

דו"ח מעבדה

מעגלי RC ו-RLC

דב פלדשטרן

15 בינואר 2003

1 מטרת הניסוי

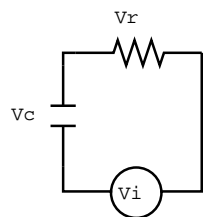
בניסוי זה אנו נבחן את התנהגות המתח במעגלים שבהם מחוברים בטור נגדים, קבלים וסלילים, אל מקור מתח קבוע או משתנה. מסתבר שאפילו בחיבור פשוט בטור של הרכיבים הנ"ל, ניתן לראות שפע תופעות מעניינות. בניסוי נראה חלק מהתופעות האלה, נמדוד אותן באופן כמותי, ונשווה לנוסחאות התיאורטיות המתארות את התופעות.

2 הקדמה תיאורטית

2.1 מעגלי RC

2.1.1 פריקה וטעינה של קבל

המשוואה המתארת את המתחים במעגל RC, לפי חוקי קירכהוף, נראית כך:



$$V_i = V_R + V_C$$
$$V_i = IR + \frac{Q}{C} = \dot{Q}R + \frac{Q}{C}$$

ניתן לראות כי זו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון ב- Q . עבור מתח כניסה $V_i = 0$, וקבל טעון בטעינה התחלתית Q_0 , מתקבל הפתרון $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. הפתרון מראה לנו שהקבל, הטעון במטען התחלתי כלשהו, פורק את המטען שלו בצורה אקספוננציאלית. הזמן האופייני של הפריקה נקבע על ידי הפרמטרים R ו- C - ההתנגדות במעגל והקיבול של הקבל - לפי הקשר הנ"ל (בפריקה; בטעינה הביטוי הוא $Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$; מכאן והלאה נתייחס לפריקה, והכל נכון עבור הטעינה עד כדי $(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$). נבחין בכך שהמטען בזמן $t = 0$ שווה ל- Q_0 ועם הזמן הולך ושואף ל-0, אבל - באופן תיאורטי - לעולם אינו ממש מגיע

ל-0. נוכל בכל זאת להגדיר באופן שרירותי איזשהו חסם $0 < p < 1$, ונאמר שמבחינתנו כאשר $e^{-\frac{t}{RC}} < p$ אזי הקבל נפרק לגמרי. עכשיו נוכל להגדיר את זמן הפריקה האופייני של המעגל להיות $t_d = -RC \ln(p)$.

2.1.2 מתח כניסה מחזורי

כאשר מתח הכניסה אינו קבוע אפס, ההתנהגות הופכת להיות מורכבת יותר, בהתאם לצורת מתח הכניסה. נניח שמתח הכניסה משתנה בצורה מחזורית (כרגע לא משנה לנו הצורה המדוייקת של הגל הנכנס), ונבחן מה קורה:

כפי שראינו, ניתן להגדיר את זמן הפריקה האופייני של הקבל t_d . כעת, נוכל להשוות את זמן המחזור τ של מתח הכניסה לזמן הפריקה של הקבל:

- כאשר $\tau \gg t_d \propto RC$, כבר בתחילת המחזור יספיק הקבל להיטען או להיפרק לחלוטין, כלומר להשתוות למתח הכניסה, ולכן רוב הזמן יהיה המתח על הקבל שווה למתח הכניסה.
- לעומת זאת, כאשר $\tau \ll t_d \propto RC$, הקבל כמעט ולא יספיק להיטען ולהיפרק עד שמתח הכניסה ישתנה שוב, ולכן הקבל כמעט ולא יהיה מורגש במעגל: לכן דווקא המתח על הנגד יהיה שווה למתח הכניסה.

למעשה, במקרים המתוארים לעיל תתקבל תופעה מאד מעניינת. נחזור רגע למשוואות המתחים במעגל: ראינו שכאשר מתקיים התנאי $\tau \gg t_d \propto RC$, אזי $V_i(t) = V_C(t)$, ומשוואת המתחים במעגל תהיה:

$$\begin{aligned} V_i(t) = V_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \quad \backslash \quad \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} V_i(t) &= \frac{\frac{d}{dt} Q(t)}{C} = \frac{\dot{Q}}{C} \quad \backslash \quad \cdot RC \\ RC \frac{d}{dt} V_i(t) &= \dot{Q} R = V_R(t) \\ V_R(t) &\propto \frac{d}{dt} V_i(t) \quad \Leftarrow \end{aligned}$$

ולחליפין, כאשר מתקיים התנאי $\tau \ll t_d \propto RC$, כפי שראינו מתקיים $V_i(t) = V_R(t)$, ולכן משוואת המתחים תהיה:

$$\begin{aligned} V_i(t) = V_R(t) &= \dot{Q} R \quad \backslash \quad \int dt \\ \int V_i(t) dt &= Q(t) R \quad \backslash \quad : RC \\ \frac{1}{RC} \int V_i(t) dt &= \frac{Q(t)}{C} = V_C(t) \\ V_C(t) &\propto \int V_i(t) dt \quad \Leftarrow \end{aligned}$$

קיבלנו, אם כן, שבתנאים המתוארים לעיל, מעגל ה-RC יכול לבצע גזירה או אינטגרציה של פונקציה מתח הכניסה: כלומר, נוכל להכניס מתח שמקיים פונקציה לבחירתנו, לדאוג שיתקיים התנאי הדרוש ולמדוד את המתח על הקבל או הנגד, ונקבל את הנגזרת או האינטגרל של הפונקציה הכניסה: זוהי בהחלט תוצאה מאד מעניינת.

2.1.3 מתח כניסה סינוסואידי

מקרה פרטי של מתח כניסה מחזורי הוא מתח כניסה סינוסואידי. כל מה שאמרנו לעיל לגבי מתח מחזורי, תקף כמובן גם לגבי המקרה הזה; אבל כאשר מתח הכניסה הוא פונקציה מסויימת ידועה, אפשר גם לפתור את המשוואה במדויק. אין טעם להיכנס פה לפיתוח המתמטי, רק נאמר שהפתרון המתקבל במקרה של מתח כניסה $V_0 \cos \omega t$ הוא:

$$Q(t) = \frac{V_0}{R\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{(RC)^2}}} \cos(\omega t - \phi)$$

כאשר מוגדר $\tan \phi = \omega RC$. ברור שהמשרעת המקסימלית תתקבל כאשר ה-cos שווה לאחד; ואם נרצה את המתח על הקבל, נקבל:

$$V_{C_{max}} = \frac{Q_{max}}{C} = \frac{V_0}{RC\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{(RC)^2}}} = \frac{V_0}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

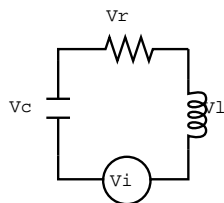
ועל הנגד:

$$V_{R_{max}} = \dot{Q}_{max} R = \frac{V_0 \omega R}{R\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{(RC)^2}}} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}$$

2.2 מעגלי RLC

2.2.1 מתח כניסה קבוע ללא התנגדות

כאשר מוסיפים למעגל RC גם סליל, יש לנו גורם נוסף שמשפיע על התנהגות המעגל: לסליל יש השראות, המתנגדת לשינויי הזרם במעגל. מחוקי קירכהוף, נקבל את משוואת המתחים הבאה:



$$V_i(t) = V_L(t) + V_R(t) + V_C(t)$$

$$V_i(t) = L\dot{I} + IR + \frac{Q}{C} = L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C}$$

שוב קיבלנו משוואה דיפרנציאלית ב-Q, הפעם מסדר שני. נתחיל מניתוח התנהגות המעגל כאשר מתח הכניסה $V_i(t) = 0$, ולשם הפשטות, נניח תחילה גם שאין התנגדות, כלומר $R = 0$. במקרה כזה, מתקבלת המשוואה $\ddot{Q} = -\frac{Q}{LC}$. זוהי משוואת תנועה הרמונית; נניח שהמעגל נסגר בזמן $t = 0$, כאשר על הקבל מטען Q_0 , אזי פתרון המשוואה יהיה $Q_0 \cos(\omega_0 t)$, כאשר $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. המשמעות של הפתרון הזה היא שהאנרגיה האצורה בקבל ברגע סגירת המעגל עושה אוסצילציות בין הקבל לסליל וחזרה, ותדירות האוסצילציות תלויה בקיבול ובהשראות.

2.2.2 מתח כניסה קבוע עם התנגדות

כאשר ההתנגדות במעגל אינה אפס, אזי יש דיסיפציה הגורמת לאיבוד אנרגיה במעגל. פתרון המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה¹ מראה לנו שיש להבדיל בין כמה מצבים, התלויים בגודל ההתנגדות:

- תת-ריסון: כאשר מתקיים $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, הפתרון המתקבל הוא סינוסואידי דועך - כלומר סינוס עם אמפליטודה דועכת אקספוננציאלית. המשמעות הפיסיקלית היא זו: כפי שכבר הסברנו, האנרגיה במערכת דועכת, ולכן הדעיכה; מצד שני, איבוד האנרגיה הוא איטי מספיק, כדי לאפשר עדיין תנועה מחזורית, כפי שראינו במקרה ללא התנגדות. עם זאת, מפתרון המשוואה רואים שהתנועה המחזורית אינה זהה לזו שקיימת במקרה של מעגל חסר התנגדות: מתקבל שהמהירות הזוויתית היא של המעגל חסר-ההתנגדות, ולכן זמן המחזור - ארוך יותר.

- על-ריסון: כאשר מתקיים $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ מתקבל פתרון דועך אקספוננציאלית, שזהו פולס חולף יחיד.

