

TESIS DEFENDIDA POR

Daniel Fajardo Delgado

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ:

Dr. José Alberto Fernández Zepeda

Director del Comité

Dr. Carlos Alberto Brizuela Rodríguez

Miembro del Comité

Dr. José Rosario Gallardo López

Miembro del Comité

Dr. Jesús Favela Vara

Jefe del Depto. de Cs. de la Computación

Dr. Luis Alberto Delgado Argote

Director de Estudios de Posgrado

Ensenada, B.C. Agosto de 2003

Centro de Investigación Científica y de
Educación Superior de Ensenada



DIVISIÓN DE FÍSICA APLICADA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

ANÁLISIS PROBABILÍSTICO DE ALGORITMOS
PARA CONTRACCIÓN DE GRAFOS

TESIS
que para cubrir parcialmente los requisitos
necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS
presenta:

DANIEL FAJARDO DELGADO

Ensenada, Baja California, México. Agosto de 2003.

RESUMEN de la Tesis de **Daniel Fajardo Delgado**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de **MAESTRO EN CIENCIAS** en **CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**. Ensenada, Baja California, México. Agosto de 2003.

ANÁLISIS PROBABILÍSTICO DE ALGORITMOS PARA CONTRACCIÓN DE GRAFOS

Resumen aprobado por:

Dr. José Alberto Fernández Zepeda

Director de Tesis

En el presente trabajo se hace un análisis probabilístico del tiempo de ejecución del algoritmo de simulación de un DR-Mesh en un LR-Mesh elaborado en [Cárdenas-Haro, 2001]. Dicho algoritmo reproduce el comportamiento de un ciclo de máquina de un DR-Mesh acíclico de $N \times N$ procesadores en un LR-Mesh de $O(N \times N)$ procesadores.

Se obtiene que el tiempo de ejecución promedio de este algoritmo es $O(\log n)$ u.t. Esto sirve para corroborar la conjetura que hace Cárdenas-Haro respecto a la eficiencia de su simulación. La contribución que se obtiene al comprobar formalmente la rapidez del algoritmo es sumamente relevante, ya que es la simulación más eficiente en su tipo.

En esta tesis se utilizan métodos y/o técnicas para analizar grafos generados aleatoriamente y que modelan a un problema real. Asimismo, se definen criterios de comparación de grafos para determinar si el modelo de Cárdenas-Haro representa fielmente a un patrón de conexiones reales de un DR-Mesh. Dichos criterios se basan principalmente en características del grafo que se evalúa, tales como: regularidad, número de nodos, alcanzabilidad, distribución del grado de entrada/salida de los nodos y diámetro del grafo.

Palabras clave: Algoritmos aleatorios, análisis de algoritmos, evaluación de modelos.

ABSTRACT of the thesis presented by **Daniel Fajardo Delgado**, as a partial requirement to obtain the **MASTER IN SCIENCES** degree in **COMPUTER SCIENCES**. Ensenada, Baja California, México. August 2003.

PROBABILISTIC ANALYSIS OF ALGORITHMS FOR GRAPHS CONTRACTIONS

Abstract approved by:

Dr. José Alberto Fernández Zepeda

Thesis Director

In this work, we present a probabilistic analysis of the execution time of the simulation of parallel models DR-Mesh on LR-Mesh proposed by [Cárdenas-Haro, 2001]. This algorithm simulates the behavior of a machine cycle of an acyclic $N \times N$ DR-Mesh on an $O(N \times N)$ LR-Mesh.

The average execution time for this algorithm is $O(\log n)$ u.t. This helps to confirm the conjecture of Cárdenas-Haro respect to the efficiency of his simulation. The main contribution of this work is to provide a formal proof of the execution time of this simulation, wich is the most efficient simulation for these models.

In this thesis we design methods and/or techniques to analyze randomized generated graphs that model a real problem. Similarly, we define comparison criterion to determine if the Cárdenas-Haro's model represents accurately real connection patterns of a DR-Mesh. These criterion are based mainly on the graph's characteristics such as: regularity, nodes number, reachability, input/output degree distribution of the nodes, and graphs diameter.

Keywords: Randomized algorithms, algorithms analysis, model evaluation.

Dedicatoria

A mis padres: *Leticia y Daniel*
por su cariño y apoyo incondicional.

A mis hermanos:
Vicente, Zaira e Isabel
que me ayudaron a lograr esta meta.

A *Magaly* que a pesar de la distancia,
siempre estuvo conmigo.

Agradecimientos

Al *Dr. José Alberto Fernández Zepeda* por su paciencia y valiosa ayuda.

A los miembros del comité de tesis:

Dr. Carlos A. Brizuela Rodríguez y *Dr. José Rosario Gallardo López*.

A los amigos de la generación: *Lupita, Mirna, Domitilo, Rodrigo, Oyoqui, Mike, Alex Peña, Alex Estrella, Oscar, Yobani, Chema, Everardo, Pedro y Miguel Riesgo*.

Gracias por su amistad y por hacer más fáciles las desveladas.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo económico sin el cual no hubiera sido posible este trabajo de investigación.

Tabla de Contenido

RESUMEN	I
ABSTRACT	II
DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTOS	IV
TABLA DE SÍMBOLOS	VII
LISTA DE FIGURAS	VIII
LISTA DE TABLAS	X

CAPÍTULO	PÁGINA
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1. Modelos de ductos reconfigurables	2
I.1.1. Rejilla reconfigurable (R-Mesh)	2
I.1.2. Rejilla reconfigurable lineal (LR-Mesh)	3
I.1.3. Rejilla reconfigurable dirigida (DR-Mesh)	3
I.1.4. Poder computacional	4
I.2. Planteamiento del problema	6
I.3. Objetivos	7
I.4. Aportaciones	8
I.5. Organización de la tesis	9
II. SIMULACIÓN DE CÁRDENAS-HARO	10
II.1. DR-Mesh sobre R-Mesh	11
II.1.1. Etapa de configuración	11
II.1.2. Etapa de escritura	12
II.1.3. Algoritmo de simulación de la etapa de escritura	14
II.1.4. Etapa de lectura	17
II.1.5. Etapa de operación	17
II.2. R-Mesh sobre LR-Mesh	17
II.3. Simulación numérica	17
II.3.1. Características del modelo	19
II.3.2. Tiempo de ejecución	20
II.4. Experimentos de Cárdenas-Haro	21
II.5. Conclusiones de Cárdenas-Haro	22
III. MEJORAS AL ALGORITMO DE CÁRDENAS-HARO	23
III.1. Modificación del algoritmo de Cárdenas-Haro	24
III.2. Propagación del dato	26

Tabla de Contenido (Continuación)

CAPÍTULO	PÁGINA
IV. EVALUACIÓN DEL MODELO DE CÁRDENAS-HARO	28
IV.1. Preliminares	28
IV.2. Criterios de comparación	30
IV.2.1. Regularidad	31
IV.2.2. Número de nodos	35
IV.2.3. Alcanzabilidad	36
IV.2.4. Distribución del grado de entrada/salida de los nodos	37
IV.2.5. Diámetro del modelo	39
IV.3. Conclusiones	39
V. MODELO DE DOS NIVELES	43
V.1. Definición de eventos	44
V.2. Grados de salida equiprobables	46
V.3. Patrones de conexión equiprobables	51
V.4. Tiempo esperado del podado	52
V.4.1. Análisis con alta probabilidad (W.H.P.)	58
V.5. Grados de salida y patrones de conexión no equiprobables	64
VI. TRANSFORMACIÓN DEL MODELO DE CÁRDENAS-HARO	68
VI.1. Análisis del grafo transformado	72
VII. ANÁLISIS GENERAL	73
VII.1. Análisis del modelo de p niveles	73
VII.1.1. Análisis con alta probabilidad	81
VII.2. Simulación numérica	82
VII.2.1. Modelo de tres niveles	82
VII.2.2. Modelo de cuatro, cinco y seis niveles	88
VIII. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	94
VIII.1. Conclusiones	94
VIII.2. Trabajo futuro	96
BIBLIOGRAFÍA	97
VITA	99

Tabla de Símbolos

$\{a, \dots, z\}$	Notación de conjunto
\forall	Para todo
$n!$	Factorial de n
e	Base de logaritmo natural
$exp(x)$	Función exponencial de x
\in	Pertenece a
ϵ	Epsilon
M_{abcd}	Evento elemental de conexión del modelo de Cárdenas-Haro con dos niveles
$v_{i,j}$	Nodo localizado en el nivel i y la etapa j del modelo de Cárdenas-Haro
$C_{x,y}^{j-1}$	Combinación de grados de salida en la etapa $j - 1$
$E[X]$	Esperanza de una variable aleatoria X
$\ln x$	Logaritmo natural de x
$\log_b x$	Logaritmo base b de x
$\log x$	Logaritmo base 2 de x
μ_X	Esperanza de una variable aleatoria X
$P[A B]$	Probabilidad condicional de A dado B
$O(f(x))$	Notación de <i>Oh grande</i>
$\Theta(f(x))$	Notación de <i>Theta</i>
P_{Sx}	Probabilidad de que un nodo tenga grado de salida x
P_{Ex}	Probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada x
P_{Ex}^j	Probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada x en la etapa j
$P_{Ex}^{(k)}$	Probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada x en la iteración k
$P(R^j)$	Probabilidad de que un nodo sea podable en la etapa j
$P(R^{(k)})$	Probabilidad de que un nodo sea podable en la iteración k
$P(A^{(k)})$	Probabilidad de que un nodo esté activo en la iteración k

Lista de Figuras

FIGURA	PÁGINA
1. R-Mesh de 4×4 procesadores.	3
2. LR-Mesh de 4×4 procesadores.	4
3. DR-Mesh de 4×4 procesadores.	4
4. Clasificación del poder computacional de los modelos reconfigurables.	5
5. Etapas en la simulación de Cárdenas-Haro.	10
6. Simulación de las conexiones internas de un procesador DR-Mesh por un grupo de procesadores R-Mesh.	12
7. Ejemplo de la etapa de configuración.	13
8. Conexión de un bloque de la partición de puertos para simular la direccionalidad de un DR-Mesh.	14
9. Podado de nodos y propagación de datos según Cárdenas-Haro.	16
10. Ejemplo de la modelación de un patrón de conexiones reales.	18
11. Modelo simplificado del grafo equivalente del DR-Mesh.	19
12. Tiempo de propagación de un dato en una malla con 10,000 etapas y 16 niveles.	21
13. Tiempo de ejecución de la simulación completa en una malla de 10,000 etapas y 16 niveles.	22
14. Podado de nodos y propagación de datos.	26
15. Nodos que no recibieron el dato α	27
16. Nodos NOP para regularizar grafos.	32
17. Grafo no regular en aristas.	33
18. Nodos NOP para enlazar dos o mas etapas.	34
19. Tipo de conexiones entre nodos.	34
20. Tipo de conexiones de los nodos NOP.	36
21. Alcanzabilidad de las conexiones.	37
22. Tendencias en las conexiones del modelo de Cárdenas-Haro.	38
23. Ejemplo de grafos con 40 etapas.	42
24. Grafo de acuerdo al modelo de Cárdenas-Haro con dos niveles.	43
25. Posibles enlaces de comunicación en un patrón de conexiones para una red de dos niveles.	45
26. Espacio de salidas para la generación de conexiones; cada evento elemental representa una posible conexión.	45
27. Ejemplos de dos eventos en la etapa $j - 1$	48
28. Posibles enlaces de comunicación en un patrón de conexiones para una red de dos niveles.	52
29. Ejemplos de distribución de los grados de entrada.	65
30. Gráfica del número de iteraciones para un modelo de dos niveles y $n = 100$. 66	66

Lista de Figuras (Continuación)

FIGURA	PÁGINA
31. Gráfica del número de iteraciones para un modelo de dos niveles y $n = 10,000$	67
32. Gráfica del número de iteraciones para un modelo de dos niveles y $n = 1,000,000$	67
33. Ejemplo de la transformación de un nodo mediante nodos convergentes.	68
34. Ejemplo de la transformación de un nodo mediante nodos NOP.	69
35. Transformación general de las conexiones de la etapa $j - 1$ a la etapa j del grafo G	71
36. Gráfica de la función $f(x) = x - x^2$	80
37. Célula lenta.	81
38. Posibles aristas de entrada de un nodo x en el modelo de Cárdenas-Haro con cuatro niveles.	89
39. Gráfica que muestra la tendencia de la probabilidad de ocurrencia de nodos con grado de entrada cero de los modelos de cuatro, cinco y seis niveles.	91

Lista de Tablas

TABLA	PÁGINA
I. Eventos del grado de salida de los nodos de la etapa $j - 1$	46
II. Probabilidad de los eventos elementales de conexión.	47
III. Probabilidades de los grados de salida de los nodos en la etapa $j - 1$. .	47
IV. Probabilidad de los eventos de grado de salida.	48
V. Probabilidades condicionales de los grados de entrada en la etapa j . . .	49
VI. Distribución de probabilidad de X	50
VII. Distribución de la variable aleatoria Y	55
VIII. Resultados de tres iteraciones.	57
IX. Eventos de combinación de grados de salida en la etapa $j - 1$ del modelo con tres niveles.	84
X. Probabilidades condicionales de un modelo con tres niveles.	85
XI. Probabilidades condicionales de un modelo con tres niveles (Cont). . .	86
XII. Resultados de iteraciones en el modelo de tres niveles.	88
XIII. Distribución de grados de entrada del modelo de Cárdenas-Haro con cinco niveles.	90
XIV. Distribución de grados de entrada del modelo de Cárdenas-Haro con seis niveles.	90
XV. Resultados de iteraciones en el modelo de cuatro niveles.	92
XVI. Resultados de iteraciones en el modelo de cinco niveles.	92
XVII. Resultados de iteraciones en el modelo de seis niveles.	93

Capítulo I

Introducción

Conforme avanza la tecnología, nuevos retos aparecen y la necesidad de sistemas de cómputo que sean capaces de resolverlos se va incrementando. Hoy en día, el cómputo paralelo y/o distribuido ha ido extendiéndose a casi todos los ámbitos de la computación. Asimismo, diversos modelos de computación se han creado para representar de manera abstracta el funcionamiento de una variedad de computadoras paralelas. Dichos modelos facilitan el análisis y diseño de algoritmos.

Modelos tales como la PRAM (máquina paralela de acceso aleatorio) [JáJá, 1992] muestran su eficacia en la generación de algoritmos paralelos, pero su implementación en la práctica está limitada debido a las suposiciones poco realistas del acceso a recursos tales como procesadores o memoria. Por otro lado, las arquitecturas de conexiones fijas [Leighton, 1992] son bastante realistas pero tienen el inconveniente que los algoritmos diseñados para ellas no se pueden adaptar fácilmente a otros tipos de arquitecturas.

Actualmente, los modelos reconfigurables han ganado una gran atención ya que su aplicación para cierto tipo de problemas en cómputo paralelo puede tener un mejor rendimiento que otros modelos paralelos. Comparado con los dos modelos mencionados arriba, los modelos de cómputo reconfigurable proporcionan un mejor desempeño.

I.1. Modelos de ductos reconfigurables

En [Ben-Asher *et al.*, 1995] se define a un modelo de ductos reconfigurables como una red de procesadores operando de manera síncrona. Los procesadores que se encuentran en los nodos de la red ejecutan el mismo programa, tomando decisiones locales y realizando operaciones de acuerdo a los datos de entrada o que se encuentran almacenados de manera local. El problema a resolver define la localización de los datos de entrada y salida.

Un procesador se compone de una unidad aritmética, una unidad de memoria, y un interruptor con capacidades de reconexión. Cada conexión interna del procesador se establece según el modelo que se utiliza. Existen distintos modelos de ductos reconfigurables tales como: Torus Polimórfico [Li y Maresca, 1989], Arreglo de Procesadores con Sistema de Ducto Reconfigurable (PARBS) [Wang y Chen, 1990], Máquina de Ducto Múltiple Reconfigurable (RMBM) [Trahan *et al.*, 1996], entre otros.

La rejilla reconfigurable (R-Mesh) [Li y Stout, 1991, Miller *et al.*, 1993] es quizá el modelo reconfigurable más estudiado. Este modelo y algunas de sus variantes se definen a continuación. El presente trabajo de tesis se basa en algoritmos diseñados para este tipo de modelos.

I.1.1. Rejilla reconfigurable (R-Mesh)

La rejilla reconfigurable es un arreglo bidimensional de procesadores conectados en forma de malla o cuadrícula [Miller *et al.*, 1993]. Cada procesador en el R-Mesh tiene conexiones externas a los procesadores adyacentes y se comunica con ellos por medio de un conjunto de 4 puertos de entrada/salida. Un procesador puede particionar internamente su conjunto de puertos de tal forma que los puertos en el mismo bloque de la partición están conectados entre si. El R-Mesh permite 15 configuraciones distintas.

El R-Mesh es un modelo síncrono que puede reconfigurar sus ductos en cada ciclo de máquina. Se supone que la propagación de datos en el ducto es bidireccional y se realiza en tiempo constante.

La figura 1 muestra un R-Mesh de 4×4 procesadores.

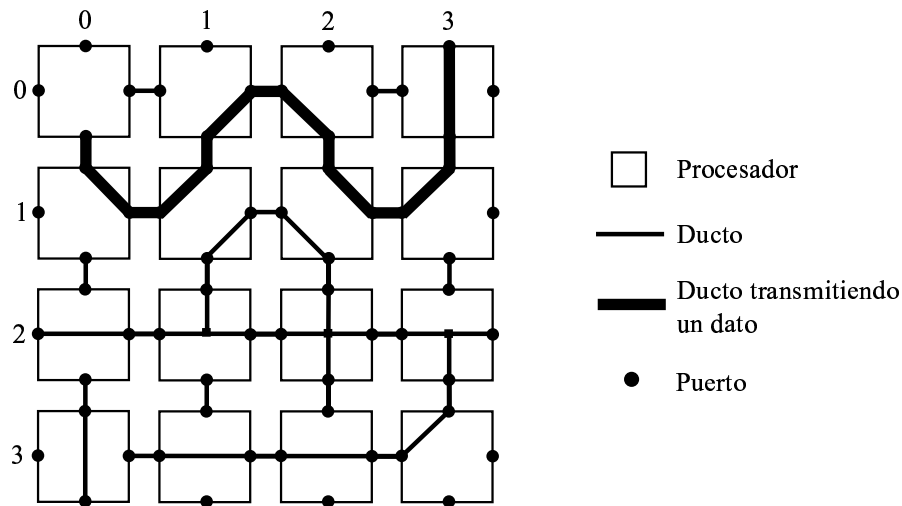


Figura 1. R-Mesh de 4×4 procesadores.

