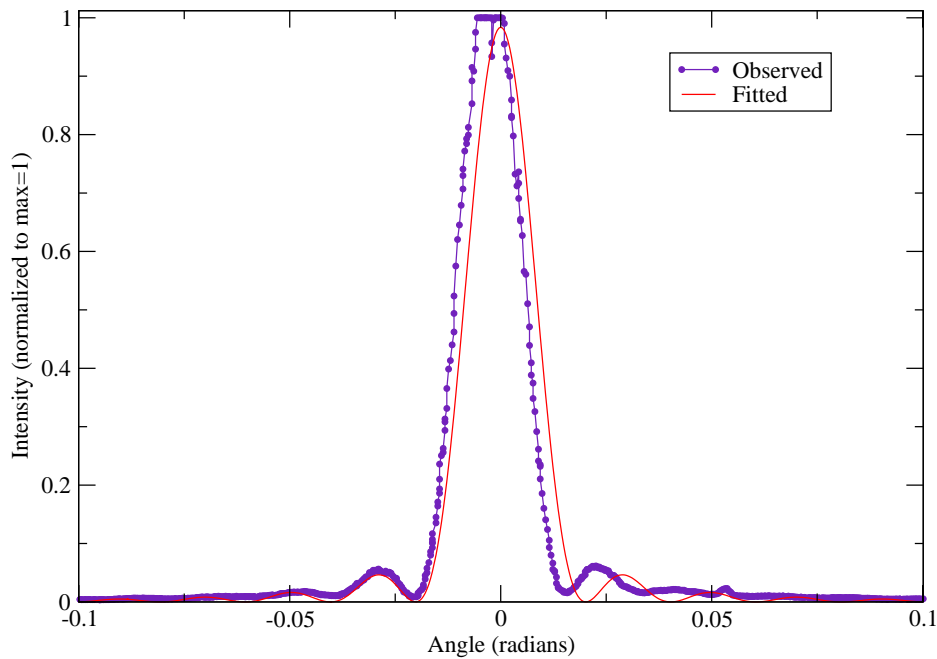
### סדק רחב

כאמור, בשלב ראשון שרטטתי גרפים שונים כדי לקבל תחושה לגבי התנהגות הפונקציה הנתונה. יש לציין, שבמקרה הזה, דווקא יש לנו ניחוש התחלתי מצויין עבור רוחב הסדק - זה שחושב על פי המדידות הידניות! (אפשר היה כמובן לחלץ מידע כזה באופן ידני גם מהמדידות האוטומטיות לפני ביצוע ההתאמה, ע"י מדידת המרחקים בין נקודות ההתאפסות, אבל כאן כבר יש לנו את התוצאות מהמדידות הידניות). משרטוט הנוסחאות והשוואתם לגרף של הנתונים הנמדדים, התבררה נקודה מעניינת: המדידות שלנו לא לגמרי ממורכזות - כלומר, יש סטייה קטנה אך ברורה של השיא המרכזי מנקודת האפס (ראה איור מס' 8). דבר זה יכול לנבוע מכמה דברים: סביר מאד להניח שכילוד-מד-הזוית אינו מדויק לגמרי, וטבעי לצפות לסטייה קטנה מאד, שאינה ניתנת למדידה בעין, ורק מתבררת כאשר מגיעים לנתח את הנתונים במחשב. לחליפין, הדבר יכול לנבוע מכך שקרן הלייזר לא היתה מכוונת בדיוק כלפי המרכז; אפשרות זו היא קצת יותר בעייתית, משום שאם היא אכן נכונה, אזי יש לצפות לעיוות של כל תבנית ההתאבכות - הרי הקרן כבר לא בדיוק ניצבת לשקופית, וכו'! ניתן אולי לנסות לפתח את הנוסחאות עבור מקרה כזה, ולראות אם הן מתארות את הנתונים יותר טוב<sup>3</sup>. ואולם, גם ללא פיתוח נוסחאות חדשות, מתקבלת, כפי שנראה, התאמה לא רעה.

הנוסחה הבסיסית שלה נעשתה ההתאמה, היא נוסחה 4, כאשר הפרמטרים אותם ביקשנו למצוא הם  $I_0$  ו- $D$ <sup>4</sup>. בשלב ראשון חיפשתי התאמה לנוסחה כמו שהיא (עם ניחוש התחלתי מהמדידות הידניות), והתקבלה תוצאה די טובה (רוחב הסדק שהתקבל הוא  $3.14 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ; הציון (Adjusted R-square)<sup>5</sup> הוא 0.932; הגרף משורטט באיור מס' 8; וניתן לראות באיור את הסטייה מהמרכז). כדי להתגבר על הסטייה

<sup>3</sup> וראה להלן סעיף 3.2.

<sup>4</sup> את המדידות שלנו נרמלנו על ציר ש כך שהמקסימום יהיה 1; עם זאת, נרמול כזה אינו מדויק, ולכן עדיין משתלם להתייחס אל  $I_0$  כאל פרמטר שאותו רוצים למצוא. כמו כן, תחילה ניסינו להתייחס גם אל  $k$  כאל פרמטר, אבל מסתבר שזה חסר משמעות: אם מסתכלים בנוסחה, ניתן לראות ש- $k$  ו- $D$  תמיד מופיעים כחלק מהצירוף  $kD$ , ולכן כל שינוי ב- $D$  יכול להיות מתוקן ע"י  $k$



התאמת המדידות לנוסחה, ללא התחשבות בסטיית השיא המרכזי.

### איור 8: סדק בודד רחב

הנ"ל, ניתן להכניס לנוסחאות פרמטר שמבטא אותה. לכן הוספתי פרמטר  $shift$  לנוסחה, שמבטא סטייה זוויתית: כלומר, בכל מקום שבו מופיע  $\theta$ , שמתו עכשיו  $\theta + shift$ . וכך, התקבלה תוצאה שנראית הרבה יותר טוב - הן לפי הגרף, והן לפי הציון: הפעם הוא היה 0.997! ה- $shift$  שהתקבל הוא של 0.00242, כלומר  $0.14^\circ$  - שזוהי ללא ספק סטייה מאד קטנה, שקשה להעריך בעין, וסביר מאד לצפות לסטייה כזאת - להיפך, היה מפתיע מאד לולא היתה סטייה כלל! רוחב הסדק שהתקבל הוא

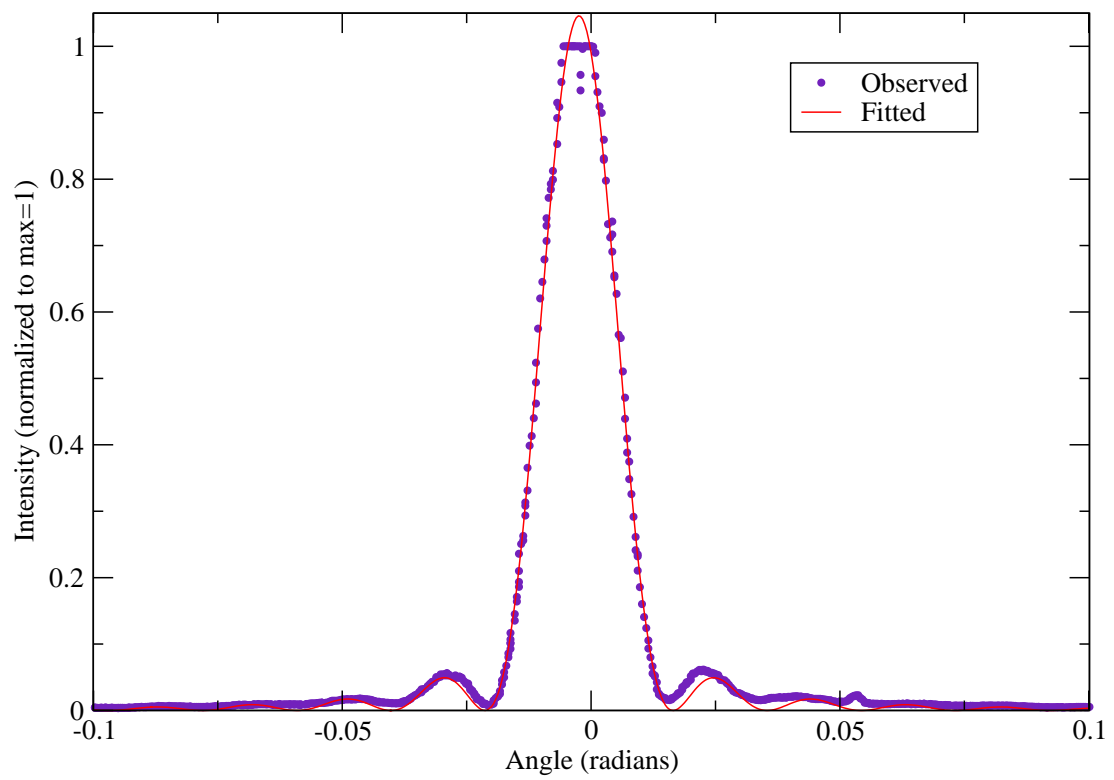
$$D = 3.35 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

. הגרף שהתקבל כעת מצויר באיור מס' 9. ניתן לראות מהגרף שההתאמה הזאת מצויינת!

### סדק בינוני

גם עבור הסדק הבינוני יש לנו, כזכור, מדידה ידנית. אלא שהמדידות האוטומטיות שעשינו בסדק זה נתנו תוצאות מזויעות: צורת הגרף המתקבל אינה דומה כלל לזו המצופה! למעשה, זה לא מדוייק: אילו היינו מסתכלים על הגרף העומד בפני עצמו, ניתן לחשוב שהצורה היא בסדר - ועל כן לא שמנו לב לבעיה בעת ביצוע המדידות. ואולם, בבואנו לנתח את התוצאות והשוואת הגרף הנמדד לגרפים משורטטים (איור מספר 10), ניתן לראות שהצורה לגמרי לא מתאימה: לא רואים נקודות התאפסות כפי שהיינו

ולהיפך; לכן ללא ידיעת פרמטר אחד, לא ניתן לומר משהו על השני, אלא רק על המכפלה של שניהם. <sup>5</sup>ציון זה, המחושב על ידי Matlab, מבטא את ריבוע הקורלציה בין הערכים הנמדדים לבין הערכים המחושבים ע"י הפונקציה שהתאמנו. משמעות הציון היא ש-93.2 (בדוגמא שלנו) אחוז מהשוונות במדידות מוסבר על ידי הנוסחה המותאמת. מכאן, שכלל שהציון קרוב ל-1, כך ההתאמה טובה יותר. ה-"Adjusted" מבטא את העובדה שהציון מתחשב במספר דרגות החופש (התלוי במספר נקודות המדידה ובמספר הפרמטרים החופשיים); ללא התחשבות כזאת, שינוי מספר הפרמטרים היה משנה את הציון, בלי קשר, בהכרח, לשינוי טיב ההתאמה.