- ריסון קריטי: כאשר $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ זהו בדיוק הריסון הקריטי. גם בריסון קריטי מתקבל פולס חולף יחיד. הנקודה הזאת מעניינת מבחינתנו בעיקר מפני שהיא בדיוק נקודת המעבר בין התנגדות המרוסנות לבין הדעיכה המהירה.

בכל המקרים כולם, ניתן לראות שלאחר זמן רב, האנרגיה דועכת לגמרי, כמצופה; כלומר $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0$.¹ נתונה המשוואה $\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$. נסמן $b = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, כדי לפתור אותה, מסתכלים תחילה במשוואה האופיינית שלה:

$$r^2 + 2br + \omega_0^2 = 0$$

שפתרונותיה הם

$$r_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

נגדיר $\omega_1 = \sqrt{|b^2 - \omega_0^2|}$. כעת צריך לחלק למקרים:

- אם $b^2 - \omega_0^2 < 0$ מתקבלים שני פתרונות מרוכבים צמודים למשוואה האופיינית, $r_{1,2} = -b \pm i\omega_1$, ולכן הפתרון למשד"פ יהיה

$$Q(t) = e^{-bt} (Q_0 \cos(\omega_1 t))$$

- אם $b^2 - \omega_0^2 > 0$ מתקבלים פתרונות ממשיים למשוואה האופיינית $r_{1,2} = -b \pm \omega_1$, והפתרון המתקבל עבור המשד"פ הוא

$$Q(t) = \mu e^{-r_1 t} + \lambda e^{-r_2 t}$$

כלומר דעיכה אקספוננציאלית.

- עבור $b^2 - \omega_0^2 = 0$ מתקבל פתרון ממשי כפול $r = -b$, והפתרון למשד"פ הוא $(\mu + \lambda t)e^{-bt}$.

עד כאן דנו במקרה שבהם מתח הכניסה הוא אפס. נציין רק שכאשר מתח הכניסה הוא ריבועי, עם זמן מחזור ארוך יחסית לזמני הדעיכה, אזי נוכל לראות את התופעות המתוארות לעיל, כי יחסית לזמני הדעיכה, המתח הוא למעשה קבוע.

2.2.3 תנודות מאולצות

כאשר מתח הכניסה אינו קבוע, אלא סינוסואידי, ההתנהגות תהיה שונה מזו המתוארת לעיל. ראשית, די ברור שהאנרגיה לא תדעך לחלוטין, כי מתח המקור כל הזמן מכניס עוד אנרגיה למערכת, ולכן נצפה לראות זרם יציב במעגל, שלא ידעך. כמו כן, אנו מניחים שיהיו לנו תנודות מחזוריות, עם זמן מחזור כמו זה של מתח הכניסה - שהרי הוא המאלץ את המערכת. בנוסף, אנו יודעים שההתנגדות גורמת ל"עיכוב" של ההשפעות של הרכיבים השונים זה על זה, ולכן נצפה לראות הפרשי פאזות בין הרכיבים השונים.

מפתרון מדויק של המשוואה² ניתן לראות את כל התופעות שתיארנו לעיל:

הפתרון בצורתו הכללית יהיה מורכב מהפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית ועוד הפתרון הפרטי של המשוואה. ראינו כבר שהפתרון הכללי למשוואה ההומוגנית תמיד דועך (תוך כדי תנודות או בלעדית, אבל תמיד דועך), ולכן לאחר זמן מסויים ניוותר רק עם הפתרון הפרטי. החלק הדועך נקרא transient, והוא פחות מעניין אותנו פה. אנו נתעניין בחלק הקבוע, שהוא

$$Q(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t - \phi)}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} = \dots = \frac{V_0 \cos(\omega t - \phi)}{\omega \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}$$

רואים שהפתרון הזה הוא אכן מחזורי, וזמן המחזור שלו זהה לזמן המחזור של מתח הכניסה. וכפי שציפינו, אכן יש הפרש פאזה $\phi = \arctan\left(\frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}\right)$ בין המתח על הקבל למתח הנכנס, והוא אכן נובע מההתנגדות (כשאינן התנגדות, הפרש הפאזה הוא אפס). אם כן, כל התחזיות שלנו באות לידי מימוש בפתרון המשוואה.

כמובן שאם אנו מתעניינים במתח על הקבל, קל לבטא אותו בעזרת הפתרון, שכן $V(t) = \frac{Q(t)}{C}$; ואם אנו רוצים לדעת רק את גודל המשרעת - כלומר המתח המקסימלי בכל מחזור - הוא מתקבל כמובן כאשר \cos -שווה ל-1.

²ובכן, נתונה המשוואה $\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{V_0}{L}\cos\omega t$. פתרון כללי של המשוואה מורכב מפתרון כללי של המשוואה ההומוגנית (ובכך טיפלו בסעיף הקודם) ומפתרון פרטי של המשוואה הזאת. נחפש אם כן את הפתרון הפרטי. נהפוך את המשוואה למרוכבת, ובסופו של דבר נתייחס רק לחלק הממשי של הפתרון; וכמקודם, נגדיר $b = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$:

$$\ddot{Q} + 2b\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{V_0}{L}e^{i\omega t}$$

הפונקציה האונסת היא מהצורה $Ae^{(\alpha+i\beta)t}$, כאשר $A = \frac{V_0}{L}$, $\alpha = 0$, $\beta = \omega$. אינו פתרון של הפולינום המאפיין (אותו אחד שראינו בטיפול ההומוגני) ולכן הפתרון הפרטי יהיה מהצורה $\tilde{Q}(t) = \tilde{C}e^{i\omega t}$. מכאן ניתן לחשב את \tilde{Q} , ולהציב הכל למשוואה. לאחר צמצום $e^{i\omega t}$ יתקבל $-\omega^2\tilde{C} + 2bi\omega\tilde{C} + \omega_0^2\tilde{C} = \frac{V_0}{L}$ ומכאן ניתן לחלץ $\tilde{C} = \frac{V_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2 + 2bi\omega)}$. את המכנה (המרוכב) נוכל לרשום בצורה פולרית $r e^{i\phi}$, כאשר $r = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}$ ו- $\tan\phi = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$. כעת נציב הכל חזרה בפתרון ונקבל

$$\tilde{Q}(t) = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} \cdot e^{i\phi}} = \frac{V_0 e^{i(\omega t - \phi)}}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

לקיחת החלק הממשי של פתרון זה נותן לנו את הפתרון הפרטי המבוקש:

$$Q(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t - \phi)}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

תופעה מאד מעניינת שמתקבלת בהקשר זה היא "תהודה": מהמשוואות ניתן לראות שיש תלות של המתח על הקבל ב- ω - תדירות המתח הנכנס ולמען הדיוק, המהירות הזוויתית, אבל הם כמובן מתכונתיים זל"ז. השאלה המתבקשת היא: מהי התלות הזאת? אם כן, ניתן לראות שבתוך השורש שבמכנה מתקבל מינימום כאשר $\omega = \omega_0$, כלומר כאשר התדירות של המתח הנכנס שווה בדיוק לתדירות העצמית של המעגל (זו המתקבלת כאשר המעגל מתנווד ללא התנגדות או כח מאלץ), וכאשר זה קורה, יהיה מקסימום של הביטוי כולו³. זה גם נשמע די סביר, כי יש להניח שכאשר הכח המאלץ הוא בדיוק באותה תדירות שהמעגל "רוצה" להתנווד בה, תתקבל התגובה החזקה ביותר. כמו כן, מהנוסחה להפרש הפאזה ϕ ניתן לראות שעבור תדרים מאד נמוכים, כמעט ולא יהיה הפרש פאזה; בתדירות התהודה, המכנה יתאפס, והזווית שתתקבל היא $\frac{\pi}{2}$; וככל שהתדרים יגדלו - כך ילך הפרש הפאזה וישאף ל- π , שזהו הפרש פאזה של חצי זמן מחזור.

יש לנו עכשיו כל הכלים כדי לגשת לניסויים עצמם.

3 ביצוע הניסוי

3.1 מעגלי RC

3.1.1 מעגלי אינטגרציה וגזירה

בשלב ראשון, רצינו לראות את צורות ההתנהגות השונות של המעגל עבור אורכי מחזור שונים של המתח הנכנס יחסית לזמן האופייני של המעגל. תחילה חשבנו לנסות לקחת צירופים שונים של התנגדויות וקבלים וע"כ לשנות את הזמן האופייני, ולהכניס מתח ריבועי בתדירות קבועה. אולם מהר מאד הסתבר לנו (ובעזרתו של שמואל) שהרבה יותר נוח לבחור נגד וקבל שייתנו זמן אופייני כזה, שע"י שינוי זמן המחזור של מתח הכניסה נקבל את היחסים הרצויים. זה נוח יותר הן מבחינה טכנית (צריך רק להזיז מחוג במקום לבנות כל פעם מעגל חדש), והן מפני שיש לנו רצף הרבה יותר גדול של זמני מחזור של מתח הכניסה (כ-10 סדרי גודל), לעומת מספר קטן של צירופים שונים של קבל ונגד. לכן בחרנו קבל ונגד ובדקנו עבור מתחי כניסה בתדירויות שונות. לעתים נאלצנו בכל זאת לקחת גם צירופים אחרים של קבל ונגד, למשל כי עבור תדירויות מאד נמוכות, התמונה המתקבלת באוסצילוסקופ היא איטית מאד; כמו כן, לעתים קרה שנאלצנו לבצע בדיקה מסויימת שוב בפעם אחרת, ולא תמיד ניתן היה למצוא בדיוק אותם רכיבים. להלן הבדיקות שנעשו במעגל הבנוי מהרכיבים הבאים (שתי התמונות הראשונות ושתי התמונות האחרונות בטבלה 1 שייכות למעגל זה); עבור כל תדירות, בדקנו כמה צורות גל שונות:

$$RC = 3.2 \cdot 10^{-3} s ; C = 47 nF ; R = 69 k\Omega$$

תוצאות	זמן מחזור (τ)	מתח נכנס (f)	תדירות נכנס (f)
רואים גזירה במדידה על הנגד, כצפוי עבור $\tau \gg RC$	$1s$	$1Hz$	$1Hz$
רואים על הנגד מתח קרוב למתח הכניסה, שכן $\tau \approx RC$	$10^{-3}s$	$1kHz$	$1kHz$
לא נצפה מתח על הקבל כלל	$10^{-5}s$	$100kHz$	$100kHz$