I.1.2. Rejilla reconfigurable lineal (LR-Mesh)

Es una versión restringida del R-Mesh [Ben-Asher *et al.*, 1995]. Cada puerto en un LR-Mesh puede conectarse a lo más con otro puerto dentro del mismo procesador. Permite 10 tipos de configuraciones dentro de cada procesador.

La figura 2 muestra un LR-Mesh de 4×4 procesadores.

I.1.3. Rejilla reconfigurable dirigida (DR-Mesh)

Sigue la estructura del R-Mesh pero con ductos dirigidos. Los datos en un ducto dirigido se propagan solamente en una dirección. Cada procesador en el DR-Mesh tiene 4 puertos de salida conectados a ductos de salida y 4 puertos de entrada conectados a ductos de entrada.

La figura 3 muestra un DR-Mesh de 4×4 procesadores.

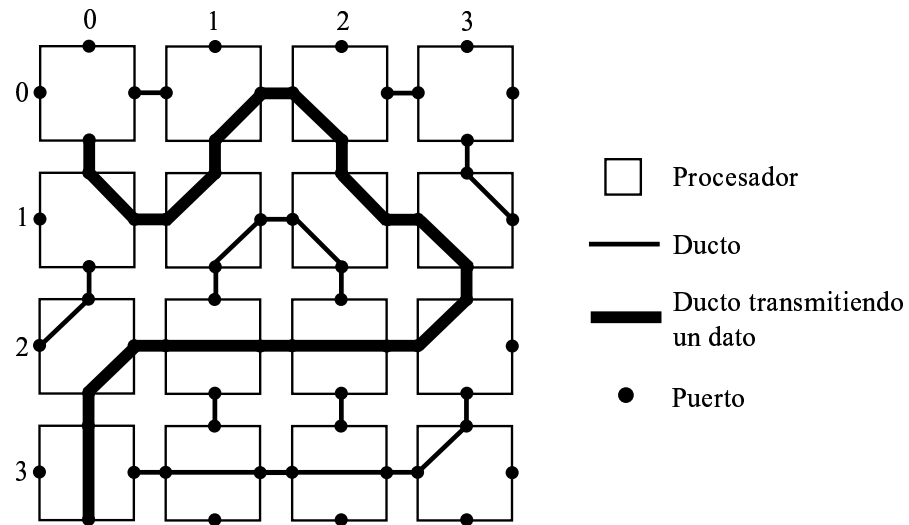


Figura 2. LR-Mesh de 4×4 procesadores.

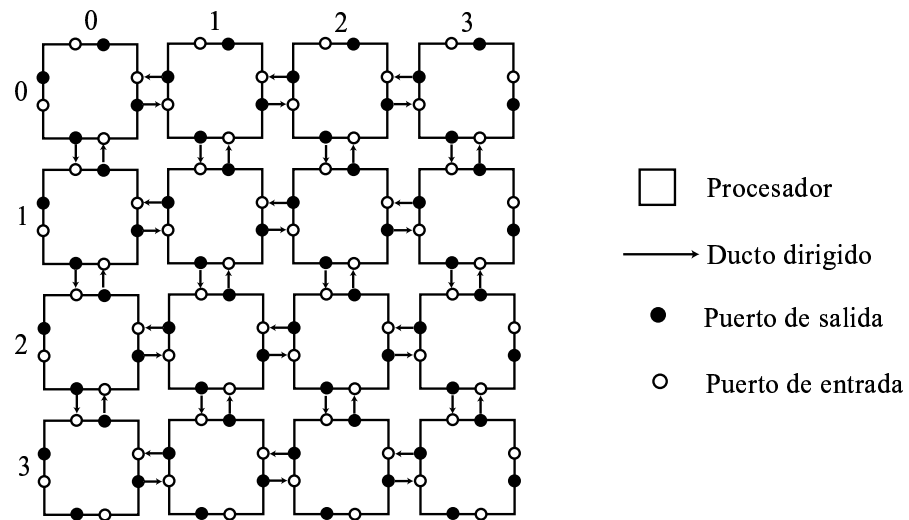


Figura 3. DR-Mesh de 4×4 procesadores.

I.1.4. Poder computacional

Una característica importante de los modelos de computación es su poder computacional, el cual se define de la siguiente manera:

Definición 1 Sean A y B dos modelos distintos de cómputo paralelo, el modelo A es computacionalmente igual de poderoso que el modelo B , si A reproduce un ciclo de máquina de B en un tiempo constante y viceversa, permitiendo un aumento polinomial en el número de procesadores. Asimismo, si A simula a B en tiempo constante pero no lo contrario, entonces se dice que A es computacionalmente más poderoso que B .

En la figura 4 se clasifican los modelos reconfigurables que conforman parte de este trabajo de acuerdo a su poder computacional y su factibilidad de construcción.

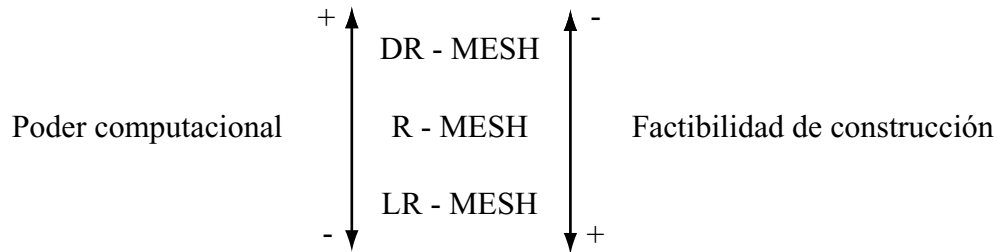


Figura 4. Clasificación del poder computacional de los modelos reconfigurables.

El DR-Mesh es computacionalmente más poderoso que el R-Mesh. Por su parte, se conjetura que el R-Mesh es computacionalmente más poderoso que el LR-Mesh aunque no se ha demostrado formalmente.

Generalmente los modelos computacionalmente más poderosos son más abstractos, pero facilitan el diseño de algoritmos. Por otro lado, los modelos menos poderosos dificultan el diseño de algoritmos pero su implementación en hardware es más factible. Con base en lo anterior, surge la necesidad de crear un mecanismo que permita simular a un modelo dado, con otro menos poderoso computacionalmente. Tal mecanismo debe minimizar el tiempo de ejecución de la simulación, así como el número de procesadores empleados.

Siguiendo esta filosofía, se han diseñado algoritmos que permiten simular en $O(\log N)$ u.t. a un DR-Mesh sobre un LR-Mesh [Trahan *et al.*, 1997]. Sin embargo, la utiliza-

ción de recursos en estas simulaciones es muy alta y hace más difícil su realización en la práctica. El trabajo descrito por Trahan *et al.* requiere $O(N^{12})$ procesadores para simular un modelo de $O(N^2)$ procesadores.

Posteriormente en [Fernández-Zepeda *et al.*, 1999], se propone una simulación que corre en el mismo tiempo que el anterior, pero utilizando menos procesadores ($O(N^8)$). Asimismo, en ese mismo artículo se propone otra simulación menos eficiente en tiempo ($O(\log^2 N)$ u.t.), pero con menos recursos ($O(\frac{N^4}{\log^2 N})$ procesadores).

Por su parte, Cárdenas-Haro desarrolló un algoritmo que reproduce el comportamiento de un ciclo de máquina de un DR-Mesh acíclico de $N \times N$ procesadores en un LR-Mesh de $N \times N$ procesadores [Cárdenas-Haro, 2001]. La principal ventaja de este algoritmo es que el modelo simulador utiliza el mismo número de procesadores que el modelo simulado. En el capítulo II se hace una descripción detallada de dicha simulación.

El presente trabajo de tesis es una continuación del trabajo de Cárdenas-Haro, a continuación se plantea el problema a resolver.

I.2. Planteamiento del problema

Se sabe que el tiempo máximo de ejecución del algoritmo de Cárdenas-Haro es $O(N^2)$ unidades de tiempo (u.t.). Él conjetura que su tiempo de ejecución promedio puede ser menor que $O(N)$ u.t., debido a que sus resultados experimentales muestran una simulación rápida en todos los casos probados. Cárdenas-Haro no hizo un análisis formal que determine el caso promedio del algoritmo, por tal razón en la presente tesis se determina formalmente una cota del tiempo de ejecución promedio del algoritmo.

Adicionalmente, surge un segundo problema. En los experimentos realizados por Cárdenas-Haro se utiliza un modelo aproximado del comportamiento de la propaga-

ción de datos en los ductos dirigidos. No es claro si este modelo aproximado refleja fielmente el comportamiento del modelo computacional original. Así que para resolver el problema del análisis del algoritmo, primero se evalúa la confiabilidad del modelo que se utilizó en la experimentación y se determina la fidelidad del comportamiento del modelo que se está simulando.

I.3. Objetivos

El objetivo general de este trabajo de investigación es encontrar una cota superior que exprese el tiempo de ejecución promedio del algoritmo de Cárdenas-Haro. Como una primera etapa para lograr este objetivo, es necesaria una investigación de campo y hacer una revisión del estado del arte del problema. También, repasar conceptos de probabilidad y estudiar las propiedades de grafos acíclicos, modelación con grafos, y distintas técnicas de análisis de algoritmos aleatorios.

Por otro lado, se busca comprobar la fidelidad del modelo que Cárdenas-Haro utiliza en sus experimentos, debido a que el análisis del tiempo de ejecución se basa en dicho modelo. Para ello, se decide crear procedimientos y lineamientos cualitativos que lo evalúen y permitan emitir un diagnóstico de si éste es una buena representación del modelo computacional que se pretende simular.

Se ve la necesidad de generar patrones de conexiones reales y compararlos con el modelo de Cárdenas-Haro para determinar qué tanto se aproxima uno a otro. En base a los resultados de esta evaluación, se realizan cambios en la estructura del modelo propuesto por Cárdenas-Haro.

Una vez que el modelo se ha evaluado y mejorado, se procede a analizarlo usando una metodología que inicia estudiando al modelo en su caso más simple (de dos niveles). Posteriormente se hace un estudio para tres, cuatro, cinco y seis niveles, hasta obtener

un análisis general del tiempo promedio de ejecución para p niveles. Finalmente, se interpretan los resultados y se hacen conclusiones al respecto.

I.4. Aportaciones

En el presente trabajo se hace un análisis del tiempo de ejecución promedio de la simulación de Cárdenas-Haro. El tiempo de ejecución promedio es $O(\log n)$ u.t. que sirve para corroborar la eficiencia de la simulación de Cárdenas-Haro y la establece como muy cercano al óptimo en tiempo de ejecución y en número de procesadores. Asimismo, la contribución que se obtiene al comprobar formalmente la rapidez del algoritmo es sumamente relevante, ya que aporta un avance significativo al paradigma del cómputo reconfigurable.

El análisis que aquí se realiza se basa principalmente en el modelo propuesto en la simulación de Cárdenas-Haro. Para el modelo con dos niveles, se demuestra que el tiempo de ejecución promedio es de $O(\log n)$ u.t. con alta probabilidad.

El modelo de Cárdenas-Haro presenta características especiales, que hasta donde se sabe, no se han investigado antes y que la información respecto a este tipo de problemas es escasa o nula. Debido a esto, el tipo de investigación que aquí se realiza es del tipo exploratorio y provee nuevas herramientas que pueden ayudar a determinar el comportamiento de modelos con características similares.

Por otro lado, se proponen criterios y lineamientos para comparar de manera cualitativa dos grafos entre sí. Esto con el motivo de determinar sus características principales y evaluar si un grafo se aproxima a otro. Para nuestros propósitos, se busca evaluar si el modelo que Cárdenas-Haro propone en su simulación se aproxima a cualquier patrón de conexiones generado en un DR-Mesh.

También aquí, se propone una nueva alternativa de análisis mediante la transformación del grafo de estudio. Esta transformación se realiza en el modelo de Cárdenas-Haro para generar un nuevo modelo con características más restringidas y quizá sea más fácil de analizar. La transformación involucra técnicas de redibujado y la definición de nuevos nodos que proporcionan regularidad y generan una nueva distribución de grados de entrada.

Finalmente, se puede resumir que la solución de este problema (único por sus características) formaliza la simulación de Cárdenas-Haro. Esta simulación es la más eficiente que se conoce en su tipo.

I.5. Organización de la tesis

En el capítulo II se describe y analiza el trabajo de Cárdenas-Haro. El capítulo III trata sobre modificaciones hechas al algoritmo de Cárdenas-Haro para simplificar el análisis, así como una mejor aproximación del modelo de un patrón de conexiones real. El capítulo IV presenta la evaluación del modelo de Cárdenas-Haro y su aproximación a un patrón de conexiones de un DR-Mesh. En el capítulo V se determina el tiempo de ejecución promedio con alta probabilidad del algoritmo de Cárdenas-Haro en su caso más simple (de dos niveles). Posteriormente, en el capítulo VI se transforma el grafo del modelo general de Cárdenas-Haro y se plantea una alternativa en el análisis del mismo. En el capítulo VII se determina el tiempo de ejecución promedio del algoritmo de Cárdenas-Haro y se simula numéricamente dicho algoritmo para los modelos con niveles tres, cuatro, cinco y seis. Finalmente, en el capítulo VIII se presentan las conclusiones de este trabajo de investigación, así como el trabajo futuro.

Capítulo II

Simulación de Cárdenas-Haro

En este capítulo se hace una reseña del trabajo elaborado por Cárdenas-Haro, el cual tiene por objetivo simular de manera eficiente un ciclo de máquina arbitrario de un modelo DR-Mesh de $N \times N$ procesadores en un LR-Mesh de $O(N \times N)$ procesadores.

El algoritmo propuesto por Cárdenas-Haro, se divide en 2 fases para realizar la simulación. La primera fase es la simulación aleatoria de un DR-Mesh sobre un R-Mesh. Esta es la parte más compleja del algoritmo y en ésta se basa este trabajo de investigación. La segunda fase consiste en simular el R-Mesh resultante (sin ciclos) sobre un LR-Mesh y se basa en un mecanismo presentado en [Fernández-Zepeda *et al.*, 1999], donde su implementación es trivial. En la figura 5 se aprecian las fases que sigue la simulación.



Figura 5. Etapas en la simulación de Cárdenas-Haro.

A continuación se detallan cada una de ellas.

II.1. DR-Mesh sobre R-Mesh

Cárdenas-Haro diseñó una simulación de un ciclo de máquina arbitrario de un DR-Mesh en un R-Mesh. La reproducción eficiente de éste implica que cualquier algoritmo que corra en un DR-Mesh puede correr eficientemente en un R-Mesh.

Un ciclo de máquina de un R-Mesh consiste de las siguientes etapas:

1. *Configuración.* Se conectan los puertos internamente.
2. *Escritura.* Uno o más procesadores, a través de sus puertos de salida, transmiten un mensaje por el ducto. Estos procesadores se denominan los transmisores de la red.
3. *Lectura.* Varios de los procesadores, a través de sus puertos de entrada, leen el mensaje que el transmisor envió por el ducto. Estos procesadores se llaman los receptores de la red.
4. *Operación.* Cada procesador realiza algún cálculo local.

A continuación se explica la simulación de cada una de estas etapas en un R-Mesh.

II.1.1. Etapa de configuración

Para simular las configuraciones que puede adoptar cada procesador del DR-Mesh con sus 8 puertos, Cárdenas-Haro propone el empleo de un grupo de 4×4 procesadores R-Mesh. Dicho grupo permite realizar las 4,140 configuraciones de un solo procesador DR-Mesh y la configuración de sus ductos tiene una estructura equivalente a la de un *crossbar*.

La figura 6a muestra un procesador DR-Mesh, con sus puertos denotados como $\{N, S, E, O\}$. El correspondiente subíndice i (input) indica que se trata de un puerto

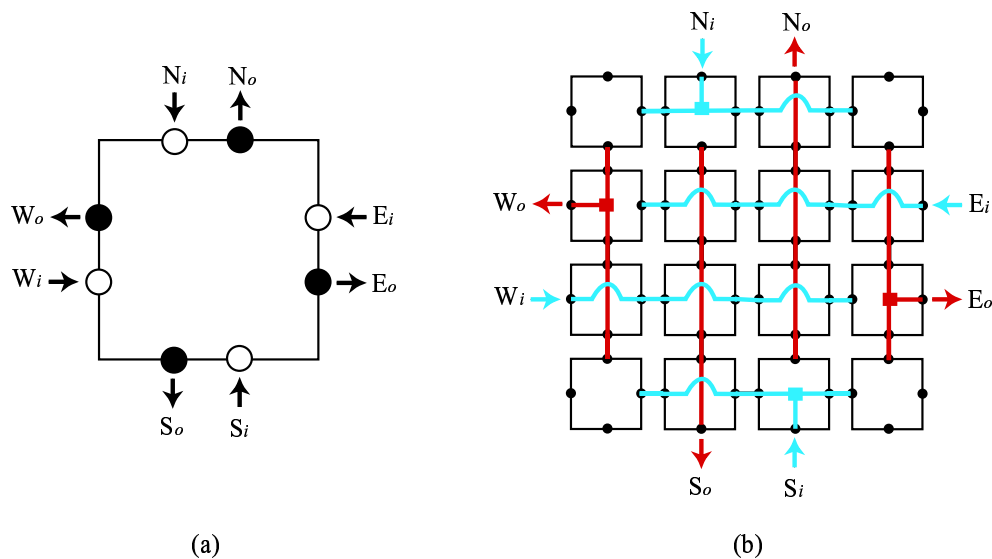


Figura 6. Simulación de las conexiones internas de un procesador DR-Mesh por un grupo de procesadores R-Mesh; a) procesador DR-Mesh; b) grupo de 4×4 procesadores R-Mesh que puede simular al procesador DR-Mesh.

de entrada, mientras que o (output) indica que los puertos son de salida. La figura 6b muestra el conjunto de 4×4 procesadores R-Mesh que simula al procesador DR-Mesh de la figura 6a. Esta configuración en particular representa una completa desconexión interna entre los puertos del DR-Mesh. La figura 7 ilustra un ejemplo de la simulación de la etapa de configuración de un DR-Mesh de 2×2 en un R-Mesh de 8×8 procesadores.

II.1.2. Etapa de escritura

Esta etapa es la más compleja de la simulación, ya que involucra simular la direccionalidad del ducto del DR-Mesh en el R-Mesh. Cárdenas-Haro supone que los modelos utilizados permiten escrituras y lecturas concurrentes. En particular, se supone que siguen una regla de escritura *común*, la cual permite escrituras concurrentes únicamente si todos los valores que se escriben en el ducto son iguales.