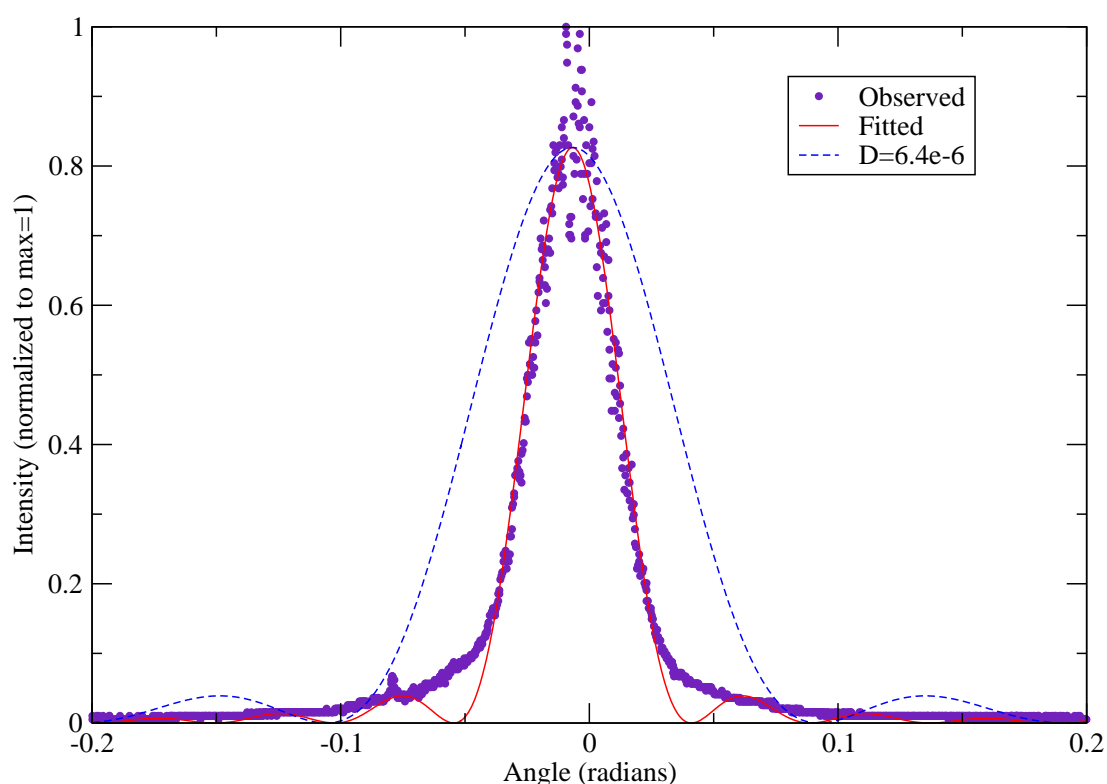
התאמת המדידות לנוסחה, תוך התחשבות בסטיית השיא המרכזי.

איור 9: סדק בודד רחב

מצפים לראות, לא רואים את השיאים המשניים, וכדו'. לאחר שראינו את התוצאות, חזרנו למעבדה וביצענו שוב את המדידות על אותו סדק - ושוב, הגענו לתוצאות דומות. ואולם, המחשב מצליח למצוא התאמה שלפי הציון היא לא רעה בכלל: 0.979! ובאמת, ניתן לראות בגרף שההתאמה טובה עבור השיא המרכזי, אבל לא לשאר הגרף; הציון עדיין טוב, כי הנקודות במרכז הן המשפיעות ביותר, כי שם העוצמה הגבוהה. רוחב הסדק שהתקבל מהתאמה זו הוא

$$D = 1.325 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

. רוחב זה אינו מתאים כלל לרוחב שקיבלנו עבור המדידות הידניות - הוא אפילו לא קרוב לטווח השגיאה שחישבנו שם! הסתכלות בגרף מראה לנו מדוע: החישוב הידני מבוסס על נקודות ההתאפסות.



ניתן לראות שההתאמה טובה רק עבור החלק המרכזי. הקו המקווקו מראה מה היינו מצפים מסדק שרוחבו הוא זה שחישבנו מהמדידות הידניות: ניתן לראות שנקודות ההתאפסות של גרף זה מתאימות לנקודות ההתאפסות הנמדדות, ואילו הבסיס לקביעת הרוחב במדידות הידניות.

איור 10: סדק בודד בינוני

אבל כפי שראינו, אין ממש נקודות התאפסות בגרף הנמדד! לכן ברור שמהסתמכות על מדידות אלו, נקבל תוצאה שונה לחלוטין. באיור 10 משורטט גם גרף עבור רוחב הסדק שקיבלנו מהחישוב הידני, וניתן לראות איפה נקודות ההתאפסות של גרף זה ביחס לאלה שנמדדו. לגבי סיבות אפשריות לחוסר ההתאמה, ראה להלן פרק 3.

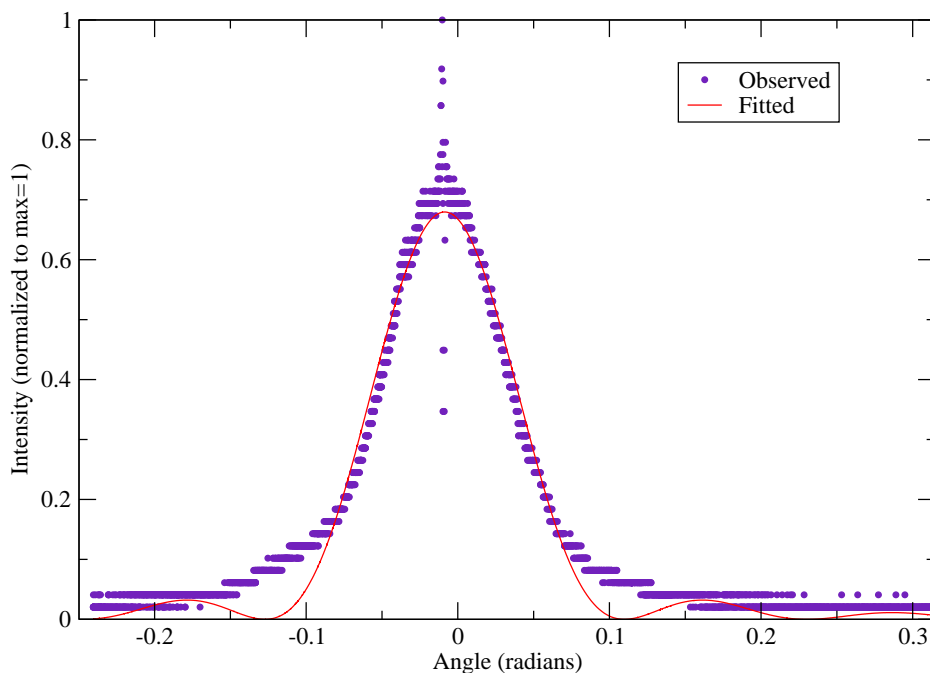
## סדק צר

עבור הסדק הצר התעוררו אותן בעיות שהתגלו עבור הסדק הבינוני. גם הפעם ניתן למצוא התאמה לא רעה עבור הזוויות הקטנות - מרכז השיא המרכזי - ואולם בהמשך לא רואים שיאים משניים כפי שהיינו מצפים לראות. זה מתחיל לגרום לחשוב שהנוסחאות שלנו טובות רק עבור זוויות קטנות, אבל לא עבור הזוויות הגדולות יותר (אם כי חשוב להדגיש, קירוב פראנהופר אינו דורש זוויות קטנות!).

ואל ההתאמה עצמה: הציון שקיבלנו הוא 0.966; רוחב הסדק שהתקבל הוא

$$D = 5.35 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

. ניתן לראות את הגרף באיור מספר 11.



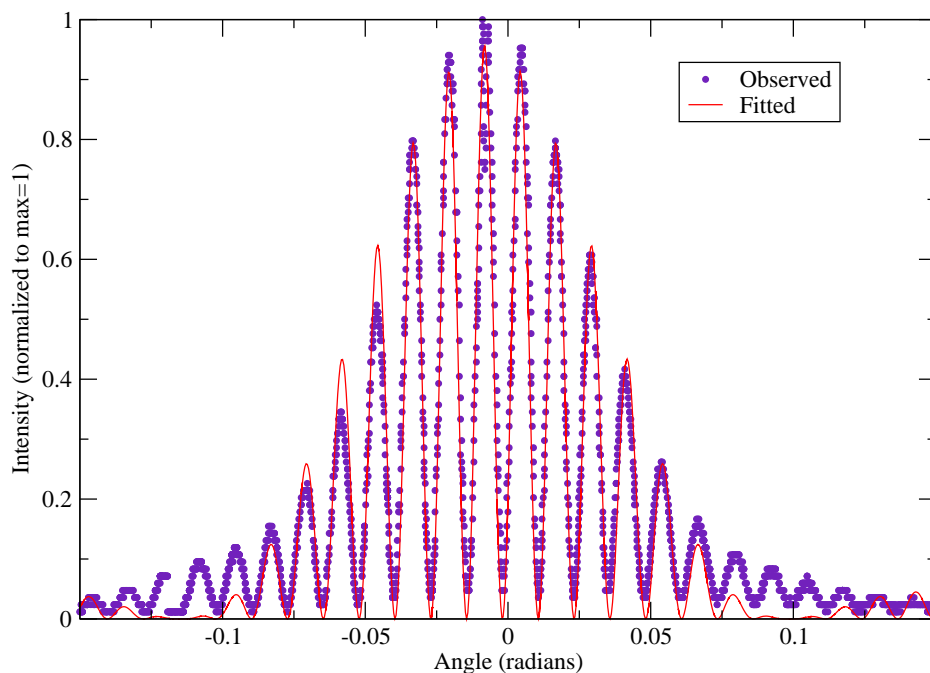
איור 11: סדק בודד צר

## זוג סדקים

בשקופיות יש זוג אחד של סדקים שאותו היה עלינו לבדוק. כזכור, הצלחנו לקבל חיווי על המרחק בין הסדקים בעזרת המדידות הידניות שביצענו. נשתמש בתוצאות האלה כניחוש התחלתי לתהליך ההתאמה. הפעם אנו מנסים להתאים את הנתונים לנוסחה 5, והפרמטרים אותם מנסים למצוא הם  $d$ ,  $I_0$ ,  $shift$ ,  $D$ .

גם פה, קיבלנו את אותה תופעה שראינו בסדקים הצרים - לא רואים במדידות את השיאים המשניים (של המעטפת!); הנוסחה מתארת טוב רק את הזוויות הקטנות, אבל בזוויות הגדולות יותר - יש בעיה. ההתאמה שמצאנו קיבלה ציון 0.954, והנתונים הם רוחב סדק

$$D = 5.95 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$



איור 12: זוג סדקים - התאמה.