במהלך ביצוע הניסוי, אכן ראינו את התוצאות המצופות בשני המקרים הראשונים. לעומת זאת, במקרה האחרון, שבו $\tau \ll RC$, ציפינו לראות אינטגרציה, ואילו בפועל נראה היה שאין על הקבל מתח כלל! סיבה

³ אך ראה להלן בעמוד 13

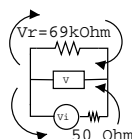
אחת שיכולה לגרום לכך, היא שבתדירויות גבוהות, יש הנחתה של המתח על הקבל - כלומר המתח על הקבל הוא קטן הרבה יותר מהמתח הנכנס. ניתן להסביר זאת גם כפי שתיארנו בהקדמה התיאורטית: כאשר זמן המחזור קצר מאוד, הקבל כמעט ולא מספיק להיטען או להיפרק, ולכן כל המתח הוא למעשה על הנגד, ואילו על הקבל - לא יהיה מתח כלל. כדי לראות בכל זאת אינטגרציה, הורדנו בהדרגתיות את התדירות, תוך כדי בדיקת המתח על הקבל. בסופו של דבר, אכן ראינו את תופעת האינטגרציה המבוקשת, בתדר של $3.3kHz$. אבל אפילו בתדר הזה, התופעה מאוד חלשה, והמתח על הקבל הוא קטן ביותר. העובדה שקיבלנו אינטגרציה בתדירות זו היא קצת מפתיעה - לכאורה זהו עדיין המקרה בו $\tau \approx RC$, שכן $\tau = \frac{1}{f \cdot 10^3}$ וגם $RC \approx 10^{-3}$! ראשית העלינו השערה כי ההתנגדות במעגל גדולה ממה שחשבנו (ואז RC היה גדול יותר, ולכן היה מתקיים $\tau \ll RC$), אולם מדידה הראתה שההתנגדות במעגל מתאימה בדיוק למצופה⁴, כלומר יחסי הגודל הלכאורה מפתיעים נותרו בעינם! ואולם, בדיקה מדוייקת של הגדלים מראה שהיחס בין הגדלים הוא בעצם $\frac{\tau}{RC} = \frac{1/(3.3 \cdot 10^3)}{3.2 \cdot 10^{-3}} \approx 0.1$, כלומר יש הפרש של סדר גודל שלם בין שני הגדלים, ולכן אכן ניתן לומר ש $\tau \ll RC$. ניתן ללמוד מכאן כמה לקחים: ראשית, כשעושים בדיקה של סדרי גודל, לפעמים צריך להסתכל לא רק על סדר הגודל, אלא גם על המספר עצמו; ושנית, כשאומרים "גדול מאוד" או "קטן מאוד", לפעמים אפילו סדר גודל אחד הוא מספיק כדי לקיים תנאי כזה. ושלישית, כשאנו אומרים שבתדירויות גבוהות מתקבלת תמונת אינטגרציה, זה נכון - אבל כשהתדירויות מאד גבוהות, המתח הוא כל כך קטן שלמעשה לא מתקבל מתח כלל...

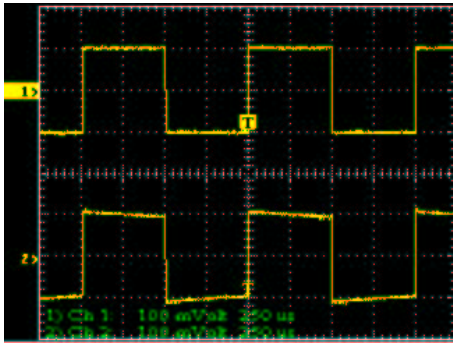
בטבלה 1 נמצאים כמה תרשימים (שהועברו ישירות למחשב ל-WaveStar) של בדיקות נוספות שנעשו כדי להדגים את תופעות הגזירה והאינטגרציה.

3.1.2 הנחתת מתח

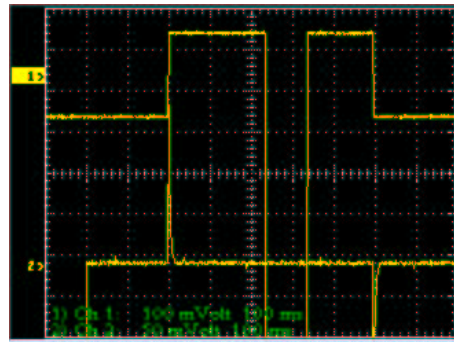
דבר נוסף שרצינו לבדוק במעגל ה-RC, הוא לראות את ההנחתה שעל הקבל: כפי שכבר הסברנו, עבור תדירויות נמוכות הקבל מספיק להיטען כבר בתחילת המחזור, ולכן רוב הזמן המתח על הקבל יהיה שווה למתח הנכנס. ככל שהתדירות של המתח הנכנס עולה, כך מספיק הקבל להיטען פחות לפני שהמתח הנכנס כבר מתחיל ליפול חזרה, ולכן המתח המקסימלי שיימדד על הקבל ילך ויקטן ככל שהתדירות גדלה. על הנגד נראה תופעה הפוכה: בתדירויות נמוכות הקבל נטען מיד, ולמעשה מקצר את המעגל, ולכן על הנגד לא יהיה מתח; וככל שהתדירות גדלה, כך המתח המקסימלי שעל הנגד ילך ויגדל. כדי לראות את התופעה, מדדנו את המתח המקסימלי על הקבל ועל הנגד בתדירויות שונות של מתח כניסה סינוסואידי. בטבלה 2 מוצגות התוצאות. (מדובר באותו מעגל שבו נעשו המדידות הקודמות, דהיינו $R = 69k\Omega$; $C = 47nF$; $V_i = 105mV$; $RC = 3.2 \cdot 10^{-3}s$; מתח הכניסה הוא $V_i = 105mV$.)

⁴ גם לגבי המדידה הזאת היה סיפור: כשעלתה ההשערה שההתנגדות גדולה ממה שמדדנו על הנגד עצמו, הכוונה היתה לכך שכנראה יש במעגל מקור התנגדות נוסף (אמנם ידוע שלמחולל התדרים התנגדות של כ-50Ω, אולם הגודל הזה זניח ביחס ל-69kΩ של הנגד, וחשבנו שאולי יש עוד משהו). כדי לבדוק זאת, חיברנו את המולטימטר למעגל, ומדדנו את ההתנגדות. בתחילה מדדנו כשמחולל התדרים עצמו היה מחובר למעגל (הרי רצינו למדוד גם את ההתנגדות שלו), והתוצאה שהתקבלה היתה מפתיעה מאד - 50Ω בלבד! לעומת זאת, כשניתקנו את מחולל התדרים, אכן התקבלה התנגדות של 69kΩ. ההסבר שהגענו אליו הוא כזה: כאשר מחולל התדרים היה מחובר, הזרם היה יכול לזרום במעגל בשני כיוונים: בכיוון של הזרם במעגל, כפי שאכן התכוונו וציפינו, אבל גם בכיוון השני, דרך מחולל התדרים עצמו: בכיוון אחד ההתנגדות היתה 69kΩ, ובשני רק 50Ω - לכן ברור שהזרם בחר לזרום בכיוון בו ההתנגדות קטנה יותר, ומדד רק 50Ω. כאשר מחולל התדרים לא היה מחובר, אז באמת לא היתה ברירה אלא לזרום בכיוון השני, בו ההתנגדות אכן היתה 69kΩ. לענייננו, מכל מקום, הסתבר שמדידות ההתנגדות שלנו אכן היו נכונות.

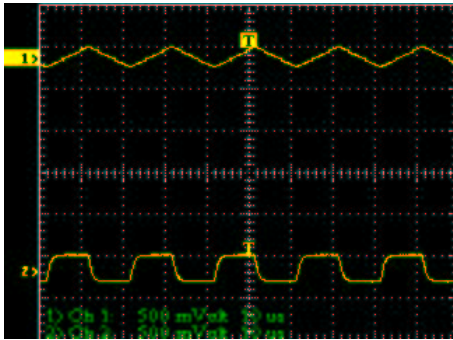




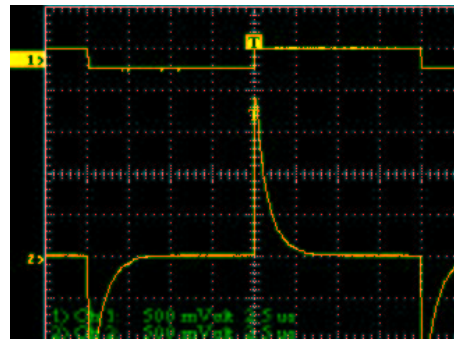
מדידה על הנגד במעגל: $RC = C = 47nF, R = 69k\Omega$
 $3.2 \cdot 10^{-3} \leftarrow$
 מתח כניסה: ריבועי $f = 1kHz$
 $\tau = 10^{-3} s \leftarrow$ ורואים שאכן המתח על הנגד קרוב
 למתח הכניסה (ומכל מקום, בהחלט כבר אינו גזירה...)