Cuando un grupo de procesadores R-Mesh, que simulan a un procesador transmisor DR-Mesh, escriben información en el ducto, es necesario propagarla hacia la dirección

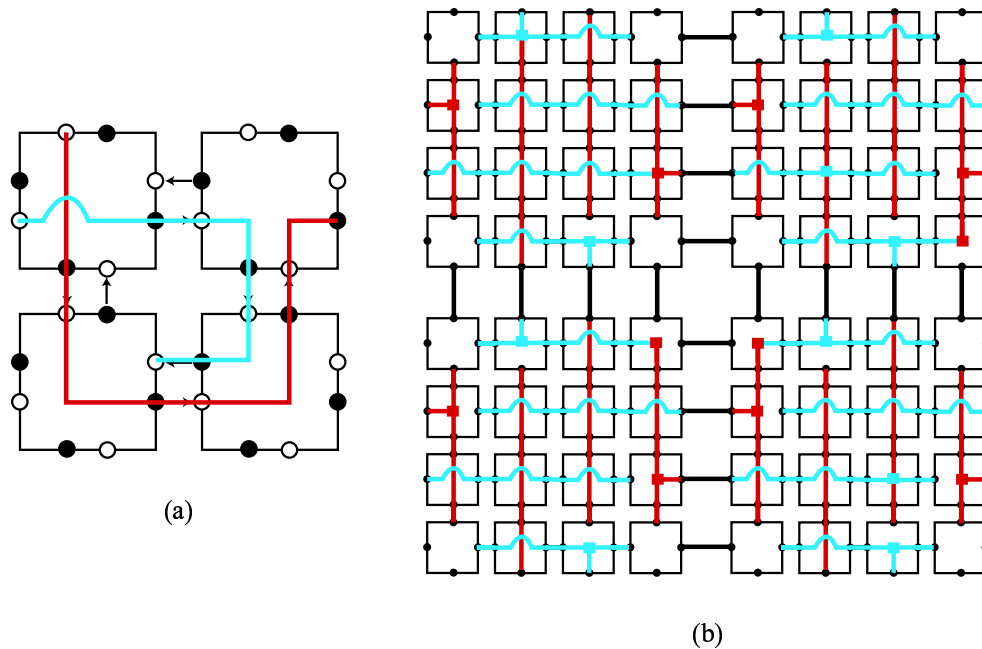


Figura 7. Ejemplo de la etapa de configuración; a) procesadores DR-Mesh; b) representación en mallas R-Mesh del patrón de conexiones DR-Mesh.

correcta, ya que el R-Mesh tiene ductos bidireccionales, mientras que el DR-Mesh los tiene dirigidos.

Para simular la direccionalidad del ducto del DR-Mesh, se emplea un procedimiento iterativo en el R-Mesh. En cada iteración, la configuración de cada grupo de 4 procesadores del R-Mesh cambia, permitiendo que en cada bloque de la partición de puertos sólo un puerto de entrada se conecte a la vez a los puertos de salida. De esta forma, se evita que una señal que llegue por un puerto de entrada pueda salir por otro puerto de entrada.

Este procedimiento corre en un número no determinado de iteraciones, ya que una señal que se propaga por los ductos puede sufrir varias interrupciones antes de llegar a todos sus destinos.

La selección del puerto de entrada que se conecta a los puertos de salida, se realiza en forma aleatoria con una distribución de probabilidad uniforme entre los posibles candidatos (ver Figura 8).

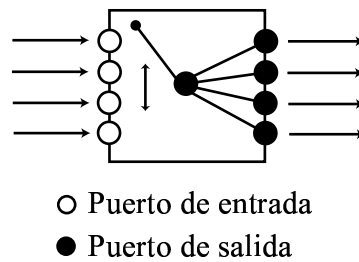


Figura 8. Conexión de un bloque de la partición de puertos para simular la direccionalidad de un DR-Mesh.

El peor de los casos ocurre cuando los 4 puertos de entrada son candidatos a conectarse a los puertos de salida. La probabilidad de que uno de los puertos de entrada se conecte a la salida es de $\frac{1}{4}$. Por otro lado, el mejor caso ocurre cuando se presenta un puerto de entrada como candidato. En este caso, la conexión entre los puertos es automática.

Cárdenas-Haro diseñó un algoritmo que propaga los datos por segmentos, realizando el desplazamiento de información sólo por los ductos que permitiría un DR-Mesh.

II.1.3. Algoritmo de simulación de la etapa de escritura

Este algoritmo está formado por cuatro procedimientos, tres de ellos se ejecutan en forma iterativa en cada grupo de procesadores R-Mesh. A continuación se presenta el pseudocódigo de dicho algoritmo.

ENTRADA:

- El patrón de conexiones de cada procesador DR-Mesh se almacena en el grupo de 4 x 4 procesadores R-Mesh que lo simula.

- El dato que cada procesador DR-Mesh transmisor debe enviar, se almacena en el grupo de 4 x 4 procesadores R-Mesh que lo simula.

SALIDA:

- Cada puerto de entrada de cada grupo de 4 x 4 procesadores R-Mesh recibe un dato transmitido o una señal que indique que no recibirá dato.

Configura_puertos

Para i <- 1 hasta X realiza en paralelo

 Configura_dirección

 Propaga_datos

 Poda_nodo

Fin_Para

Fin

En el primer paso el algoritmo reproduce a la etapa de configuración. El proceso de escritura de datos en el ducto se lleva a cabo en el ciclo indicado en el pseudocódigo. Después de la etapa de escritura, las etapas de lectura y operación se realizan de manera trivial. Los 4 procedimientos del algoritmo se explican a continuación:

- *Configura_puertos*. Reproduce las conexiones internas de cada procesador DR-Mesh en un conjunto de 4×4 procesadores R-Mesh. Esta conexión se realiza con ayuda de la configuración crossbar (figura 6b).
- *Configura_dirección*. En cada bloque de la partición de puertos de cada grupo de 4×4 procesadores R-Mesh, se desconectan los puertos de entrada excepto uno elegido al azar. Así se evita que un dato se envíe por otro puerto de entrada, otorgando “direccionalidad” al grafo.
- *Propaga_datos*. Simula la propagación de los datos escritos por los puertos en los ductos. Cada grupo de 4×4 procesadores R-Mesh, que simula a un procesador

transmisor, escribe su dato en sus puertos de salida. Cada bloque de la partición de puertos de cada grupo de 4×4 procesadores R-Mesh lee sus puertos de entrada, si en alguno de ellos se detecta el dato transmitido, entonces en la siguiente iteración dicho bloque propaga este dato por sus puertos de salida.

- *Podar_nodos*. Elimina nodos que no reciben ni transmiten datos en todo el proceso. Conforme se desarrolla el proceso iterativo del algoritmo, se identifican los nodos con grado de entrada cero y que no transmiten dato, y todas las cadenas lineales de nodos conectados a éstos. Se remueven todos estos nodos a la vez. Dicho proceso es similar a la técnica de contracción de árboles [JáJá, 1992].

La figura 9 muestra un ejemplo del podado de nodos y de la propagación de datos en base al algoritmo de Cárdenas-Haro. La figura 9a muestra el patrón inicial. En la figura 9b se muestra el estado de la malla al finalizar la primera iteración. Como se puede observar, el dato α se propagó una etapa por una rama y dos etapas por otra rama. El podado remueve los nodos con grado de entrada cero y que no transmiten datos y aquellas cadenas lineales conectadas a éstos y que tampoco transmiten datos. En la figura 9c se muestra el estado de la malla al finalizar la segunda iteración. Puede verse en esta figura cómo el dato α avanzó otra etapa mientras que a los nodos blancos los removió el proceso de podado.

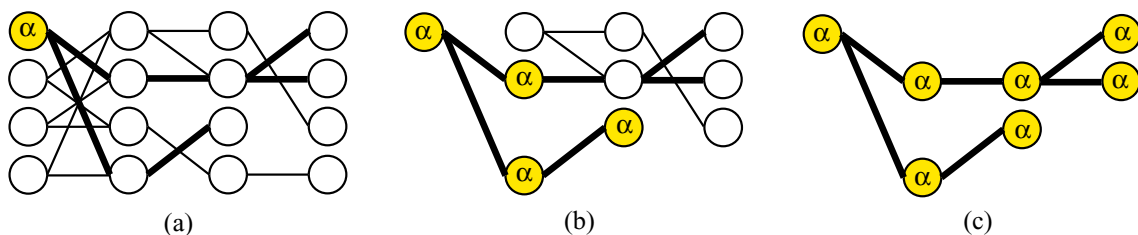


Figura 9. Podado de nodos y propagación de datos según Cárdenas-Haro; a) Configuración inicial; b) al finalizar la primera iteración; c) al finalizar la segunda iteración.

II.1.4. Etapa de lectura

Esta etapa es trivial una vez que la etapa de escritura se lleva a cabo. Cada grupo de 4×4 procesadores R-Mesh lee, a través de sus puertos de entrada, el dato que se encuentra disponible en el ducto. Los datos leídos corresponden a los que leería el procesador DR-Mesh.

II.1.5. Etapa de operación

Se supone que cada procesador del DR-Mesh, R-Mesh y LR-Mesh son de igual capacidad, y que el poder computacional del modelo no influye en su eficiencia. Debido a esto, la operación que se realiza en cada procesador del DR-Mesh la puede realizar un procesador (por ejemplo el de la esquina superior izquierda) del grupo de 4×4 procesadores R-Mesh que simula a dicho procesador DR-Mesh.

II.2. R-Mesh sobre LR-Mesh

Se entiende por *patrón de conexiones reales* como la reproducción exacta de cada una de las conexiones del modelo simulado en un grafo dirigido. El patrón de conexiones reales resultante de la simulación anterior es un bosque. Lo cual permite que se pueda simular un R-Mesh en un LR-Mesh con el mismo orden en el número de procesadores en $O(1)$ u.t. [Ben-Asher *et al.*, 1992]. Este proceso se implanta reemplazando cada arista del árbol por 2 aristas y construir después un Tour de Euler para linealizar los ductos [Fernández-Zepeda *et al.*, 1999].

II.3. Simulación numérica

Para obtener un estimado del tiempo de ejecución del algoritmo, Cárdenas-Haro propuso un modelo en donde implementó la etapa de escritura. Además de medir

el tiempo de ejecución, se pudo observar el comportamiento que siguen los datos al propagarse. Dicho modelo se genera en forma aleatoria y su objetivo es aproximar el peor de los casos de un patrón de conexiones de un DR-Mesh, este patrón se describe en la sección siguiente. Por otra parte, se supone que el DR-Mesh no tiene ciclos; debido a esto, el patrón de conexiones de un DR-Mesh se puede ver como un grafo acíclico dirigido (DAG).

La figura 10a muestra un ejemplo de un patrón de conexiones de DR-Mesh de 2×2 . La figura 10b muestra su representación como un grafo acíclico dirigido, cada nodo de este grafo es un bloque de la partición de puertos en cada procesador. La figura 10c corresponde al mismo grafo acomodado horizontalmente. Note que en la figura 10c no se incluyen los puertos de la frontera externa que no tienen conexión.

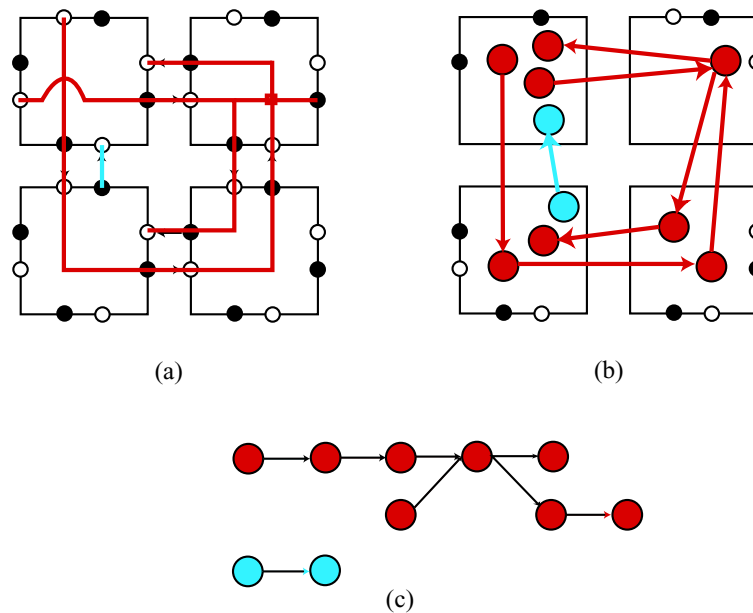


Figura 10. Ejemplo de la modelación de un patrón de conexiones reales; a) patrón de conexiones del DR-Mesh; b) representación de los bloques de la partición como nodos; c) grafo acíclico dirigido equivalente.

II.3.1. Características del modelo

El modelo aleatorio propuesto por Cárdenas-Haro es una malla rectangular de nodos compuesta por etapas y niveles. Las *etapas* del modelo las definen las columnas del grafo y representa la máxima longitud que un ducto puede tener, esto es $O(N^2)$ procesadores. Los *niveles* del modelo son el número de renglones que lo componen. El grafo tiene una estructura similar a las redes de interconexión multietapa. En la figura 11 se muestra el modelo de Cárdenas-Haro de manera general.

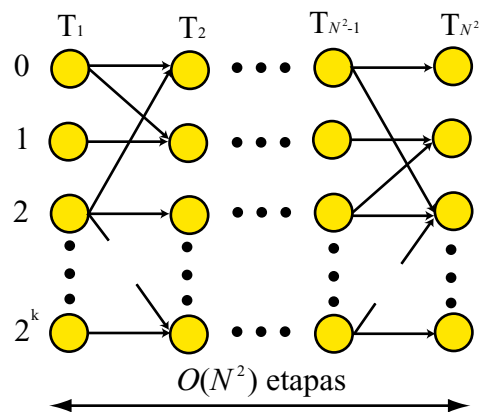


Figura 11. Modelo simplificado del grafo equivalente del DR-Mesh.

Las características principales del modelo son:

1. Cada nodo representa un bloque de la partición interna de conexiones entre puertos en un procesador DR-Mesh (o de un grupo de 4×4 procesadores R-Mesh que simula dicho procesador).
2. El número de niveles de nodos es una constante y por simplicidad es una potencia de 2.
3. El número de etapas de nodos es $O(N^2)$.
4. El grado de entrada o salida de cada nodo se escoge de manera aleatoria y puede ir desde cero hasta cuatro.

5. Cada arista representa la conexión entre dos bloques de puertos en procesadores vecinos.
6. La inserción de aristas en el modelo se hace de manera aleatoria entre pares de nodos de etapas adyacentes.
7. Se supone que existe sólo un nodo transmisor en la malla y éste se localiza en la esquina superior izquierda.

II.3.2. Tiempo de ejecución

El tiempo de ejecución del algoritmo de Cárdenas-Haro depende principalmente de la etapa de escritura que consta de los procesos de podado y de propagación de datos. Ambos dependen del patrón de conexiones sobre el que se ejecutan.

Cárdenas-Haro propone la utilización de ambos procesos por iteración, donde el proceso de podado debe realizarse antes de propagar el dato. El grado de entrada de los nodos es el atributo principal que influye en el tiempo de ejecución de estos procesos. Si un nodo del grafo tiene un grado de entrada igual a 1, entonces el dato pasa directo a la siguiente etapa sin interrupción. Por otro lado, si el nodo tiene un grado de entrada mayor a uno, entonces se realiza aleatoriamente una elección del puerto a conectar y existe una probabilidad distinta de cero que la propagación del dato se interrumpa.

Una vez que los nodos han recibido el dato correspondiente y el resto (los que no esperaban dato) fueron eliminados en el proceso de podado, entonces la etapa de escritura finaliza. En el peor de los casos, como el grafo tiene diámetro $O(N^2)$, el tiempo máximo de ejecución es $O(N^2)$ u.t. Sin embargo, Cárdenas-Haro conjetura que el tiempo de ejecución promedio puede ser menor a $O(N)$ u.t.

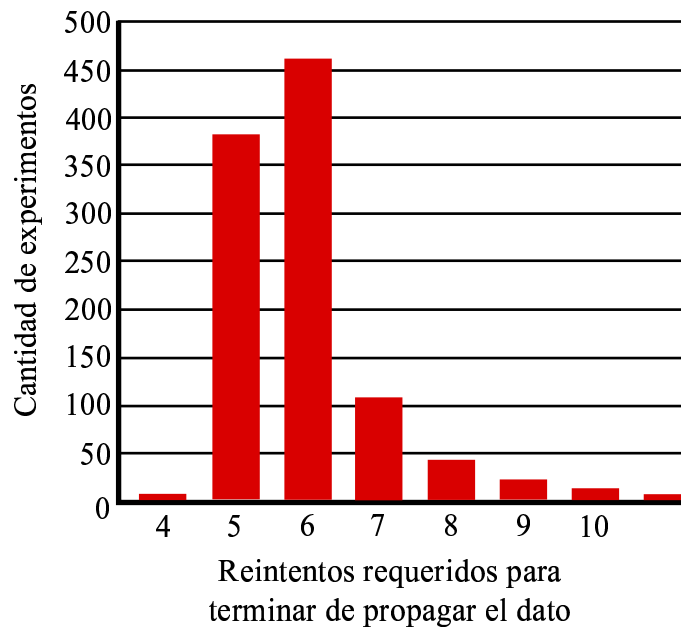


Figura 12. Tiempo de propagación de un dato en una malla con 10,000 etapas y 16 niveles. Cada nodo tiene un promedio de 1.33 enlaces de salida. El número de corridas es 1,000.

II.4. Experimentos de Cárdenas-Haro

Cárdenas-Haro realizó experimentos en una malla con 10,000 etapas y 16 niveles. Dicha malla se simuló con un programa de computación utilizando 1,000 corridas distintas. Los enlaces entre las etapas de la malla, se generaron aleatoriamente por medio de un generador uniforme de números aleatorios. En la figura 12 se muestran los resultados obtenidos en [Cárdenas-Haro, 2001]. El eje vertical indica el número de experimentos. El eje horizontal muestra el número de intentos requeridos para que el dato escrito por el nodo transmisor se propague hacia todos los lugares posibles. El promedio de enlaces por nodo es de 1.33 y como puede apreciarse, se ocuparon 11 pasos como máximo para finiquitar el proceso de propagación del dato. Cabe señalar que no necesariamente ha terminado la simulación, ya que posiblemente algunos nodos que no van a recibir datos esperen una señal de confirmación.