ומרחק בין הסדקים

$$d = 5.04 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

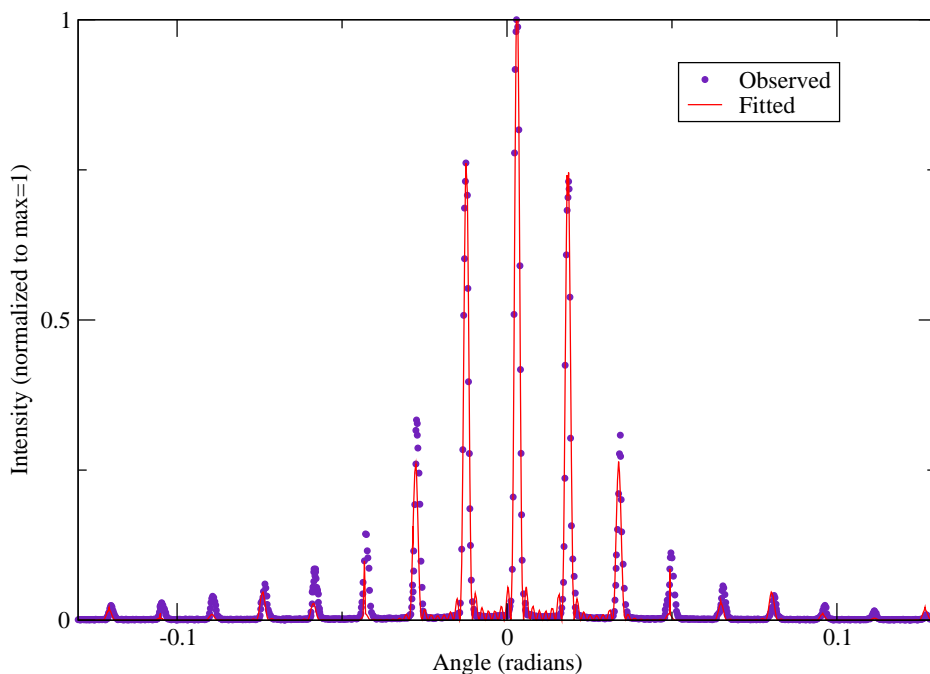
. הגרף המתקבל משורטט באיור מספר 12. אגב, ההערכה שקיבלנו למרחק בין הסדקים דווקא מתאים מאד למה שקיבלנו מהמדידות הידניות.

סריג<sup>6</sup>I

כאמור, יש גם ארבעה סריגים שאותם רצינו למדוד. הנוסחה עבור תבנית ההתאבכות של סריג פותחה בפרקים הקודמים, והיא נוסחה 7. כפי שניתן לראות בנוסחה, הפרמטר  $N$  - מספר הסדקים - אינו מופיע בפני עצמו, אלא רק כמכפלה עם  $d$  - המרחק בין הסדקים. זה אומר שיש תלות חזקה מאד בין שני הפרמטרים, ולכן כנראה שלא נוכל להגיע בהכרח לערך אבסולוטי של כל אחד מהם בנפרד, אלא רק לערך המכפלה (הפרמטר  $d$  בכל זאת מופיע בפני עצמו במכנה, כך שלא יהיה בלתי אפשרי להגיע לערכים אבסולוטיים, אבל אין לצפות לכך). ניגש, אם כן, להתאמה: היה קשה מאד למצוא את ההתאמה הנכונה. יכול להיות שזה בגלל העובדה שכבר מדובר פה ב-5 פרמטרים ( $N, d, D, I_0$ ), ויכול להיות שזה בגלל התלות הרבה בין הפרמטרים, שתיארנו לעיל. מכל מקום, נאלצתי לשרטט הרבה גרפים ולשחק בפרמטרים, ולא כל כך הגעתי לשום מקום. בשלב הבא, החלטתי לעשות זאת כמו שצריך - לחשוב קצת: לפי הניתוח שעשינו בפרק 1.3.5, המרחק בין שיאים גדולים סמוכים בסריג, הוא  $\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$ ; לכן, כל שצריך לעשות, הוא למדוד את המרחק הזה, וכך נמצא את  $d$ ! כמו כן, את ה- $shift$  ניתן למצוא ע"י בדיקה איפה בדיוק נמצא השיא המרכזי; את רוחב הסדקים  $D$  - ע"י

<sup>6</sup> אני לא סגור על זה שהמספור שלנו נכון; יסול להיות שהתבלבלנו ומספרנו את הסריגים הפוך...

שרטוט מעטפת של סדק בודד סביב הגרף של הסריג. בשלב זה, כבר יש למערכת מספיק מידע כדי להגיע לתוצאה קרובה. עכשיו ע"י משחק עם הפרמטר  $N$ , וביצוע התאמה עבור כל ניחוש, ניתן לראות מתי מתקבל ציון מקסימלי. התוצאה הסופית אליה הגעתי היא די טובה (איור מספר 13): הציון הוא



איור 13: סריג I - התאמה

0.955, רוחב הסדקים הוא

$$D = 1.24 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

והמרחק ביניהם

$$d = 4.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

. מספר הסדקים שנותן את הציון הטוב ביותר הוא

$$N = 8$$

. כאמור, אני לא משוכנע שיש כל כך הרבה משמעות לפרמטר האחרון: אני חושב שזה תלוי ברוחב הקרן, שהרי האיזור על השקופית שעליו הסדקים, רחב יותר מקרן הלייזר, ולכן הקרן לא עוברת דרך כל הסדקים. מצד שני, אם זה נכון, אזי הנה לנו דרך להעריך את רוחב הקרן:  $N \cdot d = 8 \cdot 4.1 \cdot 10^{-5} = 3.28 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . מן הסתם יש דרכים אחרות להעריך עד כמה מתפזרת הקרן עד שהיא מגיעה לשקופית, ולהשוות זאת לערך שזה עתה קיבלנו. אם תהיה התאמה - זה יהיה נתמד; מכל מקום, זה חורג ממסגרת הדו"ח הזה.

סריגים II, III, IV

עבור שאר הסריגים, הניתוח הנ"ל כמובן תקף. את הנסיונות למצוא התאמות עשינו באותה צורה, ולהלן התוצאות:

מספר סדקים (N)	מרחק בין סדקים (d)	רוחב סדק (D)	ציון ההתאמה	איור מספר	סריג
8	$2.05 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	$2.25 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	0.877	14	*II
22	$1.05 \cdot 10^{-5} \text{ m}$	$3.11 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	**0.912	15	III
38	$8.74 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$2.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	0.940	16	IV

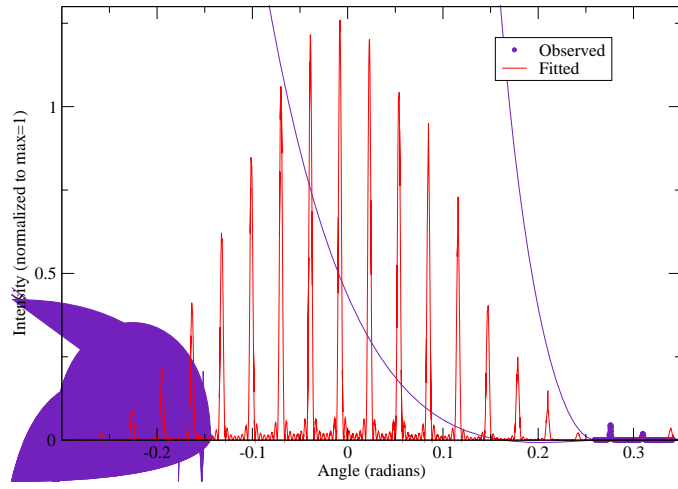
\* בפעם הראשונה שביצענו מדידות, לא הקפדנו לשנות את תחומי הקליטה של DScope, ולכן המדידות של הסריגים - שנקודות המקסימום שלהם בעלות עוצמה רבה מאד - נקטעו. את רוב המדידות ביצענו שוב, מלבד אלו של סריג II. לכן המדידות של סריג זה קטועות. זה פוגע כמובן גם ביכולות ההתאמה. מה שכן ניתן לעשות בכל מקרה, הוא לחלץ את המרחק בין הסדקים  $d$ , שמשפיע רק על המרחק בין שיאים, ואת זה ניתן לראות גם מתוך המדידות הקטועות. לאחר שחילצתי את הגודל הזה, הצלחתי להגיע להתאמה לא רעה בכלל, על אף הנתונים הקטועים; אני מניח, עם זאת, שהיא הרבה פחות אמינה ביחס ל-N, ואולי גם ל-D; ביחס ל-d אני חושב שהיא די מדוייקת.

\*\* ההתאמה הזאת נעשתה עם פרמטר נוסף של "רעש רקע": זאת משום שבמהלך המדידות האלה, השארנו את צג המחשב דלוק - לא היה נראה לנו שזה מפריע למדידות. בבואנו לעשות את הניתוח של התוצאות, התברר מה בכל זאת היתה ההשפעה: העוצמה של האור אף פעם לא ירדה לאפס - תמיד היה קצת אור שנקלט; ניתן לראות זאת בבירור בתחתית הגרף. אבל זה לא השפיע בצורה שונה בזווית שונות, ולכן לא פגע, למעשה, במדידות. ההתאמה עם או בלי הפרמטר הנוסף הזה נתנה ערכים קרובים מאד מאד עבור כל אחד מהפרמטרים. הפרמטר היחיד שהושפע בצורה גודלה, יחסית, היה רוחב הסדק: ללא התחשבות ברעש רקע,  $D = 3.003 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ , ועם - כפי שמתואר בטבלה. מה שכן הושפע, היה הציון (כמובן - לפי הנוסחה, העוצמה מתאפסת באופן מוחלט בין השיאים; כאשר נותנים פרמטר של רעש רקע, העוצמה יורדת רק עד לערך שמקבל הפרמטר הזה): ללא התחשבות ברעש, מתקבל ציון של 0.873, ועם רעש - כמתואר בטבלה. הערך שהתקבל בהתאמה עבור רעש הרקע: 0.0145 (ביחס לנרמול של העוצמה).

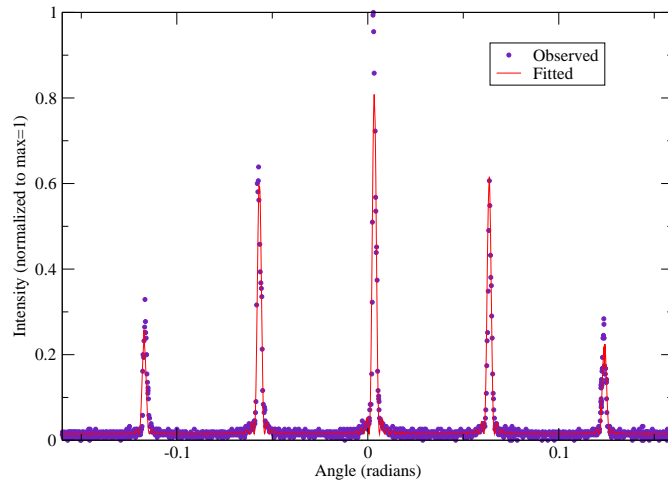
פרט מעניין אחרון שניתן לראות: אם נחשב את רוחב הקרן, כפי שעשינו בעזרת התוצאות מסריג I, נקבל מסריג III את הערך  $2.31 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ , ומסריג IV -  $3.32 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  (מסריג I קיבלנו, כזכור,  $3.28 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ) - מה שנראה כמחזק את ההשערה שאכן יש משמעות לחישוב הזה; את התוצאות מסריג II לא החשבתי, משום שהפרמטר N של ההתאמה כנראה אינו מדוייק, כמוסבר לעיל.