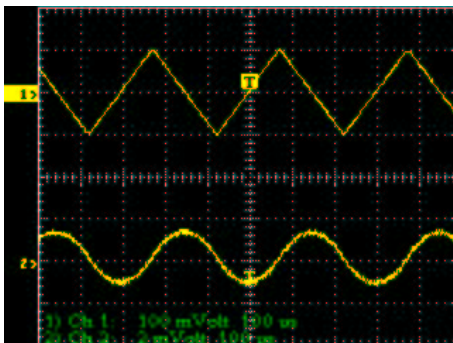
מדידה על הנגד במעגל: $RC = C = 47nF, R = 69k\Omega$
 $3.2 \cdot 10^{-3} \leftarrow$
 מתח כניסה: ריבועי $f = 1Hz$
 $\tau = 1s \leftarrow$ ולכן מתקיים $\tau \gg RC$ ומתקבלת תמונת גזירה
 (ההפרעה שיש במתח הכניסה נובעת מבעיה של העברת המידע מהאוסילוסקופ למחשב. כפי שאמר,
 ההעברה היתה קצת בעייתית בתדורים גבוהים.)



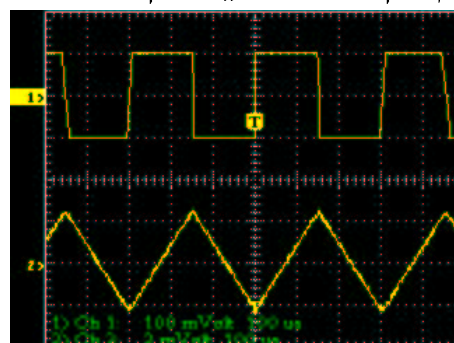
אותו מעגל כמו זה מימין, עם מתח כניסה משולש



מדידה על הנגד במעגל: $RC = 6 \cdot C = 0.6nF, R = 1k\Omega$
 $10^{-7} \leftarrow$
 מתח כניסה: ריבועי $f = 50kHz$
 $\tau = 2 \cdot 10^{-5} s \leftarrow$ ולכן מתקיים התנאי $\tau \gg RC$ ומתקבלת גזירה



אותו מעגל כמו זה מימין, עם מתח כניסה משולש



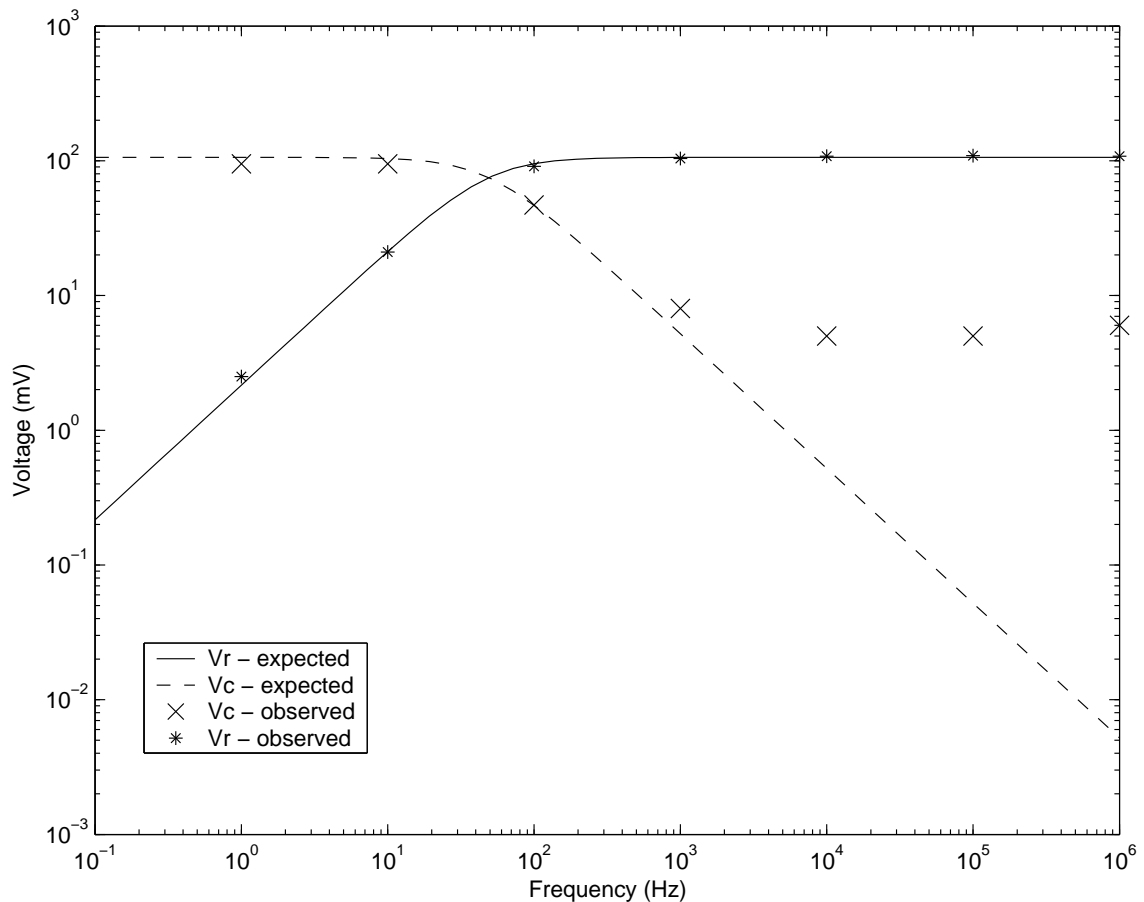
מדידה על הנגד במעגל: $RC = C = 47nF, R = 69k\Omega$
 $3.2 \cdot 10^{-3} \leftarrow$
 מתח כניסה: ריבועי $f = 3.3kHz$
 $\tau = 30.3 \cdot 10^{-5} s \leftarrow$ ולכן מתקיים $\tau \ll RC$ ומתקבלת אינטגרציה

טבלה 1: דוגמאות לאינטגרציה וגזירה במעגלי RC

3.2 מעגלי RLC

3.2.1 פתרונות דועכים ופתרונות מחזוריים

התופעות אותן רצינו לבדוק במעגלי RLC מתוארות בגדול בהקדמה התיאורטית. ראשית, רצינו לראות את סוגי הפתרונות השונים עבור מתח כניסה קבוע - פתרון מחזורי עבור התנגדות מספיק נמוכה, ופתרון



הקוים הם המתחים המצופים לפי הנוסחאות על הנגד והקבל, והנקודות הבודדות הן התצפיות. זוהי אחת המדידות הראשונות שעשיתי, ועל כן איכות המדידות רחוקה מלהיות מושלמת. אין לי נתונים לגבי דיוק המדידות, אבל זכור לי שבתדרים קיצוניים (נמוכים מאוד וגבוהים מאוד) המתח הנמדד על הרכיבים היה מאוד לא יציב. להערכתך, זהו ההסבר לסטייה של המתח על הקבל מן המצופה בתדירויות גבוהות מאוד. צריך לשים לב לכך שאמנם בגרף הסטייה נראית גדולה, אך באופן אבסולוטי מדובר בכ- $5mV$. כאמור, אין לי נתונים מדוייקים לגבי הדיוק, ולכן איני יודע אם סטייה כזאת היא אכן בתוך תחום הסטייה הצפוי. עם זאת, אני מוצא חיזוק להשערה שאכן מדובר ברעש רקע בכך שהגרף מתייצב על גודל קבוע: אם הדרך בה מדדתי משרעת מקסימלית הייתה למדוד את המרחק המקסימלי בין הערכים שקיבל המתח עבור תדירות מסויימת, אזי עם רעש רקע קבוע של כ- $5mV$, הייתי מצפה לראות באופן קונסיסטנטי סטייה כזאת במדידות.

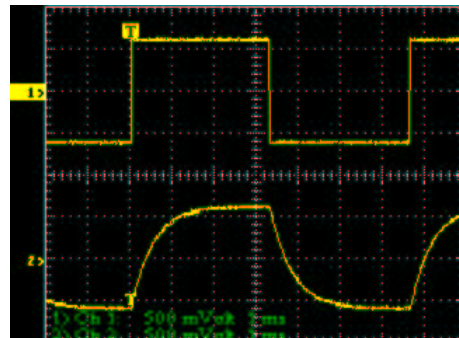
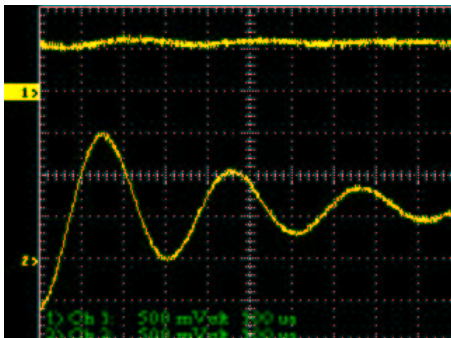
טבלה 2: מתח על הקבל והנגד במעגל RC, כתלות בתדירות המתח הנכנס

דועך אקספוננציאלית עבור התנגדות גבוהה יותר. לכן התחלנו עם גל ריבועי בעל זמן מחזור ארוך יחסית - כזכור, בגל כזה ניתן לבחון את ההתנהגות של המעגל ב"מתח קבוע". המעגל שלנו היה מורכב מהרכיבים הבאים: $f = 150Hz$, $L = 47mH$, $C = 51nF$, $R = 9.9k\Omega$. מתח הכניסה, כאמור, ריבועי, בתדירות $f = 150Hz$. ההתנגדות הקריטית המחושבת של המעגל היא $R_{critical} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1920\Omega$, ולכן במעגל שלנו מתקיים $R \gg R_{critical}$ ולכן נצפה לראות על הקבל דעיכה אקספוננציאלית. תמונה של המתח המתקבל על הנגד נמצאת בטבלה 3, וכפי שניתן לראות, הציפייה אכן מתממשת.