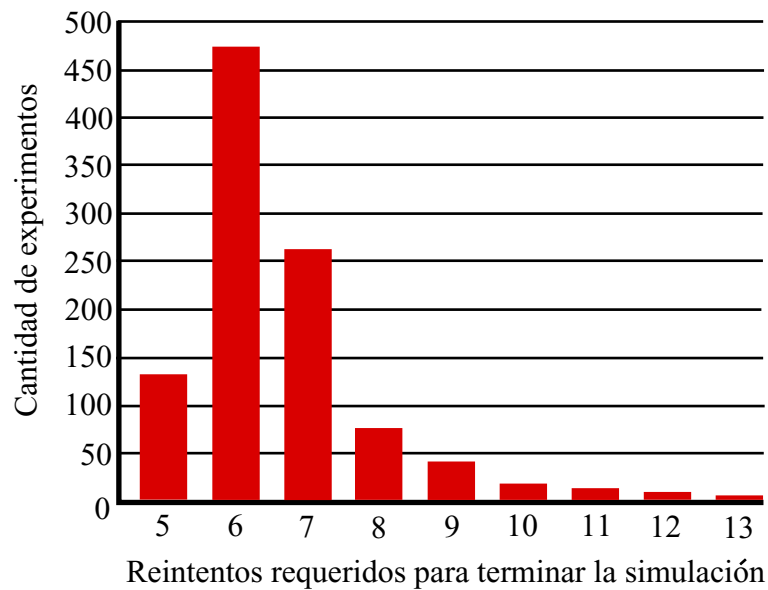


Figura 13. Tiempo de ejecución de la simulación completa en una malla de 10,000 etapas y 16 niveles. El número de corridas es de 1,000.

La figura 13 muestra los resultados del mismo experimento, pero ahora indicando el número de pasos necesarios para que finalice la simulación (es decir, que todos los nodos han recibido un dato o señal de confirmación).

Los resultados obtenidos por Cárdenas-Haro, muestran una simulación rápida en todos los casos, pero aún no se cuenta con un análisis formal que determine el caso promedio del algoritmo.

II.5. Conclusiones de Cárdenas-Haro

Cárdenas-Haro concluye que la simulación que propone es rápida en todos los casos. Además, el modelo simulador requiere el mismo orden de procesadores que el modelo simulado. La simulación previa más eficiente en recursos requiere de $O(N^4/\log^2 N)$ para un modelo sin restricciones (es decir, permitiendo conexiones con ciclos).

Cárdenas-Haro intuye que el tiempo de ejecución promedio es menor a $O(N)$, en base a los resultados que se obtuvieron en sus experimentos.

Capítulo III

Mejoras al algoritmo de Cárdenas-Haro

Cárdenas-Haro define a la etapa de escritura como la parte más compleja de la simulación. Esta etapa se realiza mediante un algoritmo aleatorio cuyo objetivo es simular la direccionalidad del ducto DR-Mesh en un R-Mesh. Dicho algoritmo se compone principalmente de dos partes: el proceso de podado y la propagación del dato. Originalmente, ambas se ejecutan en una misma iteración y la propagación del dato depende del proceso de podado y de la elección aleatoria del puerto de entrada para la conexión interna en cada procesador. Debido a esta dependencia y aleatoriedad, el análisis del tiempo de ejecución se complica.

La mejora que aquí se propone consiste en eliminar la aleatoriedad del algoritmo para simplificar el análisis. Así, en la siguiente sección de este capítulo se modifica el algoritmo aleatorio de Cárdenas-Haro transformándolo en un algoritmo determinístico. Dicha modificación hace que propagar un dato en el modelo de Cárdenas-Haro requiera sólo de una iteración del algoritmo. En la sección III.2 se demuestra formalmente esta aseveración.

III.1. Modificación del algoritmo de Cárdenas-Haro

El algoritmo de Cárdenas-Haro es iterativo y no termina su ejecución hasta que se complete toda la simulación. Dicha simulación se basa en la propagación de un dato a través de un patrón de conexiones generado aleatoriamente, dicho patrón es la entrada del algoritmo. Dado que originalmente el algoritmo de Cárdenas-Haro depende de decisiones aleatorias (como la selección del puerto de entrada en cada procesador), y además el resultado siempre es correcto, se define a éste como un algoritmo aleatorio *Las Vegas* [Motwani y Raghavan, 1995]. En este tipo de algoritmos, cada corrida sobre un mismo patrón de conexiones puede tener un tiempo de ejecución distinto.

Por otro lado, el tiempo de ejecución del algoritmo está acotado por el tiempo de terminación del podado, ya que el podado es independiente del avance del dato. Sin embargo, no necesariamente ocurre lo contrario, ya que debido a la selección del puerto de entrada en cada nodo la propagación del dato puede terminar primero.

La modificación propuesta en el presente trabajo de tesis se basa principalmente en cambiar el orden de ejecución tanto del podado como de la propagación del dato. Primero, se ejecuta el proceso de podado en varias iteraciones hasta finalizarlo y posteriormente se propaga el dato en los nodos restantes. Una vez que el podado finaliza, la propagación del dato se realiza en una sola iteración, ya que la selección del puerto de entrada es indistinta.

Así, el análisis del tiempo de ejecución del algoritmo se limita sólo al proceso de podado. A continuación se muestra el algoritmo de Cárdenas-Haro con la mejora implementada.

ENTRADA:

- El patrón de conexiones de cada procesador DR-Mesh se almacena en el grupo de 4 x 4 procesadores R-Mesh

que lo simula.

- El dato que cada procesador DR-Mesh transmisor debe enviar, se almacena en el grupo de 4 x 4 procesadores R-Mesh que lo simula.

SALIDA:

- Cada puerto de entrada de cada grupo de 4 x 4 procesadores R-Mesh recibe un dato transmitido o una señal que indique que no recibirá dato.

Configura_puertos

Para i <- 1 hasta X realiza en paralelo

 Poda_nodo

Fin_Para

Configura_dirección

Propaga_datos

Fin

Se observa que los procedimientos *Configura_direccion* y *Propaga_datos* se realizan fuera del ciclo paralelo, ya que necesitan sólo de una iteración para completarse. Así, tanto el podado como la propagación del dato se realizan de manera determinística en el algoritmo, por lo que éste ahora depende únicamente de la entrada del problema y no de decisiones aleatorias.

Para ilustrar lo anterior, las figuras 14a-c muestran un ejemplo del proceso de escritura definido en el algoritmo original de Cárdenas-Haro. Se observa que cada iteración consta del podado y de la propagación del dato. Por otra parte, las figuras 14e-g muestran el proceso de escritura del mismo grafo utilizando el algoritmo modificado. Se observa en la figura 14e que al realizar la primera iteración del podado resulta un grafo cuyos nodos aún no transmiten el dato. Finalmente, la figura 14f muestra que el grafo

ha sido completamente podado y entonces se procede a transmitir el dato por toda la red en una sola iteración.

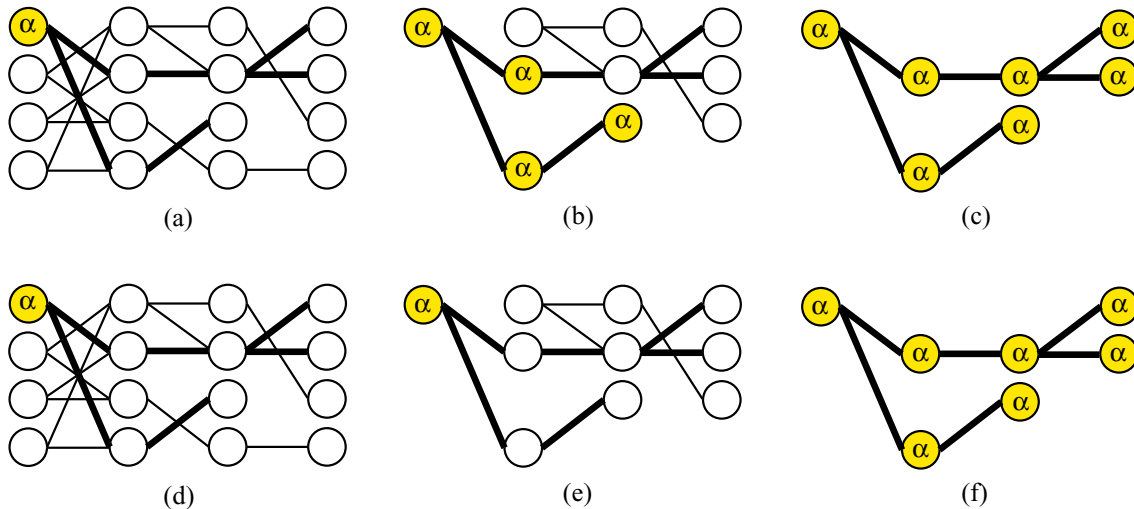


Figura 14. Podado de nodos y propagación de datos; a, b y c) Comportamiento utilizando el algoritmo original de Cárdenas-Haro; d, e y f) Comportamiento utilizando el algoritmo modificado.

III.2. Propagación del dato

En esta sección se demuestra formalmente que el tiempo de propagación de un dato en el modelo de Cárdenas-Haro es de $O(1)$ u.t. Para ello, se define el siguiente lema:

Lema 2 *Sea $G = (V, E)$ una grafo con las propiedades del modelo de Cárdenas-Haro cuyo proceso de podado fue finalizado. Sea $v_1 \in V$ un nodo transmisor localizado en la etapa 1 con un dato α a transmitir. Propagar un dato α desde el nodo transmisor v_1 hacia todos sus nodos sucesores, se realiza en una sola iteración.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es por contradicción. Se supone que se completó el proceso de podado en un grafo $G = (V, E)$ del modelo de Cárdenas-Haro. También se supone que se realiza una iteración de propagación del dato α y al terminar esta iteración existe un nodo v_k que no recibió el dato α .

El nodo v_k no puede ser una hoja, ya que se supone que el proceso de podado ha finalizado, así que el nodo v_k debe tener grado de entrada distinto de cero. Entonces existe al menos un nodo v_{k-1} , en la etapa previa a v_k que tampoco recibió ese dato ya que si lo hubiera recibido, éste lo hubiera propagado a v_k . Esto sucede con el nodo v_{k-1} y así sucesivamente hasta llegar a un antecesor inicial que como no puede ser una hoja debe ser el nodo transmisor v_1 (ver figura 15).

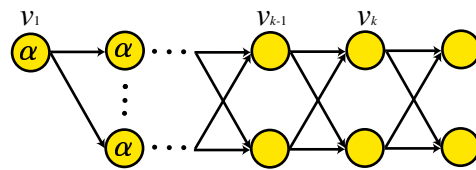


Figura 15. Nodos que no recibieron el dato α .

Del nodo v_1 al v_k pueden existir muchas trayectorias, dependiendo de cuántos antecesores tenga v_k , pero todas ellas empiezan en v_1 y terminan en v_k . Si v_1 transmite el dato éste debió llegar a v_k a través de alguna de estas trayectorias, por lo que existe una contradicción y el lema queda demostrado. \square

Capítulo IV

Evaluación del modelo de Cárdenas-Haro

En este capítulo se proponen criterios para comparar al modelo aleatorio propuesto por Cárdenas-Haro con un patrón de conexiones DR-Mesh arbitrario. Dicho modelo tiene por objetivo estudiar la propagación de datos en el ducto de un DR-Mesh. Asimismo, facilita el entendimiento del subpaso de escritura y es la base sobre la que se realiza el análisis de complejidad de la simulación.

IV.1. Preliminares

Un modelo es una representación abstracta de un objeto, sistema o idea. Su propósito es ayudar a explicar, entender o mejorar un sistema. Es deseable que un modelo tenga las siguientes características básicas:

1. *Fácil de entender*: La complejidad del modelo debe ser menor a la del sistema que se está modelando.
2. *Dirigido a metas u objetivos*: El modelo tiene el propósito de resolver problemas específicos que en el sistema real son difíciles de analizar.
3. *Fácil de manipular*: Debe ser sencillo comunicarse con el modelo.

4. *Completo*: El modelo debe contener las propiedades y características principales del sistema que se modela.
5. *Adaptable*: El modelo debe permitir la modificación de ciertas variables para el estudio de diferentes casos.

Con base en las características planteadas en el capítulo anterior del modelo propuesto por Cárdenas-Haro, se deduce que éste:

- Es fácil de entender, ya que simplifica la generación de cualquier patrón de conexiones y ayuda en el estudio del comportamiento de propagación de datos en el subpaso de escritura.
- Está dirigido a un objetivo específico; el cual es facilitar el análisis del tiempo de ejecución del subpaso de escritura de un DR-Mesh.
- Es completo ya que cualquier patrón de conexiones que se genere contiene las características básicas de un patrón de conexiones reales.
- Es adaptable porque permite la utilización de varios patrones de conexión para el estudio de diferentes casos, así como la facilidad para modificar los parámetros del modelo como número de etapas, niveles y grado de los nodos.

Por lo anterior, se aprecia que en principio el modelo de Cárdenas-Haro reúne estas características básicas para ser un buen modelo, siempre y cuando éste sea una representación fiel de un patrón de conexiones reales. Para evaluar la fidelidad del modelo, en la sección IV.2 se proponen algunos criterios adicionales de evaluación.

Por otro lado, el modelo de Cárdenas-Haro se visualiza como un grafo, donde cada nodo representa un bloque de la partición de puertos dentro de cada procesador DR-Mesh; cada arista representa al ducto que conecta a un par de bloques en

particiones de puertos de procesadores vecinos. Dicho grafo no contiene ciclos, por lo que las propiedades que conforman el modelo corresponden a las propiedades de un grafo acíclico. Esto provee la disponibilidad de una teoría formal para su estudio [Harary *et al.*, 1965], siendo tres los principales beneficios.

1. Se dispone de un vocabulario para describir la estructura del modelo de Cárdenas-Haro, atribuyendo términos (conectividad, grado, diámetro, etc.) establecidos en la teoría de grafos y topologías para un manejo más preciso.
2. Existen técnicas de cómputo y fórmulas para calcular las características cuantitativas y cualitativas del modelo.
3. Es posible obtener conclusiones acerca de ciertas propiedades de diversas estructuras de la teoría de grafos, para un mejor conocimiento de las propiedades del modelo de Cárdenas-Haro y de cualquier grafo de conexiones reales.

IV.2. Criterios de comparación

Para evaluar el modelo de Cárdenas-Haro con respecto a cualquier patrón de conexiones reales, en el presente trabajo de tesis se proponen algunos criterios de comparación. Estas sirven para analizar las similitudes entre ambos grafos y a continuación se describen brevemente cada una de ellos.

- Regularidad. Un grafo es regular si alguna de sus propiedades básicas siguen un patrón uniforme para algún criterio específico.
- Número de nodos. Cuando se comparan dos grafos, el número de nodos juega un papel importante. Se dice que dos grafos tienen el mismo orden de nodos si uno de ellos tiene α nodos y el otro $O(\alpha)$ nodos.

- Alcanzabilidad. Es el máximo número de opciones que un nodo tiene para conectarse.
- Distribución del grado de entrada/salida de los nodos. Establece la conectividad del grafo en cada una de sus etapas.
- Diámetro. Es la distancia más larga que existe entre cualquier par de nodos del grafo.

Con base en estos criterios de comparación, se decide si el modelo propuesto por Cárdenas-Haro se aproxima a un patrón de conexiones reales. Asimismo, se determina si el tiempo de ejecución promedio del algoritmo de Cárdenas-Haro se basa en un caso general del patrón de conexiones reales.

Si un grafo del modelo de Cárdenas-Haro fuera un supergrafo de cualquier grafo de conexiones reales, entonces el modelo sería una buena representación para estudiar la propagación de los datos. A continuación se comparan ambos grafos (el de Cárdenas-Haro y el de conexiones reales) en base a dichos criterios y se evalúa la relación que existe entre ellos.

IV.2.1. Regularidad

Un grafo es regular cuando sus propiedades siguen un patrón de comportamiento específico. Dichas propiedades pueden ser: el número de nodos, número de aristas, longitud de las aristas, grados de entrada/salida de los nodos.

A continuación se evalúa el modelo de Cárdenas-Haro con respecto al patrón de conexiones reales con base en estas propiedades.

Regularidad de nodos

Un grafo es regular en sus nodos cuando el número de nodos por etapa se mantiene constante. De acuerdo a esta definición, el modelo de Cárdenas-Haro es regular, mientras que un patrón de conexiones reales no lo es.

Para superar esta diferencia entre ambos, el presente trabajo de tesis propone un método de regularización de nodos. Dicho método consiste en utilizar nuevos nodos que se incrusten en el grafo de conexiones reales para completar el número de etapas y niveles, y otorgarle al grafo la misma regularidad que cualquier grafo del modelo de Cárdenas-Haro.

Estos componentes (llamados NOP) se eliminan en el proceso de podado sin afectar el tiempo de propagación de los datos. Para este caso, los nodos NOP tienen las siguientes características:

- Otorgan al grafo de conexiones reales homogeneidad en el número de nodos por etapa.
- Tienen grado de entrada/salida cero cuando regularizan el grafo.

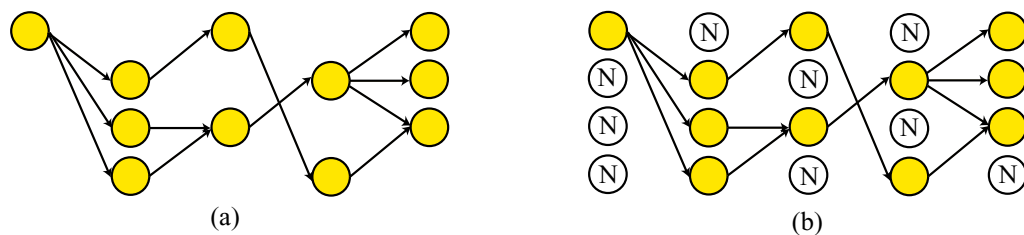


Figura 16. Nodos NOP para regularizar grafos; a) Grafo no regular en sus nodos; b) Grafo regular en sus nodos.

En la figura 16a se muestra un grafo de conexiones reales no regularizado. En la figura 16b se muestra el mismo grafo ya regularizado con nodos NOP. Éstos se etiquetan con N y tienen grado de entrada/salida igual a cero.

Regularidad de aristas

Cuando el número de aristas en las etapas de un grafo se mantiene constante, entonces se define al grafo como regular en sus aristas. Por lo que el modelo de Cárdenas-Haro y cualquier patrón de conexiones reales no son regulares bajo esta propiedad.