## 2.2 ניסויים בגלי-מיקרו

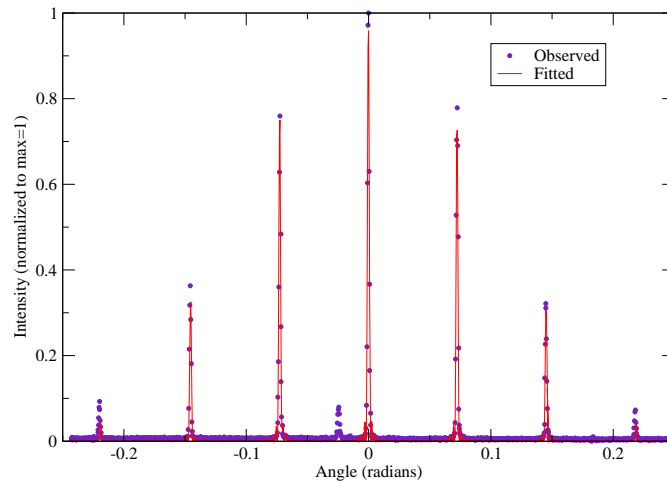
השלב השני בניסוי הוא ביצוע מדידות בגלי מיקרו. סדר הגודל של אורכי הגל בניסוי זה הוא מילימטרים או סנטימטרים, וכך גם סדר הגודל של הסדקים אותם אנו מכינים. הפעם, אורך הגל המדוייק איננו נתון לנו, וזהו המשתנה אותו עלינו לגלות. עבור גלים כאלה, שיש להם כבר אינטראקציות עם גופים שנמצאים סביבנו, יש המון רעש שנגרם כתוצאה מהחזרות מתפצים בתדר, ואפילו מעבר של אנשים בסמוך למערכת גורם להפרעות מורגשות. על כן, התוצאות בניסוי זה מדוייקות הרבה פחות. כמו כן, המדידות הפעם הן ידניות - מה שכמובן עלול להכניס מקור נוסף של חוסר דיוק למדידות. לבסוף,



איור 14: סריג II - התאמה



איור 15: סריג III - התאמה

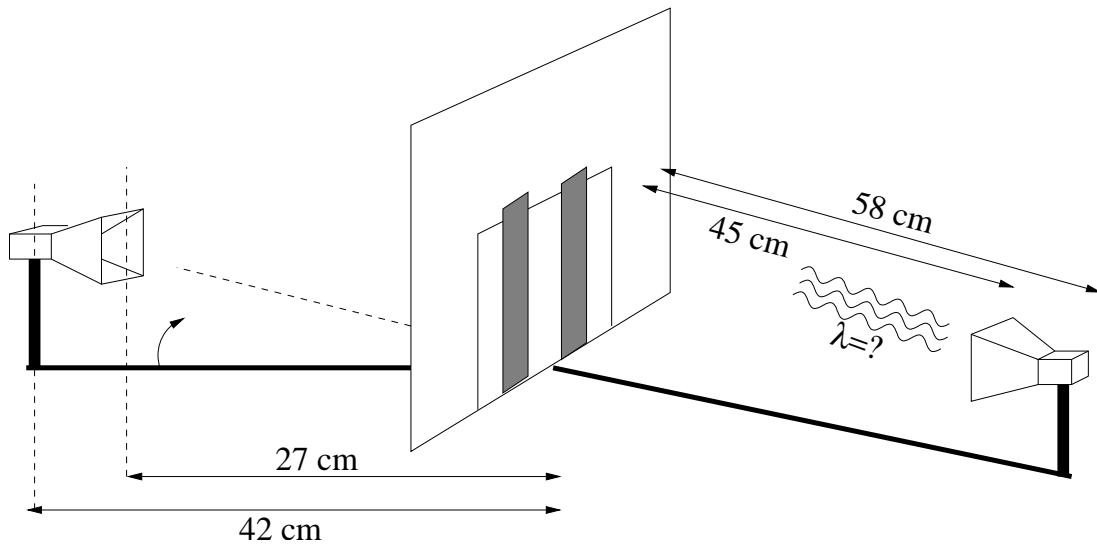


איור 16: סריג IV - התאמה

בניסוי זה סדר הגודל של המרחקים בין חלקי המערכת, רוחב הסדק, ואורך הגל, קרובים הרבה יותר. לכן, כבר לא מובן מאליו שניתן להשתמש פה בקירוב פראנהופר.

### 2.2.1 תיאור המערכת

המערכת מורכבת ממשדר ומקלט של גלי מיקרו, שנמצאים משני צידי שולחן. ביניהם יש לוח, שבמרכזו חור גדול. את החור הזה ניתן לחסום בעזרת לוחות מגדלים שונים, ולהשאיר ע"כ רק סדקים ברחבים שונים הנתונים לשליטתנו. שרטוט של המערכת והגדלים הרלוונטיים - באיור מספר 17.



איור 17: תיאור המערכת לניסויים בגלי מיקרו

את הניסויים ביצענו כך: שינינו בכל פעם את הזווית, אחר כך התרחקנו ככל הניתן המערכת, כדי לא

לגרום להפרעות, ולאחר שהמדידה התייצבה (או התייצבה יחסית) - רשמנו אותה. באופן כללי, ביצענו מדידות רבות עבור אחד מהצדדים (כלומר, ימינה או שמאלה מהזווית  $0^\circ$ ), ובצד השני ביצענו פחות מדידות, מתוך הנחה שהתבנית אמורה להיות סימטרית, ולכן צד אחד כבר מכיל למעשה את רוב המידע.

## 2.2.2 ביצוע ההתאמות

לפני שניגש לניתוח התוצאות, כדאי לנסות לברר האם אכן נוכל להשתמש בקירוב פראנהופר. ניגזר לשם כך בנוסחה 2 שפיתחנו לעיל. בינתיים אנו לא יודעים מה אורך הגל שלנו, אבל נוכל לקבל מהנוסחה חסם על אורך הגל שבו עדיין נוכל להשתמש בקירוב פראנהופר. רוחב הסדק הצר ביותר הוא  $D = 6 \text{ cm}$ ; וכפי שניתן לראות מתיאור המערכת,  $L \approx 30 \text{ cm}$ ,  $l \approx 50 \text{ cm}$ . אם נציב בנוסחה, נקבל שאורך הגל צריך לקיים  $\lambda \gg D^2/l \approx 0.72 \text{ cm}$ ,  $\lambda \gg D^2/L \approx 1.2 \text{ cm}$ . כלומר, אורך הגל צריך להיות מסדר גודל של עשרות סנטימטרים, כדי שנקבל התאמה טובה לקירוב far-field. ככל שרוחב הסדק יגדל או יתוספו סדקים - כך ילך הקירוב ויהיה פחות ופחות טוב. לא סביר להניח שתנאי זה מתקיים - אנו מצפים לאורכי גל מסדר גודל של סנטימטרים בודדים לכל היותר. אבל אפילו אם מדובר בסנטימטרים בודדים, זה יותר גדול מ-1.2 cm, ולכן יש סיכוי לקבל תוצאות סבירות (כבר יצא לי להיתקל בניסויים שבהם אפילו הפרש קטן מאד, היה מספיק כדי שיתקיים תנאי של "גדול מאד" או "קטן מאד"). לכן, בבואנו לנתח את התוצאות, יש טעם לנסות התאמה לקירוב פראנהופר, וכדי לקבוע את אורך הגל - להסתמך על התוצאות שמתקבלות עבור הסדק הצר ביותר. ניגש עתה לניסויים.

## סדקים בודדים

הנוסחאות להן אנו עושים התאמה הן אותן נוסחאות שהשתמשנו בהם בלייזר, אלא שעתה אורך הגל הוא פרמטר, ורוחב הסדק - ידוע. להלן התוצאות:

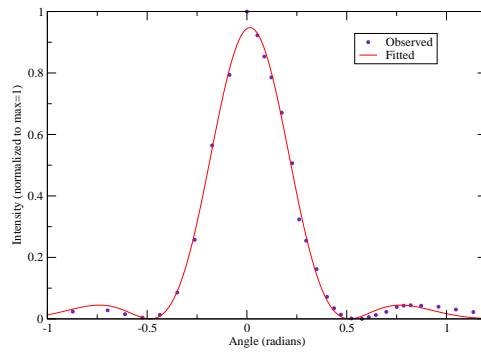
רוחב הסדק	ציון ההתאמה	אורך הגל שחושב	איור מספר
6 cm	0.996	2.87 cm	18
8 cm	0.996	2.83 cm	19
10 cm	0.991	2.89 cm	20
12 cm	0.982	3.15 cm	21

כפי שניתן לראות מהגרפים, עבור הסדק הצר ביותר מתקבלת התאמה טובה מאד. ואכן, כפי שצפינו, ככל שהסדק הולך וגדל, כך טיב ההתאמה יורד. מעבר לכך, ניתן לראות שהסטיית הן לא אקראיות, אלא נראה שיש תבנית מוגדרת אחרת - כנראה התבנית של near field.

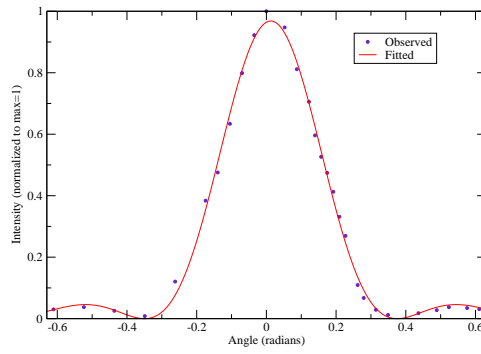
## זוג סדקים

זוג הסדקים שלנו היו בעלי רוחב 1.5 ס"מ כל אחד, וקצוותיהם היו ממוקמים בנקודות  $\pm 6 \text{ cm}$  (כלומר,  $d$  - המרחק בין מרכזי הסדקים - הוא 13.5 cm). התוצאות שקיבלנו עבור ההתאמה עם הנתונים הנ"ל:

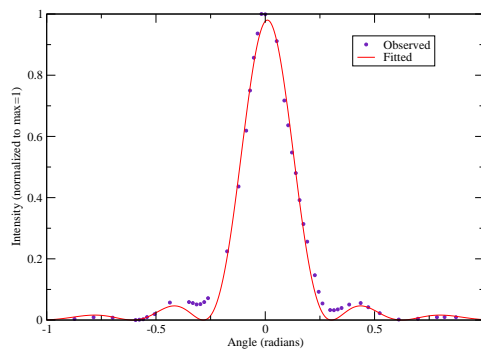
ציון: 0.83, אורך הגל: 2.85 cm. (הגרף באיור מספר 22).