3.2.2 התנגדות קריטית

לאחר מכן, רצינו למצוא מהמדידות עצמן את ההתנגדות הקריטית, כלומר לשנות את ההתנגדות במעגל ולראות מתי מתרחש המעבר בין התנהגות דועכת למחזורית. לשם כך השתמשנו בנגד המשתנה שנמצא בתוך המטריצה. התחלנו בהתנגדות של $10k\Omega$, ולאט לאט הורדנו את ההתנגדות. כשראינו את הפתרון הופך למחזורי, נעצרנו, ומדדנו בעזרת המולטימטר את ההתנגדות על הנגד המשתנה ועל הסליל, וקיבלנו התנגדות של $1.72k\Omega$. לכך יש להוסיף גם התנגדות פנימית של מקור המתח בשיעור 50Ω , ובסה"כ מתקבל שההתנגדות הקריטית שראינו במעגל היא $1.77k\Omega$. כזכור, הערך שחישבנו עבור גודל זה הוא $1.92k\Omega$. הסטייה יכולה לנבוע משני מקורות:

1. ההתנגדות האומית של הסליל, אותו לא החשבנו כראוי; רק לאחר סיום הניסוי, הובהר לי שהמול-טימטר מודד את העכבה של הסליל, ולא את ההתנגדות האומית, ולכן המדידות של ההתנגדות שעל הסליל אינן מדוייקות. ניתן כמובן למדוד את ההתנגדות האומית של הסליל ע"י מדידה במד-מתח בזרם ישר (למולטימטר יש זרם חילופין), אך כאמור, בזמנו לא הייתי מודע לבעיה ולכן לא עשיתי זאת.
2. אפיון הנקודה בה מתרחש המעבר בין סוגי ההתנהגות הוא עניין די סובייקטיבי, וקשה לקבוע אותו במדוייק. גם את הסטייה הזאת ניתן היה לנסות להעריך, ע"י בדיקות חוזרות ונשנות או ע"י מדידת ערכים קיצוניים, כלומר למדוד מקום בו בודאות יש עדיין דעיכה, ומקום בו בוודאות כבר יש התנהגות מחזורית; אך לא עשינו זאת.



טבלה 3: התנהגות מחזורית או דועכת אקספוננציאלית במעגל RLC

3.2.3 פתרון מחזורי

בשלב הבא, רצינו לבחון קצת יותר לעומק את הפתרון המחזורי - בפרט, למדוד את התדירות של התנודות בתחום זה. כפי שראינו בהקדמה התיאורטית, לתנודות הדועכות יש תדירות שונה מהתדירות העצמית של המעגל, המחושבת לפי $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. כדי למדוד את תדירות המחזורים האלה, השתמשנו במעגל הנ"ל עם התנגדות קבועה של 9.9Ω (כדי שההתנגדות אכן תהיה בתוך התחום המחזורי) ומדדנו את המתח המתקבל על הקבל. תמונת המתח המתקבלת היא התמונה השנייה בטבלה 3. מתוכה ניתן למדוד את זמן המחזור של התנודות, ע"י מדידת המרחק בין פיקים עוקבים. הערך המתקבל בדרך זו הוא $\tau = 3.06 \cdot 10^{-4}$ בממוצע. זאת ביחס לערך המחושב של התדירות עבור המעגל שלנו, שהוא $\omega_1 = 2.042 \cdot 10^4$, כלומר

$f = 3250.7$ או $\tau = 3.076 \cdot 10^{-4}$. כלומר הערך שמצאנו הוא בהחלט בתוך תחום הסטייה הצפוי, שהוא כ- $10\mu s$.

3.2.4 תהודה

לאחר מכן עברנו למתח כניסה סינוסואידי. התופעה העיקרית אותה רצינו למדוד במעגל זה היא תופעת התהודה. כזכור, המתח על פני הקבל תלוי בתדירות המתח הנכנס, וראינו שכאשר תדירות זו שווה לתדירות העצמית של המעגל, המתח המתקבל הוא מקסימלי. כדי לצפות בתופעה, בנינו מעגל, חישבנו את התדירות העצמית שלו, והתחלנו לעשות מדידות של המתח על הנגד. התחלנו בתדירות העצמית שחישבנו ומדדנו עבור תדרים הולכים וגדלים - והכל נראה טוב: אכן המתח הלך וקטן, כפי שציפינו. אח"כ חזרנו לתדירות העצמית ומדדנו משם ומטה. רק בשלב זה התברר לו שמשוהו לא בסדר: המתח המשיך לגדול, ולא לקטון כפי שציפינו! לאחר נסיונות רבים להבין מה לא בסדר ולמצוא את התהודה ללא הועיל, ובעזרת המדריך, החלטנו לבסוף לבנות מעגל עם רכיבים אחרים, ולמדוד את המתח על הקבל ולא על הנגד. ועדיין, דברים לא הסתדרו: במעגל החדש אמנם ראינו תהודה, שזה כבר שיפור, אבל הוא היה בסטייה של כ-60% (!) מהמקום בו ציפינו לראות אותו. בשלב זה הסתיים הזמן והפסקנו את הניסוי. רק בשלב הרבה יותר מאוחר, כשניתחנו את התוצאות לקראת כתיבת הדו"ח, התחורר לנו מה קרה: חישבנו מהנוסחה את ω_0 , ואח"כ חיפשנו את התהודה סביב התדירות ω_0 - אבל שכחנו ש- ω_0 זו המהירות הזויתית, ושכדי להגיע לתדירות צריך לחלק ב- 2π ! לכן חיפשנו לגמרי במקום הלא נכון; וזה גם מסביר את הסטייה של 60% שראינו... בכל מקרה, נותרנו עם מדידות ממש יפות של עקום יורד, מכיוון שמדדנו רק הרבה אחרי התהודה...

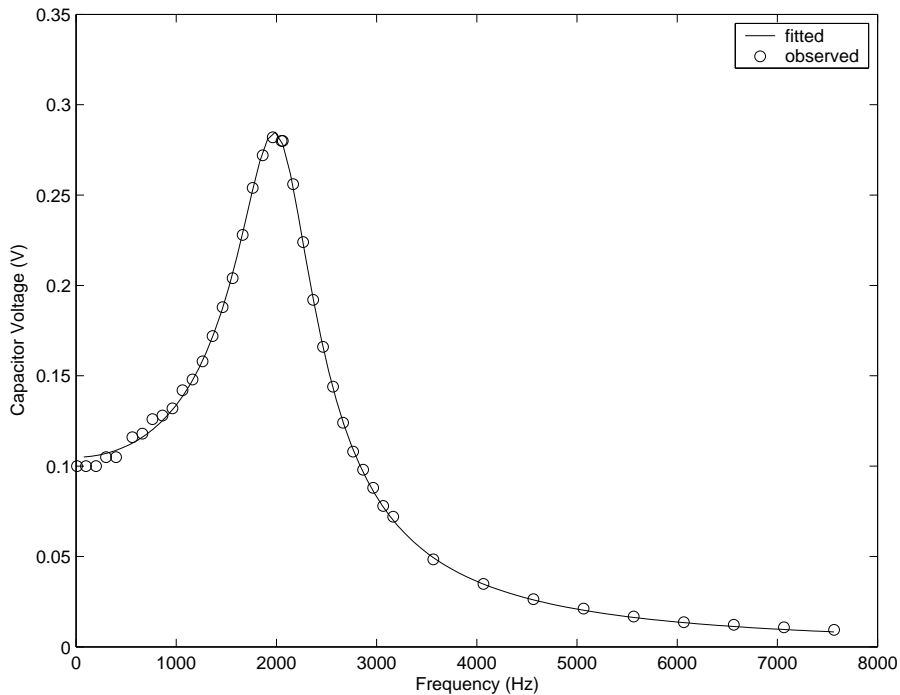
מאוחר יותר חזרנו על הניסוי שוב. גם בפעם הזאת לקח לנו זמן לעלות על צירוף כזה של רכיבים שבו ראינו את התופעה בברור⁵, אבל בסופו של דבר בנינו את המעגל הבא: $C = 60.72nF$, $R = 110.1\Omega$, $L = 99.4mH$. במעגל זה ביצענו מדידות של המתח על הקבל כפונקציה של התדר (הפעם גם היינו חכמים יותר - קודם כל חיפשנו את התופעה ויידאנו שאנו אכן רואים תהודה, ורק כשראינו שהכל בסדר התחלנו לבצע את המדידות במדויק). את תוצאות המדידות ניתן לראות באיור 1. ערך התהודה המחושב הוא $f = 2048Hz$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1.2872 \cdot 10^4$

כבר במהלך המדידות, הופתענו קצת לראות שעבור תדירויות מאד נמוכות, המתח התייצב באיור $100mV$, ולא המשיך לרדת לכיוון האפס. לפי התרשימים בחוברת המעבדה של Berkeley, נראה שהגרף אמור להיות סימטרי סביב נקודת התהודה, ואילו הגרף שלנו, כפי שניתן לראות, אינו כזה. מאוחר יותר, במהלך ניתוח התוצאות, ניסינו לשרטט במחשב כל מיני גרפים שונים עבור ערכים שונים של הפרמטרים (טבלה 12), והתברר לי שני דברים מפתיעים (אותי, לפחות, הם הפתיעו...):

1. כאשר התדירות של המתח הנכנס שואפת לאפס, המתח המתקבל על הקבל שואף למתח הכניסה. עם זאת, כאשר התדירות שואפת לאינסוף, המתח על הקבל שואף לאפס. לכן ברור שלא תהיה סימטריה.