En la figura 17 se muestra un caso del modelo de Cárdenas-Haro con cuatro niveles, se puede apreciar que en cada etapa del mismo existen distintos números de aristas. Al igual que este modelo, un patrón de conexiones reales (regularizado en sus nodos) tampoco es regular en este aspecto.

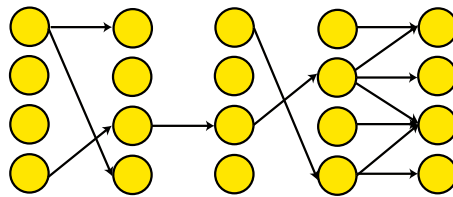


Figura 17. Grafo no regular en aristas.

El número de aristas en cada etapa la define la distribución de grados de entrada/salida de los nodos.

Regularidad de la longitud de aristas

Un grafo es regular en la longitud de sus aristas cuando todos sus enlaces abarcan un número constante de etapas. En el modelo de Cárdenas-Haro, los nodos sólo se conectan a etapas adyacentes, por lo que la longitud de sus aristas abarcan siempre una etapa. Por otro lado, un patrón de conexiones reales puede tener enlaces que abarcan dos o más etapas por lo que no es regular en este aspecto (ver figura 18a).

Para regularizar las longitudes de las aristas del patrón de conexiones reales, se establecen nuevos nodos y aristas NOP que permitan completar enlaces de más de una etapa entre dos nodos al conectarse como una cadena de nodos lineales (ver figura 19). Para este caso, estos nodos NOP tienen las siguientes características:

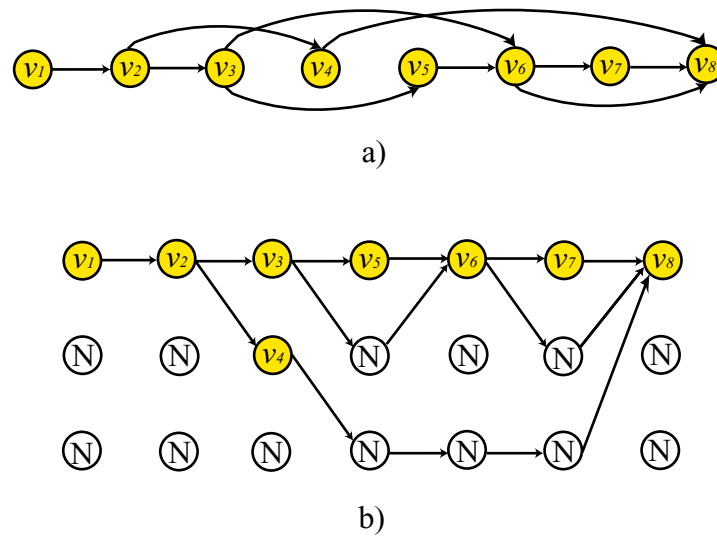


Figura 18. Nodos NOP para enlazar dos o más etapas; a) Grafo no regular en la longitud de aristas; b) Grafo regular en la longitud de aristas.

- Permiten la representación del enlace entre dos nodos que no se encuentran en etapas adyacentes.
- Tienen grado de entrada 1 cuando conectan nodos con una distancia de dos o más etapas. El grado de salida es mayor o igual a 1.
- No afectan el tiempo de ejecución.

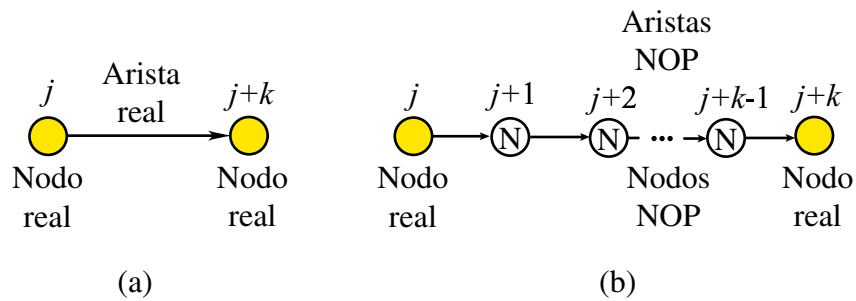


Figura 19. Tipo de conexiones entre nodos; a) Conexión directa entre dos nodos; b) Conexión indirecta entre dos nodos mediante nodos NOP.

Algo sensato es minimizar el número de los nodos y aristas NOP que se agregan. Eso se puede hacer redibujando el grafo de tal manera que el número de nodos por

etapa se reduzca. La figura 23a muestra un grafo de conexiones reales sin regularizar y la figura 23b muestra el mismo grafo ya regularizado en sus nodos y en la longitud de sus aristas, mediante la inserción de nodos y aristas NOP. Por otro lado, la figura 23c muestra un grafo del modelo de Cárdenas-Haro, donde se observa la regularidad implícita de éste. Cabe notar que el mecanismo de minimización de niveles y de etapas del grafo está fuera del alcance de este trabajo de tesis.

Regularidad de grados de entrada/salida

Este criterio trata sobre la consistencia que existe en los grados de entrada/salida de los nodos de un grafo. Un grafo del modelo de Cárdenas-Haro y uno del patrón de conexiones reales, no son regulares en este aspecto.

En el capítulo VI se propone un método para regularizar los grados de entrada/salida de los nodos del modelo de Cárdenas-Haro. Este método transforma a los nodos con grado de entrada/salida tres y cuatro a nodos con grados de entrada/salida menor o igual a dos. Esta transformación distribuye conexiones de nodos reales de una etapa a dos o más etapas, lo cual modifica los grados de salida de los nodos sin afectar el tiempo de ejecución. Un ejemplo de esta configuración de conexión se ilustra en la figura 20. La figura 20a presenta un nodo cuyo grado de salida es igual a cuatro; puede verse como se modifica para que sea un conjunto de nodos con grado de salida menor o igual a dos (ver figura 20b).

IV.2.2. Número de nodos

El número de nodos en un grafo de conexiones reales varía de acuerdo al tipo de conexiones internas en cada procesador. Este número va de N^2 hasta $8N^2$ nodos. El modelo que Cárdenas-Haro propone es regular, por lo que el número de nodos es igual al producto de sus lados. Si el ancho se escoge constante, entonces el número de etapas

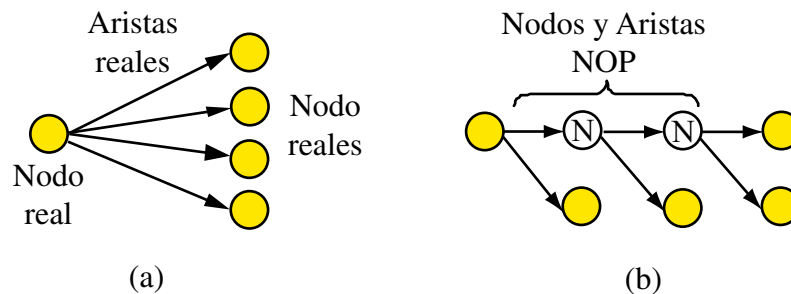


Figura 20. Tipo de conexiones de los nodos NOP; a) Conexión directa entre etapas (árbol cuaternario); a) Conexión indirecta entre etapas (árbol binario).

es $O(N^2)$. El modelo de Cárdenas-Haro se puede fijar con $8N^2$ nodos, siendo el máximo número de nodos que pudieran existir en un DR-Mesh; en tal caso el número de nodos del modelo real es normalmente más pequeño, pero ambos son del mismo orden.

Se deduce que cualquier grafo de un patrón de conexiones reales puede empotrarse en el modelo propuesto por Cárdenas-Haro, ya que se puede dibujar como un grafo regular. Los nodos que no correspondan al patrón de conexiones (nodos NOP) no influyen en el tiempo de ejecución.

IV.2.3. Alcanzabilidad

Existen limitaciones en las conexiones de un patrón de conexiones reales debido a las características de conexión del DR-Mesh. Por otro lado, en el modelo de Cárdenas-Haro las conexiones se generan aleatoriamente, y un nodo en la etapa $j - 1$ puede conectarse a cualquier otro nodo de la etapa j , teniendo como única restricción la limitación de cuatro conexiones por nodo. Así, el modelo Cárdenas-Haro puede generar patrones de conexión que en un DR-Mesh no se pueden realizar.

En la figura 21a se muestra un patrón de conexiones de un DR-Mesh. Se observa que el nodo etiquetado como 2 no puede conectarse a los nodos a y b directamente. En la figura 21b se muestra el patrón de conexiones reales regularizado y se ve esta

limitación. El modelo de Cárdenas-Haro podría permitir que el nodo 2 se conectara a los nodos a , b , c , d simultáneamente.

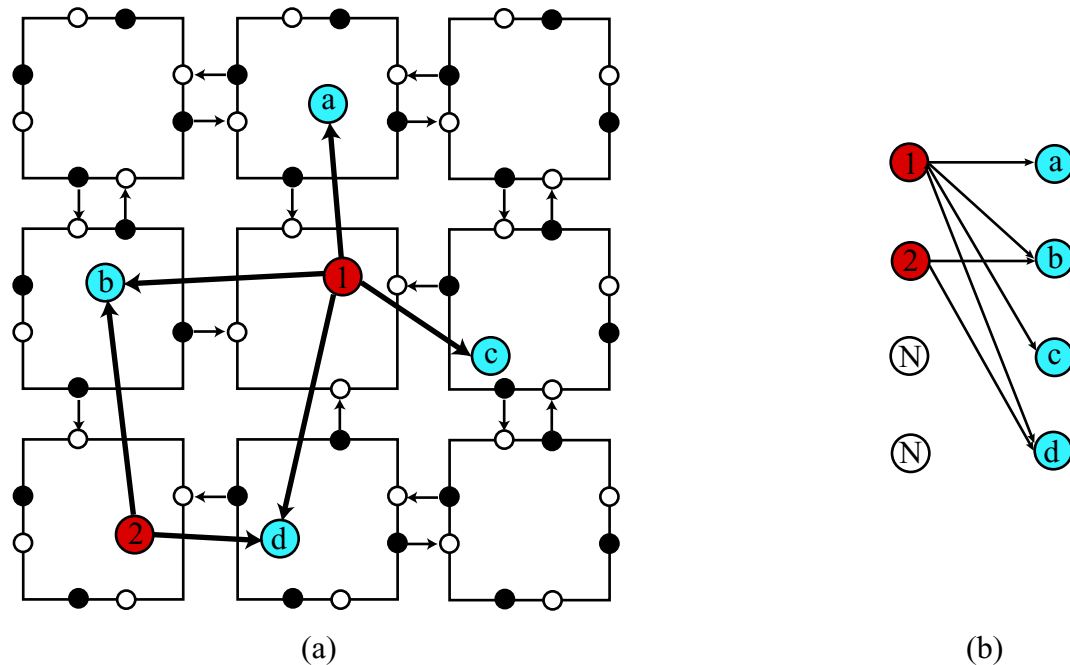


Figura 21. Alcanzabilidad de las conexiones; a) El nodo 2 no es vecino directo del nodo a y c ; b) patrón de conexiones reales restringido.

Sea A el conjunto de todas las posibles conexiones en un DR-Mesh y sea B el conjunto de todas las posibles conexiones que el modelo de Cárdenas-Haro genera. Entonces $A \subset B$; tal que $|B|$ representa una cota superior de $|A|$.

IV.2.4. Distribución del grado de entrada/salida de los nodos

En los experimentos reportados por Cárdenas-Haro se utilizan grafos aleatorios de 16 niveles cuyos nodos tienen una distribución de grados de salida definida para representar un peor caso de cualquier patrón de conexiones reales. Se asume que existe un ducto largo que funge como ducto troncal de longitud $O(N^2)$ que representa dicho caso.

Sin embargo, la probabilidad de tener este comportamiento en el patrón de conexiones reales es muy baja, por lo que esta distribución de grados de entrada/salida no es la más justa. Como raramente se encuentra este tipo de conexiones en un patrón real, el modelo de Cárdenas-Haro no es representativo del caso promedio del mismo.

Una forma de simular un caso más representativo del patrón de conexiones reales, es establecer una distribución uniforme en las conexiones de cada una de las etapas del modelo. Así, cada conexión tiene la misma probabilidad de ocurrir.

El número de aristas en un DR-Mesh es ligeramente menor a $8N^2$, lo que implica que en promedio existe entre una y dos aristas por nodo. Al asumir conexiones equiprobables en el modelo de Cárdenas-Haro, se establece un grafo más denso que un patrón de conexiones reales.

La distribución del grado de entrada de los nodos definen la conectividad del grafo, tal que existen dos tendencias principales: convergencia y divergencia. Se entiende por grafo convergente cuando la forma de las conexiones simula a un árbol, cuyo recorrido va desde las hojas hasta la raíz. Un grafo diverge cuando sigue la misma estructura pero el recorrido se ramifica, es decir, va desde la raíz hasta las hojas. La figura 22 muestra un ejemplo de estas dos tendencias de conectividad.

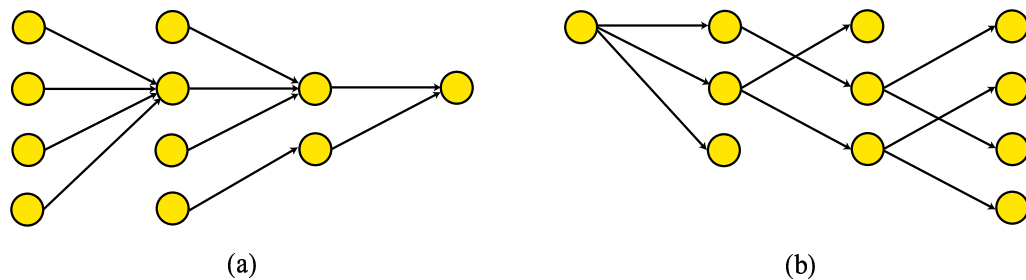


Figura 22. Tendencias en las conexiones del modelo de Cárdenas-Haro; a) Grafo convergente; b) Grafo divergente.

La conectividad divergente facilita la propagación de datos, ya que como los nodos tienen grado de entrada uno, las señales de confirmación se propagan fácilmente,

así que el proceso de podado se agiliza. La conectividad convergente es un caso más difícil de analizar por la forma como se interrumpe la propagación de información. El modelo propuesto por Cárdenas-Haro sigue una tendencia de conexiones mixta (convergente/divergente). Se conjetura que una tendencia de conexiones mixtas no es más difícil de analizar que una tendencia convergente.

IV.2.5. Diámetro del modelo

El diámetro del grafo está influenciado principalmente por el ducto más largo del patrón de conexiones, lo cual puede fungir como una cota inferior del número de etapas del modelo. En [Harary *et al.*, 1965] se deduce el siguiente teorema:

Teorema 3 *Sea G un grafo del modelo de Cárdenas-Haro, y sea n el camino más largo de G . Entonces el número más pequeño de etapas en cualquier asignación de etapas de G es $n + 1$.*

Aunado a este número mínimo de etapas, existe también un número de nodos y aristas NOP que se añaden al nodo troncal. Aunque esto toma importancia en la regularidad del modelo, no afecta en el tiempo de ejecución por las características de estos nuevos componentes.

IV.3. Conclusiones

Los criterios de comparación son el punto de partida sobre el cual se concluye que el modelo de Cárdenas-Haro es una buena representación de un peor caso de un patrón de conexiones reales. A continuación se explica la evaluación correspondiente a cada uno de estos criterios.

- Regularidad. El modelo de Cárdenas-Haro es regular en nodos mientras que un patrón de conexiones reales no lo es. Sin embargo, mediante la inserción de nodos

NOP en el patrón de conexiones reales, éste se regulariza sin afectar el tiempo de ejecución. Por otro lado, también existe una diferencia entre ambos grafos en la longitud de sus aristas. Dicha diferencia se resuelve mediante la inserción de nuevos nodos y aristas NOP. Así, se concluye que la aproximación entre ambos grafos con respecto a regularidad es del 100 %, sin alterar el tiempo de ejecución.

- Número de nodos. Existen más nodos podables en un grafo de conexiones reales regularizado que en un grafo del modelo de Cárdenas-Haro. Esto debido a que los componentes NOP insertados para la regularización del grafo son podables. Sin embargo, debido a la conectividad con la que se presenta el modelo de Cárdenas-Haro, el proceso de podado se realiza en un mayor tiempo.
- Alcanzabilidad. Cualquier patrón de conexiones reales se encuentra más limitado en sus conexiones que el modelo de Cárdenas-Haro, por lo que algunas conexiones del modelo no son representativas del problema. Sin embargo, analizar las conexiones de un DR-Mesh es complicado por las restricciones que presenta, mientras que en el modelo de Cárdenas-Haro la generación de conexiones es trivial. Debido a esto, se concluye que aunque el modelo genera algunas conexiones no reales, éste representa una cota superior en el tiempo de ejecución al analizar todas las posibles conexiones de un DR-Mesh y otras más.
- Distribución del grado de entrada/salida de los nodos. El modelo de Cárdenas-Haro se encuentra más densamente conectado en cada una de sus etapas que un patrón de conexiones reales. Por lo que existen más nodos con grado de entrada mayor a dos que interrumpen el proceso de podado. Por otro lado, se conjetura que una distribución más justa y que represente en promedio cualquier patrón de

conexiones reales, es establecer a cualquier conexión con la misma probabilidad de ocurrencia.

- Diámetro del modelo. Este punto afecta directamente al tiempo de ejecución de ambos grafos. Entre más grande sea el número de etapas, más tiempo tomará en podarse el grafo. Por otro lado, el diámetro del modelo de Cárdenas-Haro es $O(N^2)$, mientras que en un grafo de conexiones reales sin regularizar generalmente es menor.

Cualquier grafo de conexiones reales establecido en un DR-Mesh de $N \times N$, es un subgrafo del modelo de Cárdenas-Haro con una distribución de grados de entrada/salida equiprobables. Siendo este último, fácil de analizar por la regularidad que presenta y superior en su tiempo de ejecución.

Cárdenas-Haro asume una distribución de grados de salida en los nodos que facilita la generación del grafo. Sin embargo, la conectividad que resulta no es la más justa. Por lo que en esta tesis se asume que el grafo tiene conexiones equiprobables, lo cual provee una distribución más justa de las conexiones. La distribución de grados de entrada/salida de los nodos depende de este factor y su definición se basa principalmente en el número de niveles del modelo. Se analizan estos casos en el siguiente capítulo.

Con base a esta evaluación, se concluye que el modelo de Cárdenas-Haro con conexiones equiprobables se aproxima satisfactoriamente a cualquier patrón de conexiones reales, por lo que se procede a realizar el análisis probabilístico en este modelo.