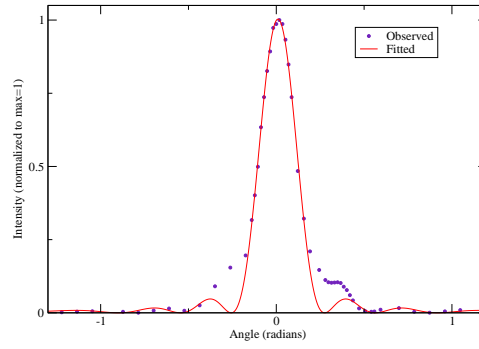
איור 18: גלי מיקרו - סדק בודד ברוחב 6 ס"מ



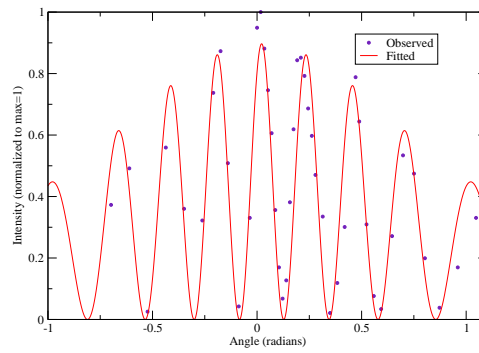
איור 19: גלי מיקרו - סדק בודד ברוחב 8 ס"מ



איור 20: גלי מיקרו - סדק בודד ברוחב 10 ס"מ

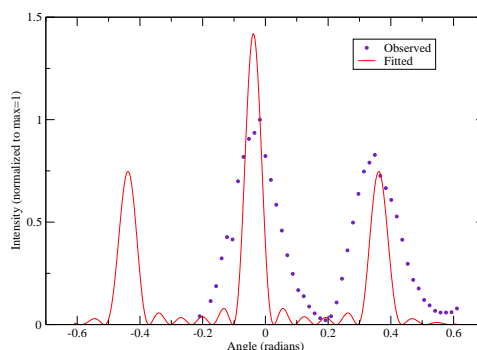


איור 21: גלי מיקרו - סדק בודד ברוחב 12 ס"מ



איור 22: גלי מיקרו - זוג סדקים

הסריג שבנינו לצורך מדידה זו היה בעל סדקים ברוחב  $D = 3 \text{ cm}$  כ"א, ומרחק בין קצוות הסדקים של 4 ס"מ, כלומר  $d = 7 \text{ cm}$ . בסה"כ היו 6 סדקים. כאן כנראה שקירוב פראנהופר נשבר לגמרי: ראשית, כבר מהסתכלות בגרף (איור 23), לא נראה שזה מתאים לתבנית. ושנית, ההתאמה הטובה ביותר שקיבלתי (זו המשורטטת בגרף) קיבלה ציון של  $-0.13$  - ואני כלל לא משוכנע שלציון שלילי אפילו יש משמעות מעבר ל"חוסר התאמה משוע". עם זאת, אורך הגל שהתקבל בהתאמה הזאת הוא 2.74 ס"מ, שהוא קרוב יחסית לערכים שקיבלנו בכל שאר ההתאמות, כך שאולי בכל זאת יש משמעות.



איור 23: גלי מיקרו - סריג

### 3 אנומליות

ההתאמות שמצאנו עבור המדידות היו, ברובן, טובות למדי, אולם היו כמה אנומליות של התצפיות ביחס לתיאוריה, שמן הראוי להתייחס אליהן:

1. במרכז התבנית - בזווית 0 - שבה אמור להיות המקסימום, ניתן לראות שיש שקע קטן בתבנית (למשל, איור 9, עמוד 14); עבור הסדקים הצרים יותר התופעה פחות ברורה, אבל ניתן לראות באופן כללי שיש יחסית הרבה "לכלוך" סביב נקודה זאת - לא תמיד שקע, לפעמים דווקא עלייה חדה מאד בעוצמה.
2. א-סימטריה: בהרבה מהגרפים, ניתן לראות שהתבנית אינה לגמרי סימטרית: לעתים השיאים בצד אחד קצת יותר גבוהים מהשיאים המתאימים בצד השני. (התופעה בולטת במיוחד בגרף 12 (עמוד 17), ובכל הסריגים).
3. בניסויים בלייזר, ניתן לראות שכל נקודות ההתאפסות שסביב מרכז הסדק לא ממש מתאפסות! הדבר בולט במיוחד במדידה של זוג סדקים (איור 12, עמוד 17).
4. כפי שציינו כבר, מלבד ההתאמה של הסדק הרחב, כמעט בכל שאר ההתאמות בניסויי הלייזר, מתקבלת התאמה מצויינת עבור מרכז התבנית (זוויות קטנות), אבל בזוויות גדולות יותר התצפיות אינן מתאימות לתיאוריה: לא רואים שיאים משניים, ולמעשה גם לא רואים בכלל נקודות התאפסות, אלא רק דעיכה מונוטונית (בסדקים בודדים - בתבנית עצמה; בזוג ובסריגים - במעטפת).

5. הגרפים של הניסויים בגלי-מיקרו - במיוחד אלה שנעשו עם הסדקים הרחבים יותר - לא ממש מתאימים לתבנית. כאמור, זו לא ממש אנמליה, כי לא ציפינו לקבל את התבנית, מכיוון שלא מתקיימים תנאי far field. כדאי לבחון מה כן היינו מצפים לראות.

אחד הכלים השימושיים להמשך הדיון, הוא פיתוח נומרי לחישוב תבנית ההתאבכות, המבוסס על נוסחה 1 (עמ' 2). כזכור, נוסחה זו היא הנוסחה הבסיסית ביותר לחישוב תבנית ההתאבכות, והיא אינה מניחה קירובים כלשהם. לכן היא אמורה להתאים גם ל-near field. כמו כן, היא עשויה לעזור לבחון אם תופעה מסוימת נובעת מהקירובים או לא.

### 3.1 סטיות במרכז התבנית

הסבר אפשרי אחד לסטיות הנצפות, הוא שבמרכז התבנית הקירוב נשבר. ההגיון מאחורי טענה זאת אומר שכל עוד אנו דנים בגדלים סופיים, הקירוב נכון; אבל ברגע שמגיעים לאפס ממש, כבר אי אפשר לטעון, למשל, שכל הקרניים מקבילות - הרי הקרניים משתי קצוות הסדק למרכז התבנית, למשל, פונות כמובן לכיוונים שונים! ובאופן יותר פורמלי: בפיתוח הנוסחה לקירוב פראנהופר, פיתחנו טור טיילור עבור  $r_y$ , ובפיתוח זה מובלעת ההנחה ש- $x > y$  (ראה איור מס' 1). ואולם, בנקודה  $x = 0$  ברור שלא ייתכן שתנאי זה יתקיים; לכן, ייתכן וזוהי הנקודה שבה הקירוב נשבר. עם זאת, בפיתוח הנומרי על סמך נוסחה 1, שכאמור אינה מניחה קירובים כלשהם, לא רואים תופעה זאת - התבנית מתאימה בדיוק לזו שמקבלים מקירוב פראנהופר, גם במרכז התבנית. לכן, אינני משוכנע שזהו אכן ההסבר לתופעה.

הסבר אפשרי אחר הוא שכאשר המכפילור מודד בדיוק במרכז התבנית, הקרן מכוונת ישירות אליו, וייתכן שהוא מגיע לרוויה - דבר שעלול לגרום לכל מיני עיוותים במדידות בנקודה זאת. ואולם, מבדיקת הנתונים, לא נראה שבמקומות אלו היה המכשיר קרוב לרוויה - אפילו הערכים הגבוהים ביותר שנמדדו רחוקים מהטווח המקסימלי שהמכשיר אמור להיות מסוגל לקלוט.

יש לציין, שבניסויים בגלי מיקרו לא נצפתה תופעה דומה. אמנם המדידות שם ידניות, ולכן בעלות רזולוציה (בציר  $\theta$ ) הרבה יותר נמוכה, וייתכן ורק בגלל זה לא רואים את התופעה. לחליפין, יכול להיות שזה באמת מרמז על כך שהבעיה היא דוקא בציד בניסוי הלייזר, ולא תופעה "אמיתית".

### 3.2 א-סימטריה

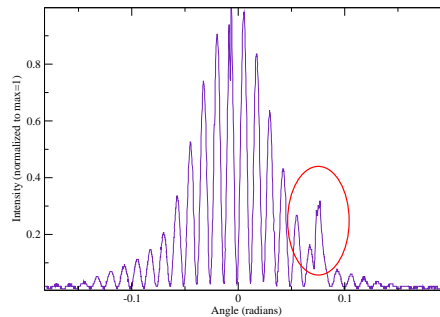
השערה אחת שהייתה לנו להסבר האסימטריה, היתה שאולי הקרן לא היתה מכוונת ישירות כלפי המרכז, אלא נטתה קצת לכיוון מסויים, וזה מה שגרם לעוצמה באחד הצדדים להיות קצת יותר חזקה מזו שבצד השני. כזכור, אחד הדברים הראשונים שגילינו בעת ביצוע ההתאמות היה שיש סטייה קטנה של התבנית מהמרכז; אמנם הסברנו שם שזה כנראה נובע מסיבה אחרת (סטיות קטנות בכיול), אך העלנו שם גם את האפשרות שזה נובע מקרן שאינה מכוונת בדיוק למרכז. לשם בדיקת השערה, חישבתי בצורה נומרית את התבנית המצופה, כאשר הקרן הפוגעת אינה מגיעה בדיוק מהמרכז, אלא מאחד הצדדים. להפתעתי, ההשפעה היחידה של סטייה כזאת היתה לגרום להסטה של כל התבנית; אבל צורת התבנית עצמה לא הושפעה בכלל, ובפרט - היא נשארה סימטרית לחלוטין. לכן, כנראה שהשערה זו אינה יכולה להסביר את האסימטריה.

השערה אחרת היא שהתופעה נובעת ממדידה בנקודות שהן לא לגמרי סימטריות: כאשר השיאים מאד מאד ממוקדים וצרים, אם המדידה נעשית לא בדיוק במרכז השיא, תתקבל קריאת עוצמה חלשה בצורה משמעותית מהשיא האמיתי. אם בכל צד נמדדו במקרה נקודות קצת שונות ביחס לשיא, הרי שנצפה

לקבל בדיוק תופעה כזאת. נראה לי שהסבר זה אכן מתאים למה שרואים בסריגים: שם השיאים באמת מאד צרים, והסבר זה נשמע סביר. חיזוק נוסף לכך ניתן למצוא מכך שבדיקה מדוקדקת תראה שבסריגים, לא ניתן להצביע על צד אחד שהוא באופן עקבי גבוה יותר מהשני, אלא התופעה באמת נראית אקראית. בזוג הסדקים, לעומת זאת, נראה שהשיאים רחבים מספיק כדי למנוע תופעה כזאת, ולכן עבור הזוג, עדיין צריך למצוא הסבר אחר.