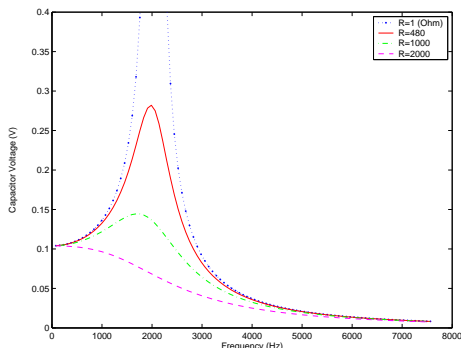
2. יש תלות מאד גדולה של צורת הגרף בהתנגדות - ככל שהתנגדות גדלה, כך הולך וקטן הערך המקסימלי שיתקבל על המתח. כאשר ההתנגדות גדולה מספיק, הערך המקסימלי שיתקבל יקטן מעבר לערך של מתח הכניסה. אבל כפי שראינו, כשהתדירות שואפת לאפס, יתקבל ערך הכניסה. המסקנה הבלתי נמנעת היא, שהערך המקסימלי יתקבל בנקודה בה התדירות שואפת לאפס! ואכן,

⁵נראה לי שאולי הבעיה נעוצה דוקא בהתנגדויות: לכאורה ההתנגדות אינה משפיעה על התהודה, שכן היא לא נכנסת כלל לחישוב ω_0 . אבל במבט שני, זה לא מדויק: אמנם ω_0 באמת לא תלוי בהתנגדות, אבל ההתנגדות בהחלט משפיעה על הצורה של הגרף סביב התהודה: עבור התנגדויות גדולות מאד, אין נקודת מקסימום בתהודה. ראו עוד להלן עמ' 11.

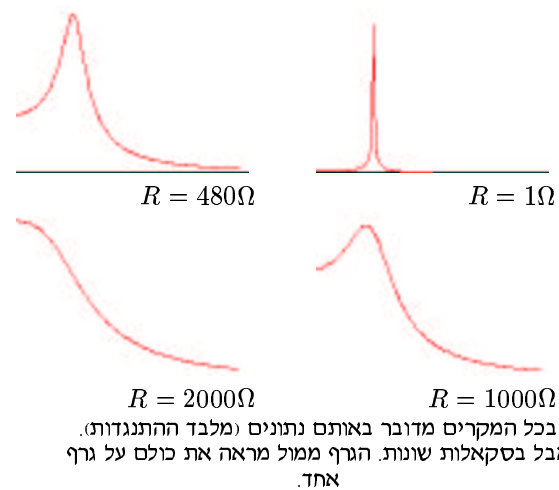


איור 1: משרעת המתח על הקבל, כפונקציה של תדירות המתח הנכנס.

לגבי שגיאות המדידה, ראה התייחסות בהמשך, ואיור מס' 3



אותם גרפים המתוארים ממול, רק שכאן ניתן להשוות בין הסקאלות. שימו לב לכך ש (1) נקודת המקסימום מתקרבת לאפס ככל שההתנגדות גדלה, ו (2) כל הגרפים מגיעים בתדירות 0 ל- $105mV$ (מתח הכניסה). כמו כן, ניתן לראות שעבור $R = 1 \Omega$ המתח הוא ענקי.



טבלה 4: צורת גרף התהודה, כפונקציה של ההתנגדות

בשרטוטים ניתן לראות בבירור שהמקום בו מתקבל הערך המקסימלי של המתח על הקבל, מתחיל אמנם בנקודה $\omega = \omega_0$, אבל ככל שההתנגדות גדלה, כך המקסימום קטן, ונע שמאלה, עד שבשלב

מסויים המקסימום מתקבל על ציר ה-y.

במבט לאחור, ניתן לראות במשוואות את כל התופעות האלה⁶:

כזכור, משרעת המתח על הקבל היא $V_C = \frac{V_0}{\omega C \sqrt{(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2}}$. כדי לראות עבור איזו תדירות מתקבל מקסימום של הביטוי, נגזור לפי ω . החישובים יהיו קלים יותר אם את המשך הטיפול נעשה לאחר שנגדיר, במקודם, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $b = \frac{R}{2L}$, ונקבל:

$$V_C = \frac{V_0}{LC \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

עכשיו קל לראות שהמקסימום מתקבל כאשר במכנה - ולמעשה, בביטוי בתוך השורש - יש מינימום (ככל שהמכנה קטן, כך הביטוי כולו גדל). נמצא מינימום של הביטוי:

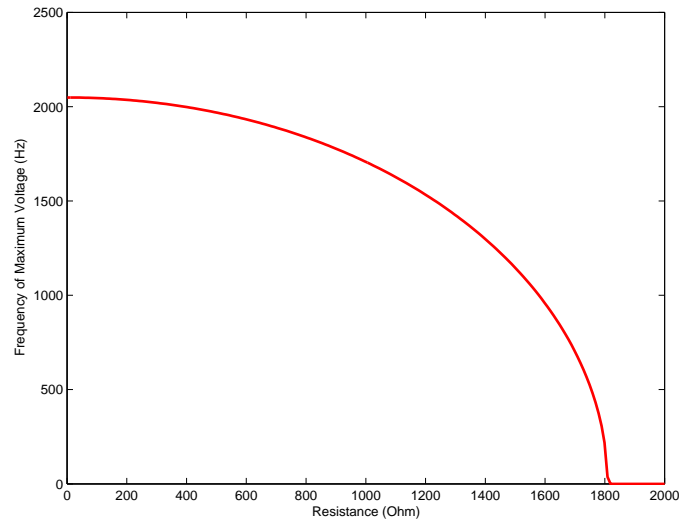
$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2] &= 0 \\ -4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8b^2\omega &= 0 \end{aligned}$$

נקבל שנקודות הקיצון הם $\omega = 0$ או $\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$, או במונחים שלנו $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$ (פתרון שלילי כמו בן אינו פיסיקלי). איור מספר 14 מראה גרף של התדירות בה מתקבל מתח מקסימלי על הקבל, כפונקציה של ההתנגדות. ניתן לראות, כפי שתיארנו לעיל, שאכן בשלב מסויים אין למעשה תהודה, והמקסימום המתקבל הוא עבור $\omega = 0$ כביכול (למעשה, בנוסחה הנ"ל הביטוי הופך להיות מרוכב, כי ההתנגדות גדולה מדי. מה שקורה בשלב זה הוא - נזכור שגם $\omega = 0$ הוא פתרון - והמקסימום נשאר ב-0). רק נקודה שכדאי להבהיר, אחרי כל ה"תגליות" האלה: כשמודדים את המתח על הנגד - כלומר, את הזרם במעגל - אזי התהודה תמיד מתקבלת ב- ω_0 (ניתן לראות זאת בנוסחאות בכך שכאשר גוזרים את $Q(t)$, הביטוי כולו יוכפל ב- ω - הנגזרת הפנימית, ואז ה- ω שמחוץ לשורש במכנה יתבטל, ואז באמת המינימום יתקבל כאשר התלות ב- ω במכנה מתאפסת).

לאחר שיש לנו החישוב התיאורטי, נסתכל בתוצאות שמדדנו. בעוד שראינו שעבור המעגל שלנו $\omega_0 = 1.2872 \cdot 10^4$ ($f = 2048 \text{ Hz}$), הרי שעכשיו אנו יודעים לומר שהמתח המקסימלי אמור להתקבל דווקא עבור $\omega = 1.2411 \cdot 10^4$, כלומר $f = 1975 \text{ Hz}$. הסתכלות בגרף מראה לנו שאכן המקסימום מתקבל בנקודה זאת, ולא כפי שסברנו בתחילה (אולי קשה להבחין בכך במדויק, אבל ניתן לפחות לראות שנקודת המקסימום מתקבלת לפני $f = 2000 \text{ Hz}$).

תוך כדי הבדיקות האלה התבררה לי גם נקודה נוספת. כאשר מדדנו את הרכיבים במעגל, מדדנו במול-טימטר את ההתנגדות של הסליל, כדי להחשיב גם אותו בנוסחאות, וקיבלנו ערך של $R = 1.624 \text{ k}\Omega$. אבל, כפי שהסברתי כבר (בעמוד 10), מה שהמולטימטר מודד זאת לא ההתנגדות האומית, אלא העכבה, מכיוון

⁶הסיבה שלא שמתי לב אליהן עד עכשיו, היא מפני שהספרים הטענו אותי. לאחר שגיליתי את התופעות האלה, חזרתי ובדקתי בספרים לראות אם העובדות האלה מוזכרות. להפתעתי, בחוברת המעבדה של Berkeley, אין אזכור לזה כלל - להיפך, בפירוש כתוב שמתקבל מקסימום בנקודה בה $\omega = \omega_0$ (עמ' 36 למעלה). בספר של פיינמן גם כן, הוא לא מזכיר עובדות אלה; מה שכן, הוא אומר מדבר על מקרה אחר מהתנגדות קטנה. בשלב זה התחלתי לחשוב שאולי טעייתי בשרטוט הגרפים או משהו לבסוף, מצאתי אזכור לתופעות - דוקא בספרים הרבה יותר טכניים: בחוברת "Theoretical Mechanics" מסדרת שאוס יש טיפול בנושא; ודין נרחב במיוחד מוקדש לזה בספר "Mathematical Methods in the Physical Sciences, 2nd Edition" של Mary L. Boas (עמ' 370 והלאה).