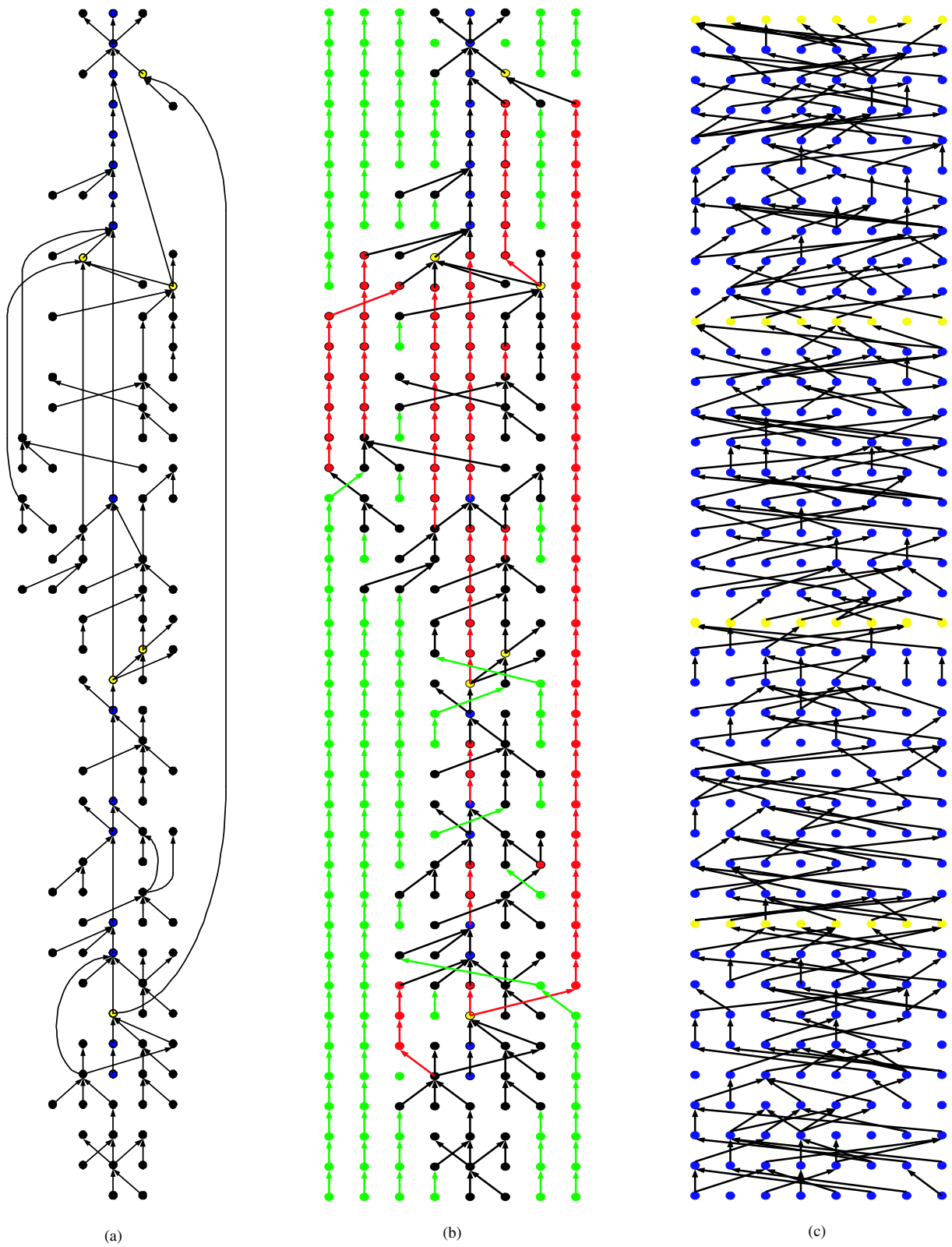


Figura 23. Ejemplo de grafos con 40 etapas; a) grafo de conexiones reales; b) grafo de conexiones reales regularizado mediante nodos NOP. c) grafo del modelo de Cárdenas-Haro.

Capítulo V

Modelo de dos niveles

El tiempo de ejecución del algoritmo de Cárdenas-Haro depende principalmente de la etapa de escritura que consta de los procesos de podado y de propagación de datos. La propagación del dato se puede realizar en $O(1)$ u.t. como se demuestra en la sección III.2, por lo que el análisis se cierra principalmente en el proceso de podado.

En este capítulo se determina el número de pasos promedio que tarda en finalizar el proceso de podado en un grafo $G = (V, E)$ del modelo de Cárdenas-Haro con dos niveles (renglones) y n etapas (columnas). Dicho proceso depende totalmente de la conectividad del grafo. En la figura 24 se ilustra un ejemplo de este tipo de grafo.

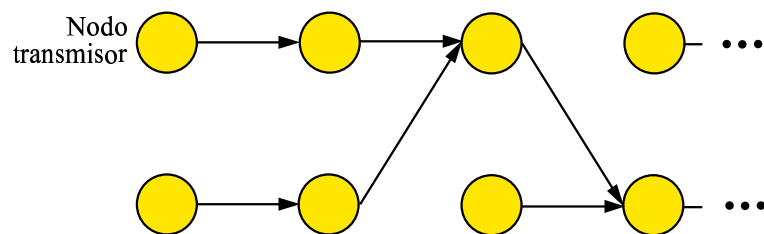


Figura 24. Grafo de acuerdo al modelo de Cárdenas-Haro con dos niveles.

La estructura del grafo G es similar a las redes de interconexión multietapa. El nodo localizado en el nivel i y en la etapa j se etiqueta como $v_{i,j}$ donde $1 \leq i \leq 2$ y $1 \leq j \leq n$. El objetivo es determinar, analizando la conectividad de G , el número de iteraciones necesarias para que el proceso de podado finalice.

En este análisis, primero se construyen las conexiones entre etapas de la malla de acuerdo a tres criterios:

1. Los grados de salida de los nodos son equiprobables.
2. Los patrones de conexión entre etapas son equiprobables.
3. Los grados de salida y patrones de conexión son no equiprobables.

En la sección V.1 se definen los eventos elementales de conexión y se fundamentan cada uno de los criterios mencionados. En la sección V.2 se estudia el primer caso, éste asume que para la construcción de conexiones de la etapa $j - 1$ a la etapa j los grados de salida de los nodos en la etapa $j - 1$ son equiprobables. En la sección V.3 se trata el segundo caso, éste otorga a cualquier patrón de conexión por etapa, la misma probabilidad de ocurrencia. Posteriormente, en la sección V.4 se realiza el análisis del tiempo de ejecución promedio correspondiente a los dos primeros casos, respectivamente. Finalmente, en la sección V.5 se hace el análisis para el tercer criterio, cuando el grado de salida de los nodos son no equiprobables y se determina el tiempo de podado para este caso más complejo.

V.1. Definición de eventos

En esta sección se definen todos los eventos de conexión y sus probabilidades de ocurrencia. Primero, se define el conjunto S que representa el espacio de salidas y cuyos elementos (denominados eventos elementales) representan diversos patrones de conexión entre la etapa $j - 1$ y la etapa j . Debido a las propiedades del grafo del modelo de Cárdenas-Haro, cada nodo en la etapa $j - 1$ puede tener cero, una o dos conexiones con la etapa j . En la figura 25 se muestran los posibles enlaces de comunicación (aristas) que pueden existir en un patrón de conexión.

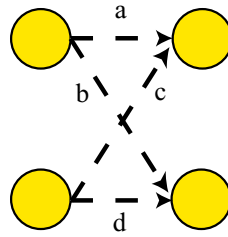


Figura 25. Posibles enlaces de comunicación en un patrón de conexiones para una red de dos niveles.

A cada enlace se le otorga una etiqueta y un valor binario. Este valor binario es 1 si tal enlace está presente en el patrón y 0 si no lo está.

La generación de conexiones se puede ver como un experimento cuyo espacio de salidas son 16 posibles patrones de conexión o eventos elementales por etapa denotados por M_{abcd} , donde $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ y representan los enlaces provenientes de los nodos de la etapa $j - 1$ (ver figura 26).

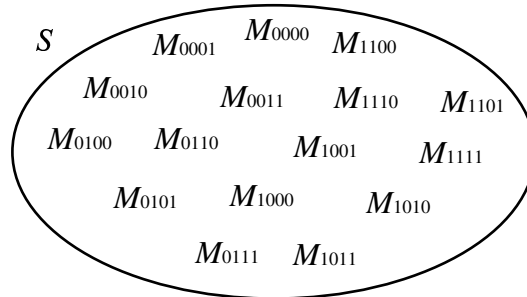


Figura 26. Espacio de salidas para la generación de conexiones; cada evento elemental representa una posible conexión.

Una vez definido el espacio de salidas S y sus eventos elementales, se procede a definir los eventos $C_{x,y}^{j-1}$ sobre el espacio de salidas S . Sea $C_{x,y}^{j-1}$ el evento “Los grados de salida de los nodos $v_{1,j-1}$ y $v_{2,j-1}$ son x y y , respectivamente”, donde $0 \leq x, y \leq 2$. Note que los eventos $C_{x,y}^{j-1}$ son disjuntos donde $x \neq y$ y $j \in \{2, \dots, n + 1\}$. Esto se aprecia en la tabla I que muestra cómo cada evento $C_{x,y}^{j-1}$ es un conjunto de eventos elementales.

Tabla I. Eventos del grado de salida de los nodos de la etapa $j - 1$.

Conexión	Eventos elementales
$C_{0,0}^{j-1}$	$\{M_{0000}\}$
$C_{0,1}^{j-1}$	$\{M_{0010}, M_{0001}\}$
$C_{0,2}^{j-1}$	$\{M_{0011}\}$
$C_{1,0}^{j-1}$	$\{M_{1000}, M_{0100}\}$
$C_{1,1}^{j-1}$	$\{M_{0101}, M_{1010}, M_{1001}, M_{0110}\}$
$C_{1,2}^{j-1}$	$\{M_{0111}, M_{1011}\}$
$C_{2,0}^{j-1}$	$\{M_{1100}\}$
$C_{2,1}^{j-1}$	$\{M_{1101}, M_{1110}\}$
$C_{2,2}^{j-1}$	$\{M_{1111}\}$

El primer criterio establece que todos los grados de salida de los nodos en la etapa $j - 1$ son equiprobables, por lo que $C_{x,y}^{j-1} = \frac{1}{9}$. Entonces dado que existen distintos números de eventos elementales en cada conjunto $C_{x,y}^{j-1}$, los eventos M_{abcd} tienen probabilidades distintas. La tabla II muestra las probabilidades de cada uno de estos eventos. La probabilidad de cada evento elemental M_{abcd} se asigna dividiendo $\frac{1}{9}$ entre el número de elementos del conjunto $C_{x,y}^{j-1}$ al cual el evento M_{abcd} pertenece.

En el segundo criterio se establece que los 16 eventos elementales son equiprobables. Así, $M_{abcd} = \frac{1}{16}$, $\forall a, b, c, d$. Por lo tanto, la probabilidad de $C_{x,y}^{j-1}$ varía en proporción al número de eventos elementales que lo conforman (ver tabla I). En la tabla III se muestran las probabilidades de los grados de salida de los nodos localizados en la etapa $j - 1$.

V.2. Grados de salida equiprobables

Una vez que se definen los eventos, en esta sección se determinan los grados de entrada de los nodos en el grafo con base en el primer criterio. Supóngase que cada nodo en la etapa $j - 1$ puede tener grado de salida uno, dos o tres con probabilidades P_{S0} ,

Tabla II. Probabilidad de los eventos elementales de conexión cuando los grados de salida son equiprobables ($C_{x,y}^{j-1} = \frac{1}{9}$, $0 \leq x, y \leq 2$).

M_{abcd}	Probabilidad
0000	$\frac{1}{9}$
0001	$\frac{1}{18}$
0010	$\frac{1}{18}$
0011	$\frac{1}{9}$
0100	$\frac{1}{18}$
0101	$\frac{1}{36}$
0110	$\frac{1}{36}$
0111	$\frac{1}{18}$
1000	$\frac{1}{18}$
1001	$\frac{1}{36}$
1010	$\frac{1}{36}$
1011	$\frac{1}{18}$
1100	$\frac{1}{9}$
1101	$\frac{1}{18}$
1110	$\frac{1}{18}$
1111	$\frac{1}{9}$

Tabla III. Probabilidades de los grados de salida de los nodos en la etapa $j - 1$, utilizando el criterio de conexiones equiprobables ($M_{abcd} = \frac{1}{16}$, $a, b, c, d \in \{0, 1\}$).

$C_{x,y}^{j-1}$	Probabilidad
$C_{0,0}^{j-1}$	$\frac{1}{16}$
$C_{0,1}^{j-1}$	$\frac{2}{16}$
$C_{0,2}^{j-1}$	$\frac{1}{16}$
$C_{1,0}^{j-1}$	$\frac{2}{16}$
$C_{1,1}^{j-1}$	$\frac{4}{16}$
$C_{1,2}^{j-1}$	$\frac{2}{16}$
$C_{2,0}^{j-1}$	$\frac{1}{16}$
$C_{2,1}^{j-1}$	$\frac{2}{16}$
$C_{2,2}^{j-1}$	$\frac{1}{16}$

P_{S1} y P_{S2} , respectivamente. (Inicialmente, se contempla el problema con probabilidades de salida distinta, con el objetivo de obtener expresiones adecuadas para el manejo de distintos parámetros. Posteriormente, para simplificar el análisis, en la sección V.3 se asume que $P_{S0} = P_{S1} = P_{S2}$.)

Con la distribución de probabilidad del grado de salida de los nodos en la etapa $j - 1$, se determina la distribución de probabilidad del grado de entrada de cada nodo de la etapa j . En la tabla IV se presenta la probabilidad de cada evento $C_{x,y}^{j-1}$ y en la figura 27 se dan dos ejemplos de estos eventos.

Tabla IV. Probabilidad de los eventos de grado de salida.

Evento	Probabilidad	Evento	Probabilidad	Evento	Probabilidad
$C_{0,0}^{j-1}$	P_{S0}^2	$C_{1,0}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S0}$	$C_{2,0}^{j-1}$	$P_{S2}P_{S0}$
$C_{0,1}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}$	$C_{1,1}^{j-1}$	P_{S1}^2	$C_{2,1}^{j-1}$	$P_{S2}P_{S1}$
$C_{0,2}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}$	$C_{1,2}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}$	$C_{2,2}^{j-1}$	P_{S2}^2

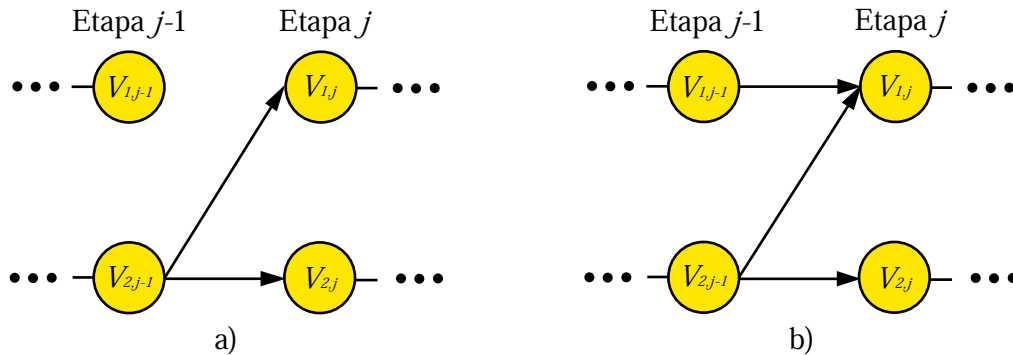


Figura 27. Ejemplos de dos eventos en la etapa $j - 1$; a) $C_{0,2}^{j-1}$; b) $C_{1,2}^{j-1}$

Ahora se presenta el procedimiento para calcular la probabilidad de que un nodo en la etapa j tenga grado de entrada cero, uno o dos. Esto se basa en que el grado de entrada de un nodo en la etapa j lo fija el tipo de conexión entre la etapa $j - 1$ y la j .

Sea E_z^j el evento “el grado de entrada de un nodo en la etapa j es igual a z ”, donde $0 \leq z \leq 2$. La probabilidad del evento E_z^j se denota como P_{Ez}^j . Se utiliza el teorema de probabilidad total [Papoulis y Pillai, 2002] para obtener P_{E0}^j , P_{E1}^j y P_{E2}^j ; este teorema se expresa a continuación:

$$P_{Ez}^j = P(E_z^j) = P(C_{0,0}^{j-1})P(E_z^j|C_{0,0}^{j-1}) + P(C_{0,1}^{j-1})P(E_z^j|C_{0,1}^{j-1}) + \dots + P(C_{2,2}^{j-1})P(E_z^j|C_{2,2}^{j-1}) \quad (1)$$

Las probabilidades condicionales $P(E_z^j|C_{x,y}^{j-1})$ para $0 \leq x, y, z \leq 2$ se presentan en la tabla V.

Tabla V. Probabilidades condicionales de los grados de entrada en la etapa j .

Grado de entrada cero	Grado de entrada uno	Grado de entrada dos
$P(E_0^j C_{0,0}^{j-1}) = 1$	$P(E_1^j C_{0,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{0,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,1}^{j-1}) = \frac{1}{2}$	$P(E_1^j C_{0,1}^{j-1}) = \frac{1}{2}$	$P(E_2^j C_{0,1}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{0,2}^{j-1}) = 1$	$P(E_2^j C_{0,2}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,0}^{j-1}) = \frac{1}{2}$	$P(E_1^j C_{1,0}^{j-1}) = \frac{1}{2}$	$P(E_2^j C_{1,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,1}^{j-1}) = \frac{1}{4}$	$P(E_1^j C_{1,1}^{j-1}) = \frac{1}{2}$	$P(E_2^j C_{1,1}^{j-1}) = \frac{1}{4}$
$P(E_0^j C_{1,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{1,2}^{j-1}) = \frac{1}{2}$	$P(E_2^j C_{1,2}^{j-1}) = \frac{1}{2}$
$P(E_0^j C_{2,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,0}^{j-1}) = 1$	$P(E_2^j C_{2,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{2,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,1}^{j-1}) = \frac{1}{2}$	$P(E_2^j C_{2,1}^{j-1}) = \frac{1}{2}$
$P(E_0^j C_{2,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{2,2}^{j-1}) = 1$

Sustituyendo los valores de las tablas IV y V en la ecuación 1 para $0 \leq z \leq 2$, se obtiene lo siguiente:

$$P_{E0}^j = P_{S0}^2 + P_{S0}P_{S1} + \frac{P_{S1}^2}{4} \quad (2)$$

$$P_{E1}^j = P_{S0}P_{S1} + 2P_{S0}P_{S2} + \frac{P_{S1}^2}{2} + P_{S1}P_{S2} \quad (3)$$

$$P_{E2}^j = P_{S2}^2 + P_{S1}P_{S2} + \frac{P_{S1}^2}{4} \quad (4)$$

Una vez calculadas las probabilidades P_{E0}^j , P_{E1}^j y P_{E2}^j , se calcula el número esperado de nodos con grado de entrada cero en la malla de estudio. Sea X una variable aleatoria que indica el número de nodos con grado de entrada cero, su distribución de probabilidad se muestra en la tabla VI.