אחר הלבונטים אמר שלפעמים יש במכשירים עצמם סטייה לינארית לצד אחד. היה לו גם הסבר ממה זה נובע, שלא הבנתי לגמרי, אבל הטענה היתה שלפעמים באופן עקבי, ככל שמתקדמים לאורך ציר ה- $x$ , מתקבלות מדידות קצת יותר גבוהות או נמוכות. עם זאת, מהסתכלות מדוקדקת בגרף, לא נראה שזוהי התופעה שאנו רואים.

הסבר אחרון, ולדעתי, בסופו של דבר, ההסבר הנכון, הוא זה: במהלך המדידות, קיבלנו לפעמים קפיצות מאד גדולות בתבנית - סתם, ללא שום סיבה נראית לעין (דוגמא מובהקת לאחת מהמדידות האלה באיור מספר 24). לבסוף גילינו שהסטיות האלה נבעו מסיבה מאד מוגדרת: על השקופית, מעל הסדקים,



איור 24: דוגמא לקפיצות בעוצמה, שנבעו מריבועי ההכוונה שעל השקופית

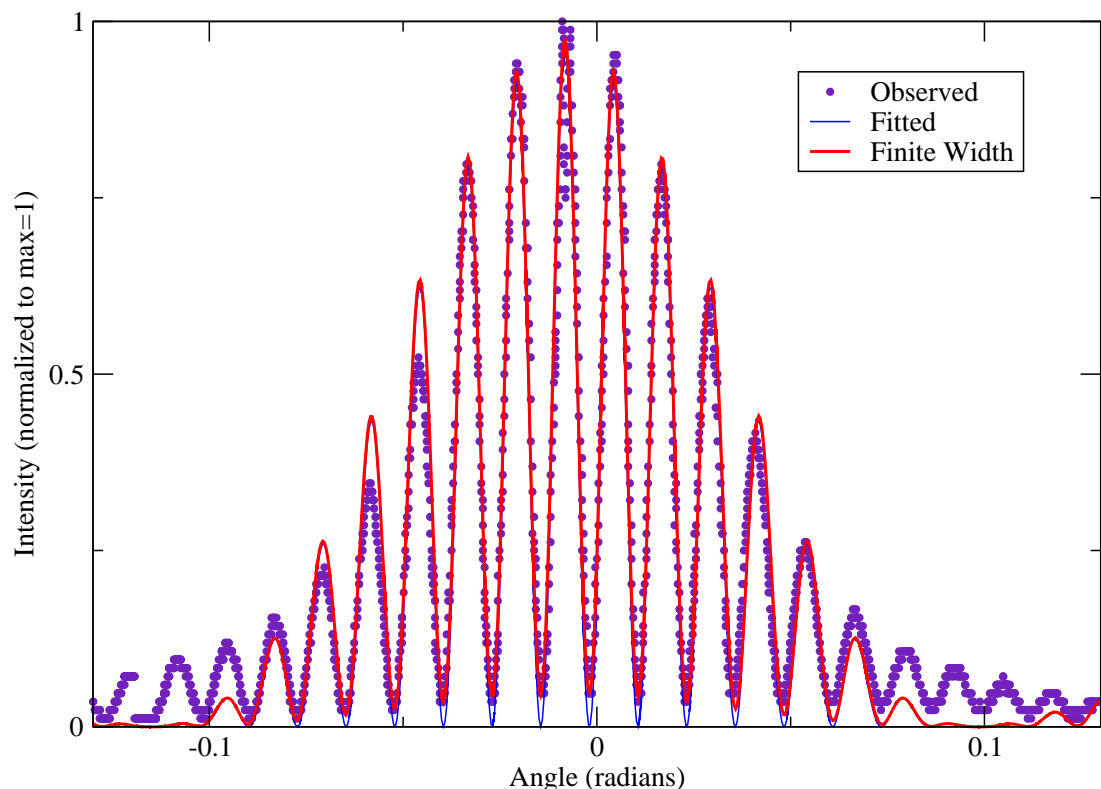
יש ריבועים קטנים שגם דרכם יכול לעבור האור, שמטרתם לעזור לכוון את הלייזר למקום הנכון בשקופית; אלא שכאמור, גם דרכם עובר אור; לכן, כאשר הקרן עברה בסדק מתחת לריבועים האלה, במכפילור נמדד אור בעוצמה גבוהה יותר מאשר בשאר התבנית; ואכן, הסתכלות זהירה בגרף 12 מראה שאין סטייה עקבית לצד אחד, אלא רק באיזור מסויים, השיאים גבוהים יותר. בזמנו, לאחר שגילינו את התופעה הזאת, כיסינו את הריבועים האלה באיזולירבנד, ואכן הבעיה נפתרה. נראה, אם כן, כי זהו ההסבר לחוסר הסימטריה בגרף של זוג הסדקים. כמובן שייתכן גם שיש צירוף של כמה מהגורמים הנ"ל.

### 3.3 אי התאפסות בנקודות ההתאפסות

השערה אחת להסבר התופעה היא שאולי לוקח למכפילור זמן להגיב לשינויי העוצמה. לכן, סביב מרכז הסדק, כאשר הפרשי העוצמה בין השיאים לנקודות ההתאפסות מאד גדולים, לא מספיק המכפילור להגיע לגמרי לאפס עד שכבר מגיע השיא הבא. לעומת זאת, ככל שפונים לצדדים, עוצמות המקסימום יורדות, ולכן המכפילור מספיק לרדת יותר ויותר עד האפס לפני שמגיעים לשיא הבא. ואולם, לפי הסבר זה, אמורה התופעה להיעלם כאשר המדידה נעשית באיטיות רבה מאד. ניסינו זאת, והתופעה לא השתנתה. לכן נראה שזהו איננו ההסבר לתופעה.

השערה אחרת היא שהתופעה נובעת מהרוחב הסופי של המכפילור: המכפילור מן הסתם קולט זיית מסויימת, ולא נקודה בודדת בכל נקודה ונקודה. כאשר נקודת מינימום נמצאת בן שיאים גבוהים, כבר

קרוב מאד למינימום צריכות להיות עוצמות ניכרות, ואלו נקלטות קצת ע"י המכפילור אפילו כשהוא מכוון ישירות אל המינימום. לעומת זאת, כאשר השיאים סביב המינימום אינם גבוהים כל כך, הרי שעליית העוצמה תהיה הרבה יותר מתונה, ולכן אין הפרעה למדידה בנקודת המינימום. את ההשערה הזאת ניתן לבדוק על ידי חישוב נומרי, שבו בכל נקודה ונקודה לא מחשבים רק את העוצמה באותה נקודה בדיוק, אלא מחשבים את האינטגרל על איזשהו רוחב סופי סביב כל נקודה. תוצאת חישוב לדוגמא מובאת באיור מספר 25. ניתן לראות שהיא תואמת בצורה מצויינת את המדידות עצמן.



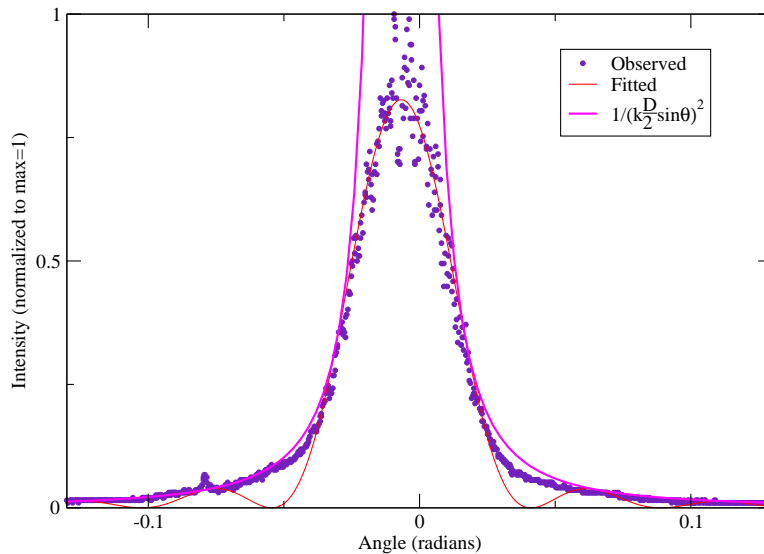
איור 25: חישוב נומרי המתחשב ברוחב הסופי של המכפילור

בגרף רואים חישוב נומרי, הממצע את עוצמת האור ברוחב של 0.003 רדיאנים סביב כל נקודה. הרוחב הזה נמצא ע"י נסיון וטעייה, ואינו מדוייק כל כך. רק כדי לשבר את האוזן, חישבתי את הציין adj-rsquare גם עבור ההתאמה הנ"ל, והציין שהיא קיבלה היה 0.958 (בהשוואה ל-0.954 שהתקבל, כזכור, ללא התחשבות ברוחב הסדק), ושוב - זו רק התאמה משוערת ידנית, ולא התאמה אופטימלית!

### 3.4 אי התאמה עבור זוויות גדולות

לפני שננסה להסביר מה גורם לתופעה, צריך לברר את המאפיינים שלה במדויק. כאמור, התופעה בגדול היא שלא רואים בתבנית של הסדקים הבודדים - או במעטפת של הזוג והסריגים - את נקודות התאפסות, ולא רואים שיאים משניים. במקום זאת, רואים רק ירידה מונוטונית. דוגמאות מובהקות ניתן לראות באיורים 10 (עמוד 15) ו-11 (עמוד 16). ועכשיו לפרטים:

- התבנית של הסדק הרחב נראית בסדר - רואים שם בבירור את ההתאפסויות והשיאים המשניים, ואפילו שיאים שלישיים.
- הסטיות מהתבנית לא תמיד מתחילות בזווית מסויימת - כלומר: לא ניתן לומר: התבנית מתאימה עד זווית כך וכך, ומשם והלאה מתחילות הסטיות; אלא, בכל תבנית, הסטיות מתחילות במקום אחר - אם כי ביחס לכל תבנית ותבנית, הסטייה סימטרית.
- בהמשך לנקודה הקודמת: כאמור, הירידה מהשיא המרכזי היא מונוטונית, ולא גלית, כפי שהיינו מצפים. הנוסחה של המעטפת היא  $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ , וה- $\sin$  הוא מה שגורם לגלים; אבל באמת, רואים שהירידה הולכת הרבה יותר כמו  $\frac{1}{x^2}$  (ראה איור מספר 26). מצד שני, ברור שקרוב למרכז, הסינוס



איור 26: מנקודה מסויימת, הופכת הירידה להיות כמעט כמו  $\frac{1}{x^2}$

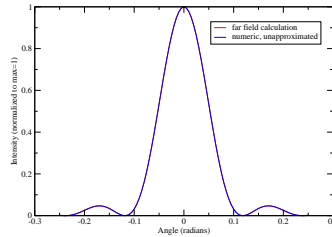
כן משפיע (  $\frac{1}{x^2}$  ) הולך לאינסוף כאשר  $x \rightarrow 0$ , ואצלנו התבנית הולכת שם ל-1, כמו  $(\frac{\sin^2 x}{x^2})$ . הדרך הטבעית להסביר דבר כזה, היא לומר שבהתחלה ה- $\sin$  באמת משפיע, מתחיל מ-0 כאשר  $\theta = 0$ , עד שהסינוס מגיע ל-1, אבל באיזשהו שלב הסינוס פשוט נשאר קבוע ב-1, ולכן משם והלאה התבנית מתאימה ל- $\frac{1}{x^2}$ . אני מדגיש, שאין בכל התיאור הזה הסבר כלשהו לתופעה, אבל זו דרך הסתכלות קצת שונה, ולדעתי מעניינת.