איור 2: התדירות בה מתקבל מתח מקסימלי, כתלות בהתנגדות

הנתונים הם אותם נתונים בהם נעשו שאר הניסויים של תהודה.

שהוא עושה את המדידות במתח חליפין. מה שצריך לעשות, זה למדוד את ההתנגדות האומית בזרם ישר, אך לא ידענו זאת בזמנו. מכל מקום, כששרטטתי את הגרפים עם הנתונים המקוריים, הגרף לא התאים בכלל למדידות. רק לאחר ששיחקתי עם הפרמטרים, ראיתי שלמעשה ההתנגדות צריכה להיות שונה לגמרי מזו שמדדנו, וראיתי שהנקודות מתאימות לגרף עם התנגדות של 480Ω . מאוחר יותר, חיפשתי ב-matlab באופן מסודר התאמה של הנתונים לגרף (כלומר, עשיתי ממש curve-fitting): נתתי את הערכים של כל הרכיבים - חוץ מההתנגדות - כניחוש התחלתי, והגבלתי כל אחד מהם לטווח טעות המדידה שלו. להתנגדות לא נתתי ניחוש התחלתי, ולא הגבלתי את התחום שלו כלל. ההתאמה שהתקבלה קיבלה ציון מאד מאד גבוה ($SSE = 2.161 \cdot 10^{-4}$, כלומר ריבועי המרחקים של נקודות המדידה מהגרף המותאם - כמובן שככל שהביטוי קרוב לאפס, כך ההתאמה טובה יותר; ו- $adjrsquare = 0.9992$ כלומר 99.92% מן השונות של הסטיות מהגרף המותאם מוסברות ע"י המודל), עם הערכים הנכונים של כל שאר הרכיבים, וערך של 479.9Ω עבור ההתנגדות (הכוללת, יחד עם הנגד). על כן, הגרף המובא לעיל הוא הגרף המותאם שהתקבל, המתאים, כאמור, לערכים הנתונים של הרכיבים, ועם ההתנגדות הנ"ל⁷.

דרך אחרת להעריך עד כמה ההתאמה טובה, זה לראות אם המרחקים של נקודות המדידה מהגרף המותאם, נופלים בתוך טווח טעות המדידה. אם כל הנקודות קרובות לגרף עד כדי טעות המדידה, אזי אי אפשר לצפות למשהו טוב יותר מזה. באופן כללי, הדרך לחישוב טעויות המדידה זה לפי הנוסחה

$$\Delta y \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right| + \Delta y_0$$

⁷חדשות טריות: רק הבוקר חזרתי למעבדה, וחיפשתי את אותו סליל שבו עשינו את הניסוי הזה. מצאתי סליל שבמולטימטר נתן לי בדיוק את הערכים הרשומים אצלי, כך שאיני יכול להיות בטוח שזה אותו סליל, אבל בסבירות גבוהה ניתן להניח שזה אכן הוא. הפעם, מדדתי את ההתנגדות שלו במולטימטר עם זרם ישר. הערך שהתקבל הוא $R_L = 0.295k\Omega$. עכשיו, אם נסכם את כל ההתנגדויות שהיו לנו במערכת (כולל גם ההתנגדות הפנימית של מחולל התדרים), אזי נקבל $R_{total} = R + R_L + 50\Omega = 455.1\Omega$. זה כבר מתחיל להיות קרוב לערך שחישבנו! הסטייה יכולה לנבוע מהפרש הזמנים הגדול בין המדידות: אולי השפעות של הטמפרטורה על ההתנגדות? וכמובן, תמיד קיימת האפשרות שזה לא אותו סליל, אבל שיש כמה סלילים עם נתונים דומים. בכל אופן, לדעתי התעלומה פחות או יותר נפתרה.

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2 + (\Delta y_0)^2}$$

כאשר x_i הם המשתנים בהם תלויה הפונקציה y, x_{i-1} היא שגיאת המדידה של ערך אותו משתנה באותה נקודה. אם הערך עצמו הוא ערך שנמדד (כמו במקרה שלנו, בו המתח של כל נקודה נמדד) אזי Δy_0 היא השגיאה במדידת ערך זה עצמו. את טעות המדידה של מתח הקבל בכל נקודה ונקודה הערכנו ב- $\pm 2mV$; טעות המדידה של מתח הכניסה הוערך ב- $\pm 3mV$. עבור שאר הרכיבים הערכנו את השגיאה בחצי הדיוק של המולטימטר עבור אותה מדידה. הכנסנו את כל הנתונים האלה לחישוב השגיאות שלנו, והתוצאות מוצגות בגרף בהמשך.

יש דרכים שונות להציג את חישובי השגיאות. דרך מקובלת היא הצגת error-bar על כל נקודת מדידה, שהיא בגודל טעות המדידה. אם הגרף המותאם תמיד נופל בין קצוות ה-error-bars, אזי ההתאמה טובה. אנחנו בחרנו לא להציג את השגיאות כך, מכיוון שהנקודות שלנו יחסית צפופות באיזורים מסויימים של הגרף, ולכן הגרף המתקבל אינו ברור. הדרך בה בחרנו להציג את השגיאות, היא ע"י הצגת גרף נפרד של השגיאות שנמדדו (המרחקים בין הערכים הנמדדים למותאמים), ביחס לגרף של טעות המדידה הצפויה. התוצאות מובאות בגרף 3.

ניתן לראות שהמדידות בתדירויות הנמוכות הן המדידות היחידות שאינן בתחום השגיאה הצפויה, וגם הן לא סוטות ממנו בהרבה. ניתן לייחס זאת לכמה גורמים:

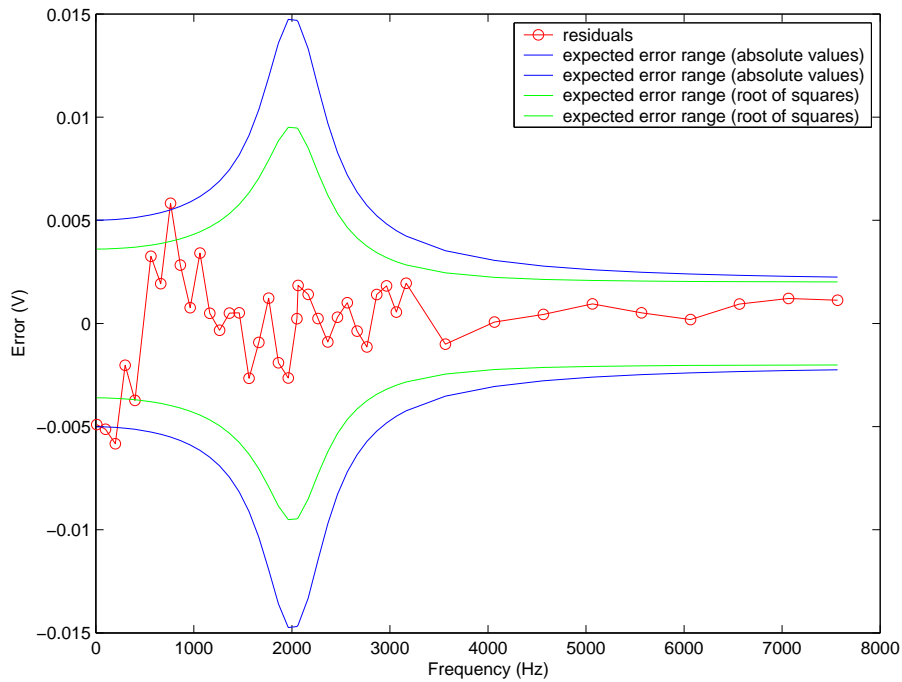
- המדידות האלה נעשו באופן פחות מדויק, ולכן למעשה צריך היה לתת להם הערכת שגיאה גדולה יותר; מכיוון שאין לי הערכה מספרית מדוייקת, נתתי גם להם טעות של $\pm 2mV$ כמו לשאר הנקודות. הסיבות לכך שהדיוק במדידות אלה היה פחות טוב הן פסיכולוגיות בעיקרן:

- כפי שהסברנו, היה נראה לנו מוזר שהמתח יורד רק ל- $100mV$ ולא לאפס, ולכן פחות סמכנו על המדידות האלה, והדיוק בהתאם.
- המדידות האלה נעשו לקראת סוף הזמן, ולכן נעשו בחפזה.

3.2.5 הפרשי פאזה

התופעה האחרונה אותה רצינו לראות, היא הפרשי הפאזה הנוצרים בין המתח הנכנס לבין המתח על הקבל. כפי שראינו בהקדמה התיאורטית, אכן יהיו הפרשי פאזה כאלה, וראינו איך לחשב אותם. אבל מדידת הפרשי הפאזה, מסתבר, היא לא עניין פשוט. תחילה ניסינו למדוד הפרשי פאזה ישירות על צג האוסילוסקופ - ע"י מדידת המרחק (בזמן) בין שיא של המתח הנכנס לשיא של המתח על הקבל, והשוואתו למרחק בין שיאים עוקבים של המתח הנכנס. אולם הסתבר לנו שהתוצאות המושגות כך מאד לא מדוייקות - ההבדלים בפאזה הם לא כל כך גדולים כשמודדים אותם כך, ולכן קשה למדוד אותם במדויק; ולעומת

⁸ בעקרון, הביטוי הראשון נותן מרווח שגיאה גדול יותר, כלומר הסיכוי לקבל מדידה מחוץ לטווח שלו הוא הרבה יותר קטן. לכן מעדיפים ככלל להשתמש בשני, שנותן מרווח שגיאה מצומצם יותר - ולכן זה ידרוש מאיתנו יותר דיוק. ככלל אצבע, כאשר שגיאות המדידה של המשתנים השונים הם תלויים (למשל: כולם נמדדו באותו מכשיר), אזי נעדיף את הביטוי הראשון, שכן טעות בדיוק של המכשיר באמת תצטבר; לעומת זאת, כאשר הערכות השגיאה הן בלתי תלויות, אנו מניחים כי אי הדיוקים יבטלו אחד את השני, ולכן נשתמש בביטוי השני.