Tabla VI. Distribución de probabilidad de X .

x	$P(x)$
1	P_{E0}^j
0	$1 - P_{E0}^j$

Note que la malla tiene $2n$ nodos y que los dos nodos de la primera etapa tienen grado de entrada cero. El valor esperado de X se calcula con la ecuación 5.

$$E(X) = \sum_{\forall \text{nodo } k} x_k P(x_k) \quad (5)$$

así

$$E(X) = 2 + \sum_{k=3}^{2n} (1) P_{E0}^j \quad (6)$$

$$E(\text{nodos con grado de entrada cero}) = 2 + (2n - 2) \left(P_{S0}^2 + P_{S0}P_{S1} + \frac{P_{S1}^2}{4} \right) \quad (7)$$

Utilizando el mismo procedimiento, se determina el número esperado de nodos con grado de entrada uno y dos.

$$E(\text{nodos con grado de entrada uno}) = (2n - 2) \left(P_{S0}P_{S1} + 2P_{S0}P_{S2} + \frac{P_{S1}^2}{2} + P_{S1}P_{S2} \right) \quad (8)$$

$$E(\text{nodos con grado de entrada dos}) = (2n - 2) \left(P_{S_2}^2 + P_{S_1}P_{S_2} + \frac{P_{S_1}^2}{4} \right) \quad (9)$$

Si se establece que las probabilidades de salida son equiprobables, P_{S_0} , P_{S_1} y P_{S_2} tienen cada una un valor de $\frac{1}{3}$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 2, 3 y 4, se obtiene:

$$P_{E_0}^j = \frac{1}{4}, \quad (10)$$

$$P_{E_1}^j = \frac{1}{2}, \quad (11)$$

$$P_{E_2}^j = \frac{1}{4}, \quad (12)$$

para $2 \leq j \leq n$.

V.3. Patrones de conexión equiprobables

En el procedimiento de la sección V.2 se fijan las probabilidades del grado de salida de los nodos, y a partir de éstas se obtienen las probabilidades de grado de entrada de los mismos. En la presente sección se establece como punto de partida que todos los patrones de conexión en el espacio de salidas son equiprobables (esto es, la probabilidad de cualquier evento M_{abcd} es igual a $\frac{1}{16}$), y a partir de éstos se obtienen las probabilidades de grado de entrada.

Para calcular las probabilidades de grado de entrada para un nodo x , es necesario analizar todos los posibles patrones de conexión en la etapa anterior a x . Asimismo, es posible mediante este procedimiento obtener las probabilidades de salida, las cuales son simétricas a los siguientes resultados:

1. El nodo x tiene grado de entrada cero cuando los enlaces a y c son iguales a cero (ver figura 28), entonces se obtiene que $P_{E0} = \frac{1}{4}$, ya que de los 16 posibles patrones de conexión sólo 4 satisfacen esta condición.
2. El nodo x tiene grado de entrada uno cuando $a + b = 1$, de aquí que $P_{E1} = \frac{1}{2}$.
3. El nodo x tiene grado de entrada dos cuando a y c son iguales a uno, quedando $P_{E2} = \frac{1}{4}$.

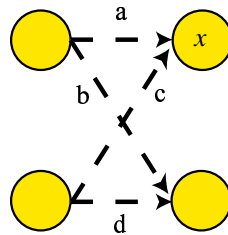


Figura 28. Posibles enlaces de comunicación en un patrón de conexiones para una red de dos niveles.

Como se puede observar, se obtienen las mismas probabilidades de entrada que para el caso de distribución equiprobable de los grados de salida. Así, que los valores esperados de nodos con grado de entrada cero, uno y dos son iguales a los de las ecuaciones 10, 11 y 12, respectivamente.

V.4. Tiempo esperado del podado

Una vez obtenidas las probabilidades de entrada de cada nodo, se procede a realizar el análisis del tiempo de podado. Antes, es necesario definir lo que es un nodo podable:

Definición 4 *Un nodo x es podable si cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*

1. *El nodo x tiene grado de entrada cero y además no escribe en sus aristas de salida.*

2. *El nodo x tiene grado de entrada uno, no escribe en sus aristas de salida, y además su antecesor es podable.*

El podado es un proceso iterativo. En cada iteración se eliminan a todos los nodos que se hayan identificado como podables. Después de eliminarlos, se identifican nuevos nodos podables que se eliminan en la iteración siguiente. Note de la definición 4, que si ningún nodo cumple la condición 1, entonces ningún nodo puede cumplir la condición 2 y no pueden existir nodos podables. Esta propiedad es importante para detectar el final del proceso de podado, éste ocurre cuando no existen nodos de grado de entrada cero que no escriben en sus aristas.

Un parámetro importante durante el proceso de podado es el número de nodos que se eliminan en cada iteración. En esta sección se calcula el valor esperado de esta clase de nodos. Con base en estos cálculos, se puede obtener el tiempo esperado del proceso de podado.

Es importante recalcar que:

- El grado de entrada de un nodo de la etapa j es independiente del grado de entrada de los nodos de la etapa $j - 1$.
- Un nodo con grado de entrada uno que no escribe es un nodo podable si todos sus antecesores también son podables.

Con base en estas observaciones, se puede ver a cada nodo podable como una *Prueba de Poisson* [Papoulis y Pillai, 2002], ya que dichos eventos son independientes entre sí y cada uno tiene una probabilidad particular que depende de j .

Definase a R^j como el evento “el nodo x en la etapa j es podable”. La probabilidad de R^j es igual a:

$$P(R^j) = P_{E0}^j + P_{E1}^j P(R^{j-1}) \quad (13)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación 13 es la probabilidad de que el nodo x en la etapa j tenga grado de entrada cero (condición 1 de la definición 4). El segundo término representa la probabilidad de que el nodo x en la etapa j tenga grado de entrada uno y además que el antecesor de x sea podable (condición 2).

Al desarrollar la recursión, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 P(R^{j-1}) &= P_{E0}^{j-1} + P_{E1}^{j-1}P(R^{j-2}) \\
 P(R^{j-2}) &= P_{E0}^{j-2} + P_{E1}^{j-2}P(R^{j-3}) \\
 &\vdots \\
 P(R^2) &= P_{E0}^2 + P_{E1}^2P(R^1)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Donde $P(R^1)$ es la probabilidad de que el antecesor de x en la etapa 1 sea podable, la cual es $\frac{1}{2}$. (En la etapa 1 existen dos nodos con grado de entrada cero, pero uno de ellos es transmisor, así que sólo uno de ellos es podable).

Como se supone que los patrones de conexión son independientes unos de otros en cada etapa, se puede observar que la probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada cero o uno en la etapa j , es la misma en la etapa $j + 1$ para $2 \leq j \leq n - 1$. Entonces, se puede simplificar la notación haciendo $P_{E0} = P_{E0}^j$ y $P_{E1} = P_{E1}^j$. Al resolver la recurrencia se obtiene que,

$$\begin{aligned}
 P(R^j) &= P_{E0} + P_{E1}(P_{E0} + P_{E1}(P_{E0} + P_{E1}(\dots P_{E0} + P_{E1}(P_{E0} + P_{E1}/2)\dots))) \\
 P(R^j) &= \frac{(P_{E1})^{j-1}}{2} + P_{E0} \sum_{k=0}^{j-2} (P_{E1})^k \\
 P(R^j) &= \frac{(P_{E1})^{j-1}}{2} + P_{E0} \left(\frac{1 - (P_{E1})^{j-1}}{1 - P_{E1}} \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Factorizando la ecuación 15 queda que

$$P(R^j) = (P_{E1})^{j-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{P_{E0}}{1 - P_{E1}} \right) + \frac{P_{E0}}{1 - P_{E1}} \quad (16)$$

Note que si $P_{E0} = P_{E2}$ entonces $P_{E0} + P_{E2} = 2P_{E0} = 1 - P_{E1}$ por lo que $\frac{P_{E0}}{1 - P_{E1}} = \frac{1}{2}$.

Si sustituimos este valor en la ecuación 16, el primer término se cancela y

$$P(R^j) = \frac{P_{E0}}{1 - P_{E1}} \quad (17)$$

Si $P_{E0} = P_{E2}$, $P(R^j)$ se vuelve constante e independiente de la etapa j . Sustituyendo los valores de las ecuaciones 10 y 11 en la ecuación 16 se obtiene:

$$P(R^j) = \frac{1}{2} \quad (18)$$

Sea Y una variable aleatoria que indica el número de nodos podables. Su distribución de probabilidad se muestra en la tabla VII.

Tabla VII. Distribución de la variable aleatoria Y .

y	$P(y)$
1	$P(R^j)$
0	$1 - P(R^j)$

El número de nodos que se espera se poden en la primera iteración se calcula de la siguiente forma:

$$E[Y] = 1 + 2 \sum_{j=2}^n (1)P(R^j) \quad (19)$$

$$E[Y] = 1 + 2 \sum_{j=2}^n \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= 1 + n - 1 \\
 E[Y] &= n
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Al final de la primera iteración, de un total de $2n$ nodos, se espera que n nodos se poden (100 % de los nodos con grado de entrada cero y 50 % de los nodos con grado de entrada uno). Únicamente permanecen aquellos nodos con grado de entrada dos y 50 % de los nodos con grado de entrada uno. A su vez, cada nodo con grado de entrada dos se afecta de la siguiente manera:

- a) Si antes de la primera iteración, ambos antecesores del nodo eran podables, entonces el nodo con grado de entrada dos se transforma en un nodo con grado de entrada cero. La probabilidad de que esto ocurra es:

$$P_{E2 \rightarrow E0}^j = [P(R^j)]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \tag{21}$$

- b) Si antes de la primera iteración, sólo uno de sus antecesores era podable, entonces el nodo con grado de entrada dos se transforma en un nodo con grado de entrada uno. La probabilidad de que esto ocurra es:

$$P_{E2 \rightarrow E1}^j = 2[P(R^j)][1 - P(R^j)] = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \tag{22}$$

- c) Si ninguno de sus antecesores era podable, el nodo con grado de entrada dos permanece como tal. La probabilidad de que esto ocurra es:

$$P_{E2 \rightarrow E2}^j = [1 - P(R^j)]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \tag{23}$$

De lo anterior se deduce que:

- 25 % de los nodos con grado de entrada dos se transforman en nodos con grado de entrada cero.
- 50 % de los nodos con grado de entrada dos se transforman en nodos con grado de entrada uno.
- 25 % de los nodos con grado de entrada dos permanecen como nodos con grado de entrada dos.

Un resumen de lo acontecido en la primera iteración se puede observar en la tabla VIII.

Tabla VIII. Resultados de tres iteraciones.

	Inicio		Después de la 1er. iteración		Después de la 2a. iteración	
Total de nodos	$2n$	100 %	n	100 %	$\frac{n}{2}$	100 %
Grado de entrada cero	$\frac{n}{2}$	25 %	$\frac{n}{8}$	12.5 %	$\frac{n}{32}$	6.25 %
Grado de entrada uno	n	50 %	$\frac{3}{4}n$	75 %	$\frac{7}{16}n$	82.5 %
Grado de entrada dos	$\frac{n}{2}$	25 %	$\frac{n}{8}$	12.5 %	$\frac{n}{32}$	6.25 %

Como se observa de la tabla, $P_{E0} = P_{E2}$ al final de la primera iteración, de aquí que la ecuación 17 siga definiendo la probabilidad de que un nodo específico se pode y ésta sigue siendo $\frac{1}{2}$. El grafo resultante en la primera iteración ya no conserva la regularidad del grafo inicial; además, ahora existe una mayor proporción de nodos con grado de entrada uno.

Las probabilidades de que los nodos con grado de entrada dos se transformen a nodos con grado de entrada cero, uno o dos no cambian, así como las proporciones de nodos podables para las iteraciones siguientes. Con base en ésto, se define el siguiente teorema:

Teorema 5 *El número promedio de iteraciones del proceso de podado del modelo de Cárdenas-Haro con 2 niveles y con una distribución equiprobable del grado de salida de los nodos (o con una distribución de patrones de conexión equiprobables), es $\Theta(\log n)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dadas las características del modelo, la probabilidad de que un nodo se pode siempre es $\frac{1}{2}$, independientemente de la etapa y de la iteración (ecuación 17).

Note que el número de nodos con grado de entrada cero disminuye en promedio a la mitad en cada iteración. El porcentaje de nodos con grado de entrada cero al final de la iteración i está dado por la expresión $(\frac{1}{2})^{i+2} \times 100$, de aquí que en promedio después de $\Theta(\log n)$ iteraciones no existen nodos con grado de entrada cero y por lo tanto no hay nodos podables. \square

V.4.1. Análisis con alta probabilidad (W.H.P.)

En esta parte se demuestra que el proceso de podado para el modelo con dos niveles se realiza en $\Theta(\log n)$ u.t. con alta probabilidad. En [JáJá, 1992] se define el concepto de *alta probabilidad* de la siguiente manera:

Definición 6 *Un algoritmo A se encuentra acotado por una función $f(n)$ con alta probabilidad si para cualquier tamaño de entrada n , la cantidad de recursos utilizados por el algoritmo A es a lo más $\alpha f(n)$ con probabilidad de $1 - \frac{1}{n^c}$, donde las constantes α, c son mayores que cero. El término $\frac{1}{n^c}$ se denomina probabilidad de error.*

Existen patrones de conexión en el grafo generado por el modelo de Cárdenas-Haro que hacen que el tiempo de ejecución sea mayor a $O(\log n)$ u.t. Dichos patrones de conexión los denominamos subredes lentas. Una subred lenta es aquella en la que ambos nodos de la etapa k tienen grado de entrada cero, en las t etapas subsecuentes no ocurre ninguna etapa en la que ambos nodos tengan grado de entrada cero, y además existen al menos $\log n$ etapas en las que ambos nodos tienen grado de entrada dos.

El tiempo de podado de estas redes es proporcional al número de etapas en las que ambos nodos tienen grado de entrada dos. Se busca demostrar que con alta probabilidad la ocurrencia de este tipo de redes es muy pequeña.

Sea A_j el evento “existe una secuencia ininterrumpida, en la cual, en j etapas todos los nodos tienen grado de entrada dos”, y sea B_i el evento “existe una secuencia ininterrumpida de i etapas”.

Sea A el evento “existe una secuencia ininterrumpida con al menos $\log n$ etapas en la que todos los nodos tienen grado de entrada dos”. Se busca expresar a $P(A)$ como una probabilidad de error tal que la probabilidad de que A no ocurra sea con alta probabilidad. Se tiene que:

$$A = \bigcup_{j=\log n}^{n^2} A_j \quad (24)$$

Como los eventos A_j son disjuntos, entonces

$$P(A) = \sum_{j=\log n}^{n^2} P(A_j) \quad (25)$$

Para obtener $P(A_j)$ se aplica el teorema de probabilidad total en la ecuación 26.

$$P(A_j) = \sum_{i=j}^{n^2} P(B_i)P(A_j|B_i) \quad (26)$$

donde $P(A_j|B_i)$ es la probabilidad de tener j etapas de nodos con grado de entrada dos en un grafo ininterrumpido de i etapas. Esta probabilidad sigue el comportamiento de una distribución binomial cuyo valor es igual a $\binom{i}{j}p^j q^{i-j}$, para $j \leq i$, donde p es la probabilidad de que aparezca una etapa cuyos nodos tienen grado de entrada dos y q la probabilidad de que aparezca cualquier otra conexión excepto aquella en la que ambos

odos tienen grado de entrada cero. Por tanto, se tiene que

$$p = \frac{P_{E2}^2}{1 - P_{E0}^2} \quad (27)$$

$$q = 1 - \left(\frac{P_{E2}^2}{1 - P_{E0}^2} \right) \quad (28)$$

Así, la ecuación 26 se puede expresar de la siguiente manera:

$$P(A_j) = \sum_{i=j}^{n^2} P(B_i) \binom{i}{j} p^j q^{i-j} \quad (29)$$

La probabilidad de que exista una red ininterrumpida de i etapas (denotada por $P(B_i)$) es $(1 - P_{E0}^2)^i$, al sustituir este valor en la ecuación 29 resulta:

$$\begin{aligned} P(A_j) &= \sum_{i=j}^{n^2} (1 - P_{E0}^2)^i \binom{i}{j} p^j q^{i-j} \\ &= \frac{p^j}{q^j} \sum_{i=j}^{n^2} (1 - P_{E0}^2)^i \binom{i}{j} q^i \end{aligned} \quad (30)$$

Sea $c = (1 - P_{E0}^2)q$, entonces

$$\begin{aligned} P(A_j) &= \left(\frac{p}{q} \right)^j \sum_{i=j}^{n^2} c^i \binom{i}{j} \\ &= \left(\frac{p}{q} \right)^j \sum_{i=j}^{n^2} c^i \binom{i}{i-j} \end{aligned} \quad (31)$$

Haciendo $k = i - j$ entonces $i = k + j$, sustituyendo este valor de i en 31 queda

$$\begin{aligned} P(A_j) &= \left(\frac{p}{q} \right)^j \sum_{k=0}^{n^2-j} c^{k+j} \binom{k+j}{k} \\ &= \left(\frac{pc}{q} \right)^j \sum_{k=0}^{n^2-j} c^k \binom{k+j}{k} \end{aligned} \quad (32)$$

Utilizando la expresión 2.5.7 de [Wilf, 1994] la ecuación 32 se puede expresar como la ecuación 34.

$$\sum_{\forall k} \binom{k+j}{k} c^k = \frac{1}{(1-c)^{j+1}} \quad (33)$$

Por lo tanto,

$$P(A_j) \leq \left(\frac{pc}{q}\right)^j \frac{1}{(1-c)^{j+1}} \quad (34)$$

Sustituyendo el valor de $P(A_j)$ en la ecuación 25 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{j=\log n}^{n^2} P(A_j) \\ &\leq \sum_{j=\log n}^{n^2} \left(\frac{pc}{q}\right)^j \frac{1}{(1-c)^{j+1}} \\ &= \left(\frac{1}{1-c}\right) \sum_{j=\log n}^{n^2} \left(\frac{pc}{q(1-c)}\right)^j \end{aligned} \quad (35)$$