- ועוד, בהמשך לנקודה הקודמת: ניתן לראות שהעוצמה הנמדדת בפועל היא תמיד גדולה או שווה לזו המחושבת - אך אף פעם אינה קטנה ממנה. למעשה, לפי התיאור הנ"ל, זה פשוט משום שהסינוס תמיד נשאר בערך 1, שהוא הערך הגדול ביותר האפשרי.
- בזוג או בסריג, רק המעטפת מתעוותת מהתופעה, ואילו התבנית הפנימית - נשארת בדיוק כמו שהיא אמורה להיות.

כל השערה שתועלה כדי להסביר את התופעה, תצטרך להתחשב בכל המאפיינים האלה.

הסבר אחד שעלה, והוא הסבר שעל פניו נשמע כהסבר הטבעי ביותר, הוא שהקירובים שעשינו נכונים עבור זוויות קטנות, אבל עבור זוויות גדולות יותר הם כבר לא תקפים. אלא שבחינה מדוקדקת של

הקירובים שלנו לא מראה שום נקודה שבה הסתמכנו על זווית קטנות. ומעבר לכך, כאשר שרטתתי את הגרפים לפי החישוב הנומרי (איור מספר 27), שאינו עושה קירובים כלל, התבניות עבור הסדקים האלה מתאימים בדיוק לאלה הנובעים מהנוסחה המקורבת, כולל, כמובן, כל ההתאפסויות והשיאים המשניים. לכן, הבעיה אינה נעוצה בקירוב.



איור 27: קירוב far field, וחישוב נומרי לאותה תבנית

כן, זו לא טעות - אכן יש פה שני גרפים שונים! זה רק מדגיש עד כמה קירוב פראנהופר הוא מצוין עבור הניסויים בלייזר. הגרפים המשורטטים הם עבור נתוני הסדק הצר. ולענייננו, ניתן לראות בבירור שגם לפי החישוב הנומרי, שאינו עושה קירובים, ההתאפסויות והשיאים המשניים לא נעלמים.

הצעה אחרת שעלתה, היא שהתופעה נובעת מהמיצוע שתואר בחלק הקודם. אולי יש איזושהו אופן שבו המיצוע משפיע בצורה גדולה יותר ככל שהזווית גדלה. אבל ראשית, לא שמעתי הסבר משכנע לאיך בדיוק תתרחש השפעה כזאת. ושנית, מהעובדה שהתבנית הפנימית בזוג, למשל, נשמרת, לא נראה לי הגיוני שתהליך המיצוע יהרוס את המעטפת, בלי לעוות את התבנית הפנימית (כלומר, כל הסבר שלוקח את התבנית הנתונה כפי שחישבנו, וגורם לעיוות של התבנית, ישפיע באותה מידה על כל מאפייני התבנית; צריך למצוא איזושהו הסבר שכבר תוך כדי יצירת התבנית יגרום לעיוות, ויבחין בין מה שגורם למעטפת לבין מה שגורם לשאר מאפייני התבנית).

השערה אחרת היא שאולי העובדה שמדובר פה בשקופית שמצויר עליה סדק - ולא בסדק אמיתי (כלומר, חור שאין בו כלום) - גורמת אולי לעיוותים. למשל, אולי התווך שבשקופית גורם לשבירות שונות של הקרן בזוויות גדולות יותר. הסבר זה נשמע די סביר, רק ששוב - קיימת הבעיה להסביר למה התבנית הפנימית אינה מושפעת. כמו כן, אילו זה היה המצב, הייתי מצפה לראות את העיוות קורה בזווית קבועה, בלי קשר לתבנית, ולא כפי שנצפה. כמובן שניתן לבדוק את ההסבר על ידי שימוש בסדק אמיתי, ולראות אם התופעה עדיין קיימת.

הסבר אחר, שבתחילה נראה לי בכיוון הנכון, הוא שאי-דיוקים בסדק עצמו - כגון סדק שאינו ברוחב אחיד לכל אורכו - הם הגורמים לעיוות. ראשית, זה יכול להסביר למה בסדק הרחב לא רואים את התופעה, ובשאר הסדקים כן: נניח שאי-דיוקים האלה הם מסדר גודל קבוע - מן הסתם גודל שקשור ביכולת הייצור של הסדק. סדר הגודל של הסטיות יהיה לכן לכל הסדקים, אבל הסטייה היחסית לא תהיה גדולה עבור סדק רחב, בעוד שעבור סדקים צרים יותר, הסטייה תהיה הרבה יותר מורגשת. לכן נצפה לראות עיוותים רק עבור הסדקים הצרים יותר. שנית, ההסבר הזה יכול להסביר למה העיוות קורה רק במעטפת: המעטפת, כזכור, היא תוצאה של רוחב הסדקים, ואילו התבנית הפנימית - תוצאה של המרחק בין הסדקים. המרחק בין הסדקים תמיד גדול יותר מרוחב הסדקים, כמובן, ולכן יושפע פחות מאי-דיוקים. כך, הצורה של המעטפת תתחיל להשתנות, מבלי להשפיע על התבנית הפנימית. ואולם, כדי לבדוק את ההשערה, חישבתי באופן נומרי את התבנית המתקבלת ממיצוע על רוחב הסדק (כלומר, התבנית שתתקבל מסדק שאין לו רוחב מדויק, אלא התפלגות סביב איזושהו רוחב); ולהפתעתי,

התבנית המתקבלת היא זהה לתבנית של התאבכות מסדק עם רוחב אחיד (רוחב הסדק האחיד שלה מתאימה התבנית תלוי באופן המיצוע - משקול המיצוע יכול לשנות את הרוחב האפקטיבי, אבל בכל מקרה התבנית היא בסופו של דבר תבנית של סדק עם רוחב אחיד). לכן, גם הסבר זה אינו תקף.

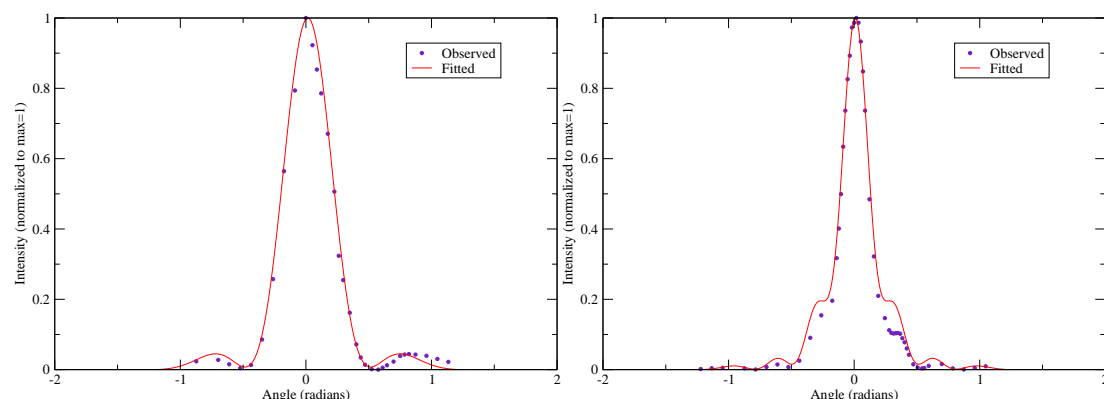
אין לי השערות נוספות להסבר התופעה, אבל היא ללא ספק תופעה אמיתית (זאת לא סתם שגיאה במדידות). בכל המדידות שראיתי גם אצל אנשים אחרים, מתקבלות אותן סטיות, בדיוק באותם המקומות שהן קורות אצלנו, ועם אותם מאפיינים.

### 3.5 ניסויי מיקרו לא מתאימים לתבנית far field

כאמור, לא היינו מצפים להתאמה טובה של המדידות לתבניות המחושבות, שכן החישובים נעשו על סמך קירוב far field, וכפי שראינו, תנאי הקירוב כבר אינם תקפים בניסויי המיקרו. כפי שכבר הסברתי, בעזרת הנוסחה הנומריית ניתן לראות מהן התבניות שהיינו מצפים לראות.

ראשית, ראינו כבר באיור מספר 27, שעבור ניסויי הלייזר, ההתאמה שבין הקירוב לבין החישוב הנומרי היא מצויינת.

עבור החישוב הנומרי, אין לנו כמובן נוסחה מפורשת. לכן לא נעשו התאמות, אלא פשוט הצבתי את כל הגדלים (שהם ידועים לנו) וראיתי מהן התבניות המתקבלות. לכן הגרפים שיובאו להלן לאו דוקא מתאימים בדיוק, אבל ניתן לראות שהצורה הכללית של המדידות אכן מתאימה לצפוי לפי החישוב הנומרי. אורך הגל שהצבתי הוא 2.86 cm, לפי ההתאמות שביצענו בחלק 2.2.2. להלן התוצאות:



סדק בודד, 6 ס"מ

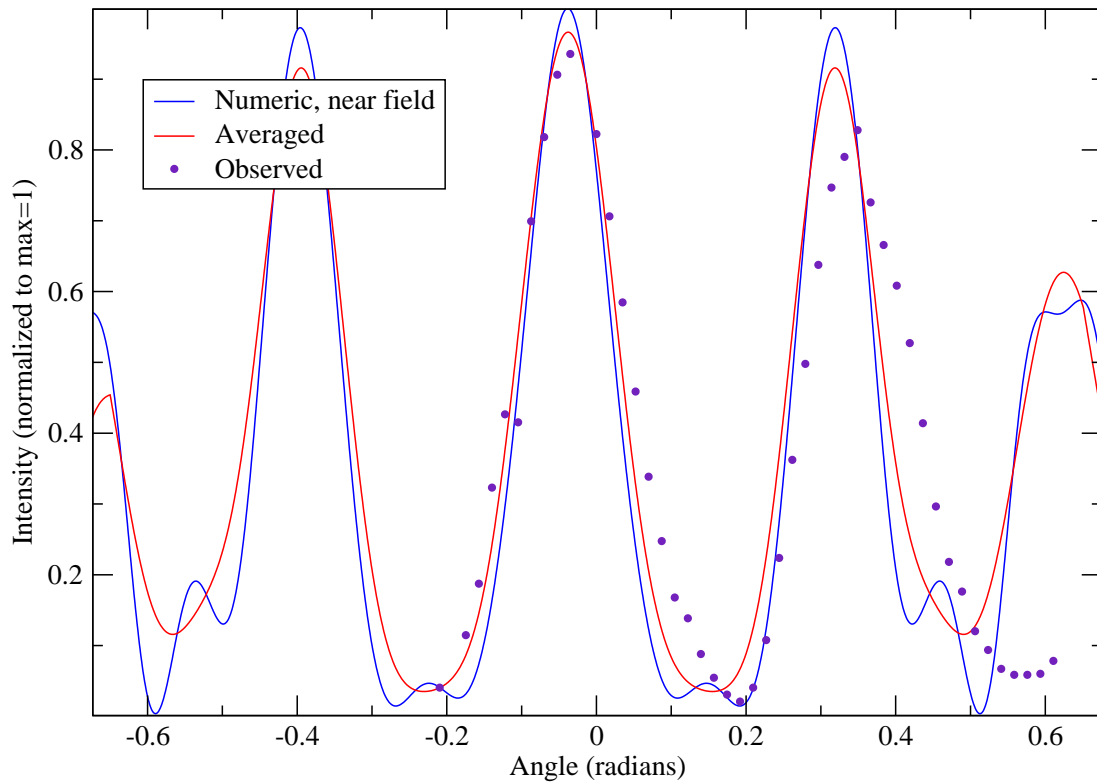
סדק בודד, 12 ס"מ

איור 28: התאמות של המדידות בגלי מיקרו, לתבנית near field (נומרית)

## 4 הערה לגבי חישובי השגיאות

כמעט ולא התחשבתי בדו"ח הזה בשגיאות המדידה. המקום היחיד בו השתמשתי בהם, למעשה, הוא בחישוב השגיאה ברוחבי הסדקים מהמדידות הידניות.

בעיקרון, הדרך לחשב את השגיאה היא לחשב בכל נקודה את הנגזרות החלקיות של הביטוי לערך אותו



איור 29: התאמת סריג בגלי מיקרו לתבנית near field

כפי שניתן לראות, התבנית המתקבלת מהחישוב הנומרי שונה מאוד מזו שקיבלנו בקירוב far field (השווה איור מס' 23). ואולם, גם היא אינה מתאימה במדויק לתצפיות. התוצאה הטובה ביותר מתקבלת אם עושים מיצוע על התבנית שמתקבלת מהחישוב הנומרי.

אנו מחשבים, לפי כל אחד מהפרמטרים, ולפי הערכת השגיאה של כל אחד מפרמטרים אלה:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2 \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0}} + \Delta y_0 \quad (8)$$

כאשר  $y$  הוא הערך המחושב שעבורו רוצים למצוא את השגיאה,  $\Delta y_0$  היא השגיאה במדידת הערך של  $y_0$  באותה נקודה (אם  $y$  הוא ערך נמדד),  $x_i$  הם הפרמטרים השונים בהם תלוי  $y$ . הביטוי כולו מוערך בנקודה מסויימת בה התבצעה המדידה.

אבל בבואנו לחשב את השגיאה עבור רוחב הסדק, אנו נתקלים בכמה בעיות:

- לא ניתן לחלץ מהמשוואות (נוסחה 4, למשל) את הערך אותו אנו מודדים ( $D$ ), ולכן אי אפשר לבטא בצורה מפורשת את הנגזרת החלקית שלו (כזכור,  $D$  מתקבל לא מתוך נוסחה לה אנו מכניסים את המדידות, שאפשר לבוא ולגזור, אלא מתוך "התאמה" לפונקציה, שתלויה בהרבה נקודות שונות). לכן במקרה שלנו אנו בכלל לא יודעים לרשום ביטוי מהצורה של נוסחה 8.
- כאשר יש יותר מביטוי אחד אותו אנו מנסים למצוא (למשל,  $D$  ו- $d$ ), אזי אפילו אם היינו יכולים לבטא בפירוט את הביטוי הנ"ל עבור אחד מהם, הרי שהוא היה מכיל את השגיאה בביטוי השני, בתור אחד מה- $\Delta x_i$  -ים - מה שעוד לא חישבנו!
- גם ללא שתי הבעיות הנ"ל, מה שהנוסחה היתה נותנת לנו, זה את השגיאה ברוחב הסדק עבור כל נקודה בנפרד (הנוסחה הנ"ל היא מקומית!), דבר שהוא לא כל כך בעל משמעות - הרי בסופו של דבר, היינו רוצים לרשום שמצאנו את רוחב הסדק בדיוק של כך וכך, ולא שגיאה אחרת לכל אחת מאלף או אלפיים נקודות המדידה: כלומר, צריך לשקלל באיזשהו אופן את השגיאה שנקבל בכל נקודה ונקודה, ואין לי מושג איך לעשות את זה. לכן, כל הגישה הנ"ל היא לא רלוונטית לענייננו.

יש שהציעו לקחת את הערכות השגיאה שההתאמה עצמה נותנת: תוכנות שונות שעושות התאמה נותנות לכל פרמטר מותאם הערכת שגיאה (ב-Matlab, למשל, קוראים לזה "Confidence bounds"). אבל לא ייתכן שערך זה הוא באמת מה שאנו מחפשים: ההערכה הזאת לא מתייחסת בכלל לשגיאות המדידה שלנו (היא אפילו לא יודעת מהן הערכות השגיאה של הפרמטרים הנמדדים!), אלא מבוססת על כל מיני הנחות סטטיסטיות שנובעות מתוך המידע עצמו, וזה בכלל לא מה שאנו מחפשים. לכן גם הצעה זו אינה רלוונטית. (הערכות השגיאה האלה הן בהחלט חשובות - הן עוזרות להעריך עד כמה התאמה מסויימת היא טובה או לא, אבל זה משהו אחר לגמרי ממה שאנו רוצים<sup>7</sup>).

הצעה טובה ששמעתי, היא להסתכל על כל הבעיה מזווית קצת שונה: הרי בסופו של דבר, הסיבה שאנו רוצים לקבל הערכות שגיאה, זה כדי שנוכל לדעת אם המדידות שלנו מתאימות לתיאוריה, והסטיות כולן נובעות רק משגיאות המדידה; או שמא, יש נקודות שנמדדו, שאפילו לאחר ההתחשבות בשגיאה, הן עדיין לא מתאימות לתיאוריה, ואז זה מרמז על כך שהתיאוריה אינה שלמה (גורמים נוספים שלא התחשבנו בהם, או במקרים קיצוניים - תיאוריה שגויה). לכן, אין באמת חשיבות לכך שניתן מספר אחד, שהוא הערכת השגיאה שלנו לרוחב הסדק - לא זה מה שמעניין. מה שכן מעניין אותנו, זה לחשב בכל נקודה ונקודה את השגיאה הצפויה ביחס לתיאוריה, ולראות אם הנקודה אכן נופלת בטווח השגיאה. לשם כך, במקרה של סדק בודד, למשל, ניתן לפעול בצורה הבאה: עבור כל נקודה ונקודה, נחשב את

<sup>7</sup>help של Matlab (שהוא, ככלל, מצויין - הוא יכול להוות בסיס לקורס בפני עצמו) מסבירים שהמשמעות של ה- confidence bounds היא זאת: תחת הנחות של התפלגויות נורמליות וכו', טווח השגיאה המחושב הוא זה שעבור מדידה חדשה שתבצע, יש סיכוי של 95% (או אפשר לבקש חסם לכל אחוז אחר) שהיא תתאים לערך של הפרמטר בטווח השגיאה הנתון.

השגיאה הצפויה ברוחב הסדק באותה נקודה (הבעיה של חילוץ ביטוי מפורש עדיין קיימת, ולכן לא נוכל בפועל לעשות זאת; אבל אולי ניתן להעריך את הנגזרות החלקיות בצורה נומרית, אפילו בלי לחלץ ביטוי מפורש...). לצורך זה נצטרך את השגיאה של הערך הנמדד (העוצמה). לאחר מכן, נוכל לחשב את השגיאה הצפויה בחישוב הערך הנמדד (כלומר שוב העוצמה, אבל הפעם זה לא מדידת העוצמה אלא חישוב העוצמה מתוך שאר הפרמטרים), בהינתן השגיאה שמצאנו עבור הפרמטר (רוחב הסדק). כעת יש לנו שני גדלים בכל נקודה: טווח שגיאה של המדידה - שנותן לנו תחום מסביב לנקודת המדידה, וטווח שגיאה של חישוב המדידה, שנותן לנו תחום סביב ערך הפונקציה המחושבת באותה נקודה. אם שני התחומים האלה חופפים, הרי שהמדידה מתאימה לתיאוריה, ואם לאו - אז לא. כאמור, נראה לי שאז דרך נכונה לעבוד, אבל שוב - היא לא מעשית בגלל הבעיות האחרות.

הסיבה שבמדידות הידניות בכל זאת הצלחתי לקבל הערכה לשגיאה ברוחב הסדק, היא משום ששם השתמשתי בנוסחה אחרת לגמרי למציאת הרוחב: שם ביססנו את החישוב על המרחק בין נקודות ההתאפסות, ואז אכן יש לנו נוסחה שניתן לחלץ ממנה מפורשות את  $D$ . כמו כן, שם קודם כל מצאתי את המרחק הממוצע בין כל שתי נקודות התאפסות, וקיבלתי הערכה על השגיאה של זה; כעת, יש לנו מספר אחד - המרחק בין נקודות התאפסות - ולא אוסף של נקודות נמדדות; ואם מציבים את הגודל האחד בנוסחה, מקבלים הערכת שגיאה לרוחב הסדק, בצורה הרגילה לפי הנגזרות.

## 5 סיכום

בניסויים אלה עמדנו על תופעת ההתאבכות. פיתחנו את הנוסחאות עבור קירוב far field, וראינו שעבור קרני לייזר - מקרה העומד בתנאי הקירוב - מתקבלת התאמה יפה מאוד של התיאוריה למציאות. ישנה תופעה אחת שאין אנו יודעים להסביר, והיא שעבור סדקים צרים, לא מתקבלות נקודות ההתאפסות כפי שהיינו מצפים. נושא זה צריך עיון נוסף.

עבור הניסויים בגלי מיקרו, שאינם עומדים בתנאי קירוב פראנהופר, חישבנו בצורה נומרית את התבנית הצפויה, ואכן התקבלה התאמה יפה לתיאוריה. פרט מעניין לגבי זה, הוא העובדה שעל אף שהניסויים אינם עומדים בתנאי הקירוב, הרי שההתאמה לקירוב עדיין נותנת עבור הפרמטר שחיפשנו - אורך הגל - ערכים עקביים להפליא. כנראה שאפילו שהקירוב אינו מתאים לפרטים, הצורה הכללית שלו מספיק קרובה לתבנית האמיתית, כדי שניתן יהיה לחלץ ממנו מידע זה.