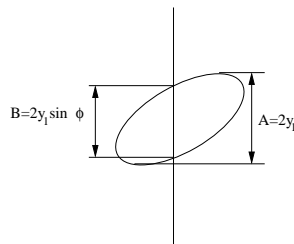


איור 3: שגיאות נמדדות ביחס לשגיאה המצופה

הקווים המתארים את טווח השגיאה מחושבים אחד לפי שורש הריבועים (הפנימי יותר), ואחד לפי ערכים מוחלטים (החיצוני). כמובן שאין משמעות לקווים המחברים את הנקודות בגרף השאריות. הצורה המשוננת פשוט ממחישה את האקראיות שבשגיאות, ומורה על כך שאין איזשהו גורם קונסיסטנטי הגורם לסטיות.

זאת, קשה מאד להעריך איפה בדיוק נמצא המקסימום ממנו רוצים למדוד - זה ענין מאד סובייקטיבי. בסופו של דבר, קורה שהתוצאות האמיתיות טובעות באי-הדיוקים של המדידות. לכן החלטנו למדוד את הפרשי הפאזה בעזרת תמונת הליסאז'ו⁹. העברנו למחשב את תמונת המתחים עבור הרבה תדירויות שונות,

⁹ כאשר מסתכלים על גרף של המתח הנכנס (על ציר x) למול המתח על הקבל (ציר y), מתקבל מה שנקרא תמונת ליסאז'ו. קל להיווכח שאם הגרף מנומרל כך שהמשרעות של שתי התנועות שוות, אזי כאשר אין הפרש פאזה נתקבל תמונה של קו נטוי בזווית 45° ; כאשר הפרש הפאזה הוא $\frac{\pi}{2}$ יתקבל מעגל; ובהפרשים אחרים, יתקבלו אליפטות. כדי לחשב מתוך התמונה את הפרש הפאזה, נשים לב לנתונים הבאים:



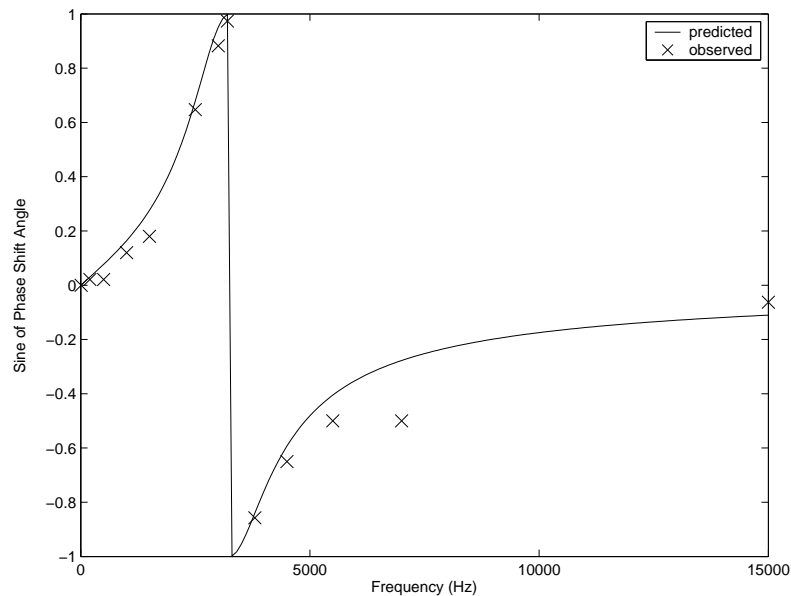
- כאשר x_1, y_1 המשרעות של המתחים המתאימים.
- הנקודות הגבוהה ביותר והנמוכה ביותר על ציר ה- y מתקבלות כמובן כאשר ה- \cos מקבל ± 1 , אז $y = \pm y_1$
- כאשר $x = 0$ כאשר $\cos \omega t = 0$, כלומר כאשר $\omega t = \pm \frac{\pi}{2}$. במקרה כזה, מתקבל

$$y = y_1 \cos(\omega t - \phi) = y_1 \cos\left(\pm \frac{\pi}{2} - \phi\right) = y_1 \sin \phi$$

לכן, אם נמדוד את הגדלים המתוארים בשרטוט, ונחשב $\frac{B}{A} = \frac{2y_1 \sin \phi}{2y_1} = \sin \phi$ וכך נקבל את ϕ .

כדי שנוכל לנתח את התוצאות ב-offline. לצערי, בפעם הראשונה שניסינו לעשות זאת, לא נותר הרבה זמן עד סוף המעבדה, והמדידות היו חפוזות והסתבכנו עם שמירת הנתונים. לכן נאלצנו לחזור בפעם אחרת, והמדידות נעשו על מעגל אחר מזה שעשינו בו את המדידות של התהודה. זה קצת חבל, כי היה נחמד לראות את שתי התופעות באותו מעגל, אבל לא נורא... הנתונים של המעגל בו עשינו את המדידות של הפאזה הם $L = 46.82mH$, $C = 51.34nF$, $R = 467.2\Omega$, וכמובן, מדדנו לא נכון את ההתנגדות של הסליל... לכן, הערך המחושב של תדירות התהודה תהיה $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 20397$ ולכן $f = 3246Hz$.

לאחר ניתוח התוצאות, מסתבר שאפילו כשמעבירים את התוצאות ישירות למחשב כנ"ל, הדיוק מזויע. כמו כן, נראה שיש מעט מדי נקודות בהן עשיתי מדידות. בכל מקרה, מצורף הגרף באיור 4. אני לא נכנס



איור 4: הפרשי פאזה במעגל RLC

לחישובי השגיאות - כבר בנתונים עצמם ניתן לראות שטווח השגיאה הוא עצום, וכל החישובים שבגרף הם רק על סמך ממוצעים - למעשה, אני מופתע עד כמה יש התאמה בגרף... אחת הסיבות לאיכות המדידות, הוא שכאשר האליפסה פחוסה מאוד (שזה רוב הזמן, מלבד בקרבת התהודה), הרעשים במדידה גדולים יותר מאשר המרחק בין צידי האליפסה, ולכן הכל מתערבב וקשה להבדיל בין שני הצדדים. מה שכן, כאשר האליפסה לא פחוסה, אז המדידות הן קצת יותר מדויקות. ניתן לראות זאת בגרף. לכן גם ניתן בכל זאת לראות בגרף בצורה יפה את התהודה - סביב התהודה מתקרבת זיית הפאזה ל- $\frac{\pi}{2}$ וה- \sin מתקרב לאחד, ואז יש מה שנראה כנקודת אי רציפות (שזה כמובן לא יכול להיות מבחינה פיסיקלית, אבל זה פשוט נובע מהחלפת הסימונים) וקפיצה ל- $-\frac{\pi}{2}$, וממשיך עד π . ניתן לראות גם שהתהודה היא בדיוק במקום בה חישבנו.

4 הפקת לקחים

זהו בכל זאת ניסוי המעבדה הראשון שלי, ועל כן יש לי התרשמויות ולקחים רבים. החלק הזה מיועד אולי יותר לי עצמי מאשר לצורך הדו"ח עצמו, אבל מן הראוי לכלול אותו פה בכל מקרה.

- כדי לעשות את כל המדידות באמת כמו שצריך, דרושה עבודה מאד זהירה, וזה לוקח הרבה מאד זמן. זה אמור במיוחד לגבי ניתוח הדיוק של המדידות וכו' - כדי לחשב בצורה נכונה את השגיאות, צריך על כל מדידה ומדידה לתת גם הערכת שגיאה. לפעמים הערכת השגיאה משותפת לכל המדידות, אבל לפעמים לא - למשל, כאשר משנים כל הזמן את הסקאלה באוסילוסקופ, הרי שרמת הדיוק משתנה עם שינוי הסקאלה. כמו כן, לפעמים לא תמיד ברור מה הצורה הנכונה ביותר לבצע את המדידה, וצריך לבצע את אותן מדידות בכמה דרכים שונות לפני שמגיעים לתוצאות טובות. השורה התחתונה היא, כאמור, שעבודה טובה תהיה איטית מאד.
- בשלב ההכנה, כדאי לשחק במחשב עם המשוואות ולשרטט את צורתן עבור ערכים שונים של הפרמטרים, כדי לדעת איך הפרמטרים השונים ישפיעו על המדידות. הבנה טובה של זה עשויה לחסוך זמן רב בעת ביצוע הניסויים. זה יכול לעזור גם בכך, שניתן לקבל התרשמות מהם הגורמים המשפיעים יותר והמשפיעים פחות, וע"י כך לדעת איפה כדאי למקד את תשומת הלב כדי לשפר תוצאות במהלך הניסוי.
- לפני שמתחילים לבצע את המדידות עצמן, כדאי לבדוק בדיקה מהירה שאכן רואים את התופעה המבוקשת!
- לפעמים כדאי תוך כדי המדידות כבר לשרטט גרפים ולראות שהמדידות נותנות פחות או יותר את התוצאות הרצויות - רק כדי לוודא שאנו אכן מודדים את מה שאנו מתכוונים למדוד.
- לא לסמוך על ספרים יותר מדי - לא על הגרפים המובאים בהם, ואפילו לא על הטקסט (עייני ערך התהודה...!).