Se sabe que $p = \frac{P_{E_2}^2}{1-P_{E_0}^2}$, $q = 1 - \left(\frac{P_{E_2}^2}{1-P_{E_0}^2}\right)$ y $c = (1 - P_{E_0}^2)q$. Al sustituir estos valores en la parte derecha de la ecuación anterior, queda que

$$\begin{aligned} \frac{pc}{q(1-c)} &= \frac{\frac{P_{E_2}^2}{1-P_{E_0}^2}(1 - P_{E_0}^2)q}{q \left[1 - \left((1 - P_{E_0}^2) \left(1 - \frac{P_{E_2}^2}{1-P_{E_0}^2}\right)\right)\right]} \\ &= \frac{P_{E_2}^2}{[1 - ((1 - P_{E_0}^2)P_{E_2}^2)]} \\ &= \frac{P_{E_2}^2}{P_{E_0}^2 + P_{E_2}^2} \end{aligned} \quad (36)$$

Por lo que se tiene que:

$$P(A) \leq \left(\frac{1}{P_{E0}^2 + P_{E2}^2} \right) \sum_{j=\log n}^{n^2} \left(\frac{P_{E2}^2}{P_{E0}^2 + P_{E2}^2} \right)^j \quad (37)$$

Sea $\alpha = \frac{P_{E2}^2}{P_{E0}^2 + P_{E2}^2}$ y $c_1 = \frac{1}{P_{E0}^2 + P_{E2}^2}$, entonces

$$\begin{aligned} P(A) &\leq c_1 \sum_{j=\log n}^{n^2} \alpha^j \\ &= c_1 \left[\sum_{j=1}^{n^2} \alpha^j - \sum_{j=1}^{\log n - 1} \alpha^j \right] \end{aligned} \quad (38)$$

La ecuación 38 representa la suma de dos series geométricas que convergen en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P(A) &\leq c_1 \left[\frac{1 - \alpha^{n^2+1}}{1 - \alpha} - \frac{1 - \alpha^{\log n}}{1 - \alpha} \right] \\ &= c_1 \left[\frac{\alpha^{\log n} - \alpha^{n^2+1}}{1 - \alpha} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

Por simplicidad, se acota la ecuación 39 por arriba y se sustituye el valores de c_1 y α , lo que resulta

$$\begin{aligned} P(A) &\leq c_1 \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) \alpha^{\log n} \\ &= \left(\frac{1}{P_{E0}^2 + P_{E2}^2} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{P_{E2}^2}{P_{E0}^2 + P_{E2}^2}} \right) \alpha^{\log n} \\ &= \left(\frac{1}{P_{E0}^2} \right) \frac{1}{k^{\log n}} \end{aligned} \quad (40)$$

donde $k = \frac{1}{\alpha}$ y $k \geq 1$. Se sabe por las propiedades de los logaritmos que,

$$\log_k n = \frac{\log_2 n}{\log_2 k} \quad (41)$$

Al despejar se obtiene que

$$\log_2 n = \log_k n^{\log_2 k} \quad (42)$$

Sustituyendo en la ecuación 40 queda,

$$\begin{aligned} P(A) &\leq \left(\frac{1}{P_{E0}^2} \right) \frac{1}{k^{\log_k n^{\log_2 k}}} \\ &= \left(\frac{1}{P_{E0}^2} \right) \frac{1}{n^{\log_2 k}} \\ &= \left(\frac{1}{P_{E0}^2} \right) \frac{1}{n^{\log_2(\frac{1}{\alpha})}} \\ &= \left(\frac{1}{P_{E0}^2} \right) \frac{1}{n^{\log_2\left(\frac{P_{E0}^2 + P_{E2}^2}{P_{E2}^2}\right)}} \end{aligned} \quad (43)$$

Esta expresión sólo es válida para $P_{E0} \neq 0$ y se aplica para cualquier distribución de grados de entrada del grafo. Cuando $P_{E0} = 0$ entonces no hay nodos podables y no se requiere el proceso de podado.

Para el caso en que se supone que las conexiones son equiprobables, se tiene que $P_{E0} = P_{E2}$. De aquí que la ecuación 43 se reduce a la siguiente expresión:

$$P(A) \leq \left(\frac{1}{P_{E0}^2} \right) \frac{1}{n} \quad (44)$$

Entonces se concluye que con alta probabilidad no existe una subred lenta y por tanto proceso de podado para un modelo con dos niveles finaliza en $O(\log n)$ u.t. con alta probabilidad.

V.5. Grados de salida y patrones de conexión no equiprobables

El caso más complicado para el análisis es cuando la distribución de probabilidad del grado de salida en un nodo no es uniforme. Sin embargo, este caso también es el más rápido, ya que se requieren menos iteraciones para completar el proceso de podado.

Este análisis se basa principalmente en la distribución de probabilidad de los grados de entrada de los nodos en la etapa j , que a su vez depende de la distribución de grados de salida de los nodos en la etapa $j - 1$. Asumiendo una distribución de este tipo, se obtiene el factor de reducción del grafo de la definición 4 (sección V.4).

Asimismo, la distribución del grado de entrada de un nodo depende de la etapa en la que se encuentre, esto es más evidente en las primeras etapas. Conforme el índice de la etapa aumenta, la variabilidad del factor de podado decrece. Dado que se consideran n etapas en el grafo, existe poca variación en el factor de podado por etapa. Es posible eliminar dicha dependencia estableciendo una cota definida por la ecuación 17.

Por otro lado, la variación de distribución de los grados de entrada muestra una ventaja en el tiempo de ejecución (se realizan menos iteraciones) sobre los criterios anteriores.

En la figura 29 se muestran dos grafos formados por distintas distribuciones de grados de entrada. En la figura 29a se ilustra un grafo donde existen muchos nodos con grados de entrada cero y dos. En este caso, al realizar una iteración, se eliminan todos los nodos con grado de entrada cero y todos los nodos con grado de entrada dos



Figura 29. Ejemplos de distribución de los grados de entrada; a) Grafo donde $P_{E0} = P_{E2} = 0.5$; b) Grafo donde $P_{E1} \approx 1$.

se transforman a grados de entrada uno. Finalmente queda una cadena lineal por la cual el dato se propaga en una última iteración.

En la figura 29b se muestra un grafo cuyos nodos casi en su totalidad son de grado de entrada uno. En este caso se observa que al momento de iterar se elimina una sola cadena de nodos formada por el único nodo podable localizado en la etapa 1. En la siguiente iteración se propaga el dato.

En ambos casos, se observa que la probabilidad de que un nodo se puede es mayor o menor a $\frac{1}{2}$ (a diferencia de lo que ocurre en los casos de distribuciones equiprobables). Al finalizar la primera iteración, todos los nodos podables se eliminan y se genera una nueva distribución de grados de entrada. En dicha distribución, no existen nodos con grado de entrada cero y por tanto no existen nodos podables en la siguiente iteración. Así, sólo se requiere de una sola iteración para completar el proceso de podado.

Para corroborar estas observaciones, se realizó una simulación numérica para grafos con valores de n igual a 100, 10,000 y 1,000,000. Las figuras 30, 31 y 32 muestran los resultados de dichas simulaciones, respectivamente. El máximo número de iteraciones que se obtiene de un modelo con $n = 100$ es de 12, lo cual es menor a $2 \log_2 100$. Para n igual a 10,000 y 1,000,000, resultan 25 y 38 iteraciones, respectivamente. En ambos casos los resultados son menores a $2 \log_2 n$. Sin embargo se observa que la mayoría de los casos muestran un número de iteraciones menor a $O(\log n)$. Por lo que se conjetura que el tiempo de ejecución promedio podría ser de $O(\log \log n)$.

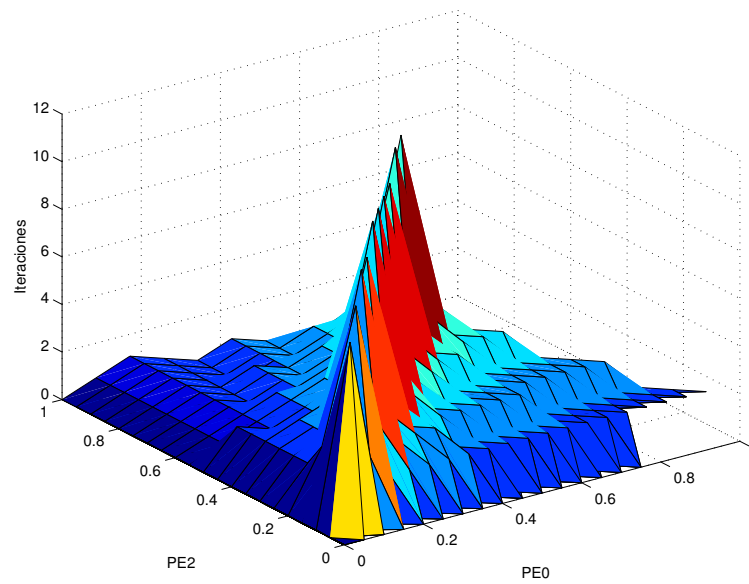


Figura 30. Gráfica del número de iteraciones para un modelo de dos niveles y $n = 100$.

Asimismo, se observa de los resultados, que existe un número mayor de iteraciones sólo cuando se cumple la condición $P_{E0} = P_{E2}$. Si dicha condición se cumple, entonces se tiene una distribución de grados de entrada igual a la de los dos primeros criterios, por lo que la probabilidad de podado es de $\frac{1}{2}$ en cada iteración. Así, el tiempo de ejecución promedio es de $O(\log n)$ iteraciones y ocurre cuando $P_{E0} = P_{E2}$ y $P_{E1} > 0$.

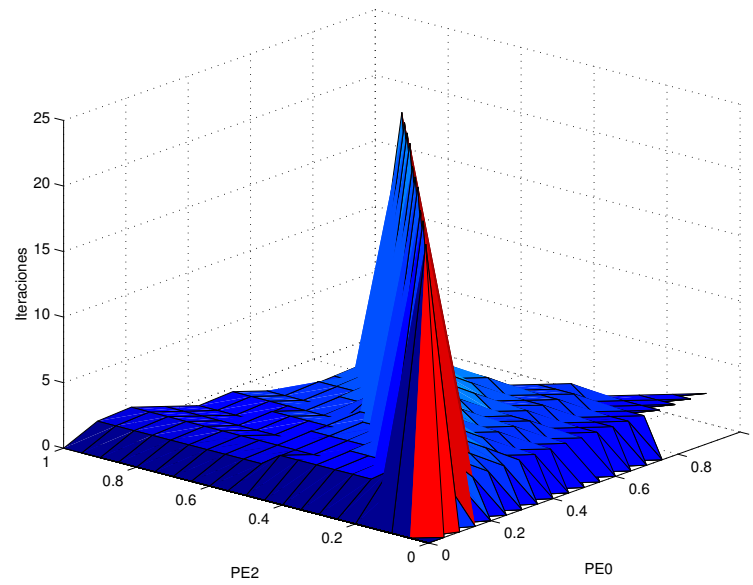


Figura 31. Gráfica del número de iteraciones para un modelo de dos niveles y $n = 10,000$.

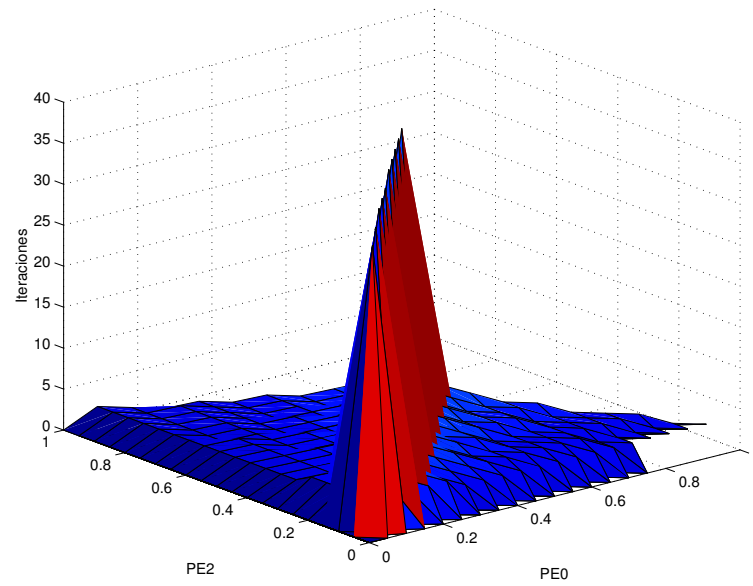


Figura 32. Gráfica del número de iteraciones para un modelo de dos niveles y $n = 1,000,000$.

Capítulo VI

Transformación del modelo de Cárdenas-Haro

En este capítulo se plantea una posible alternativa para analizar el modelo de Cárdenas-Haro; esta alternativa consiste en transformar el grafo $G = (V, E)$ del modelo de Cárdenas-Haro en un grafo $G^* = (V^*, E^*)$ cuyos nodos sólo pueden tener grado de entrada menor o igual a dos. El objetivo de esta transformación del modelo es facilitar el análisis del número de iteraciones del proceso de podado para un grafo con p niveles y n^2 etapas (modelo general).

Para realizar la transformación del modelo, se define un nuevo tipo de nodo denominado *convergente*, el cual siempre tiene grado de entrada dos y grado de salida uno. Los nodos convergentes permiten transformar a un nodo con grado de entrada tres o cuatro en un conjunto de nodos con grado de entrada máximo de dos. La figura 33 muestra la utilización de este nodo:

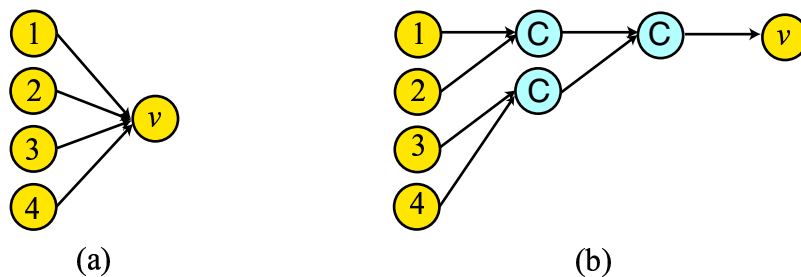


Figura 33. Ejemplo de la transformación de un nodo mediante nodos convergentes; a) Nodo v con grado de entrada 4; b) Transformación del nodo v mediante nodos convergentes.

En la figura 33a se muestra el nodo v cuyo grado de entrada es cuatro. Los nodos de la etapa anterior que lo conectan se etiquetan como 1, 2, 3 y 4. Al transformar las conexiones del nodo v mediante nodos convergentes (etiquetados como C), queda un conjunto de 3 nodos en dos etapas del grafo entre los nodos 1-4 y el nodo v (ver figura 33b). Esta transformación afecta al tiempo de ejecución del algoritmo de Cárdenas-Haro; por ejemplo, el grafo de la figura 33a se poda completamente en dos iteraciones, mientras que el grafo de la figura 33b requiere de tres iteraciones. Así, por cada iteración del proceso de podado se requiere de una iteración adicional para eliminar los nodos convergentes que se haya insertado.

Por otro lado, también es posible transformar los grados de salida de los nodos del grafo G . Para ello se realiza un proceso inverso al de los nodos convergentes mediante la utilización de nodos NOP, los cuales distribuyen una conexión en dos o más etapas. Un nodo NOP sólo puede tener grado de entrada cero ó uno (ver capítulo IV) y en este caso se restringe su grado de salida en a lo más dos. En la figura 34 se ilustra un ejemplo de lo anterior. La figura 34a muestra un nodo v con grado de salida cuatro. Este nodo se transforma mediante nodos NOP en el grafo que se muestra en la figura 34b. La transformación mediante nodos NOP no alteran el tiempo de ejecución del algoritmo.

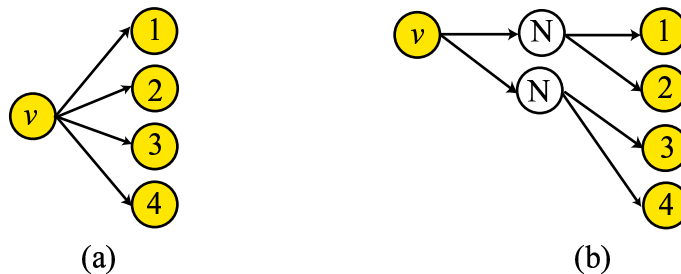


Figura 34. Ejemplo de la transformación de un nodo mediante nodos NOP; a) Nodo v con grado de entrada 4; b) Transformación del nodo v mediante nodos NOP.

Al aplicar los nodos convergentes y NOP para la transformación total del grafo G , se obtiene un nuevo grafo G^* cuyas distribuciones de grados de entrada/salida son

más “sencillas” de analizar. La figura 35 muestra un ejemplo sobre la transformación general de las conexiones de la etapa $j - 1$ a la etapa j de un grafo G del modelo de Cárdenas-Haro con p niveles. Ahí se muestra una conectividad máxima de cuatro.

Los nodos etiquetados como 1, 2, 3, 4, ... se denominan *origen* y se conectan a algunos nodos $v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$ denominados *destino*. En el nuevo grafo, cada nodo origen sigue una trayectoria lineal mediante nodos NOP (etiquetados como N) hacia la misma etapa en que los nodos destino reciben una señal. Otros nodos NOP que no contienen etiqueta, se utilizan para dar regularidad al grafo. Por su parte, los nodos convergentes conectan todos los nodos origen en cada nodo destino. Cada nodo destino se localiza en una misma etapa para la conexión de la siguiente etapa. Note que no existen nodos con grado de entrada mayor que dos.

Al transformar las conexiones de la etapa $j - 1$ a la etapa j de G , se tiene que el número de etapas se incrementa en uno por cada nivel que tenga el grafo. Si el número de niveles es igual a cuatro, entonces por cada etapa el grafo se incrementa a lo más en cuatro etapas. Así, el número de etapas y por tanto el número de nodos contenidos en él, se incrementa.

Asimismo, el número de niveles se incrementa de p a lo más a $2p + 1$, ya que se requiere de un nivel por cada nodo origen y cada nodo destino para que éstos al final de la transformación se establezcan en una misma etapa.

De aquí que se define el siguiente lema:

Lema 7 *Sea $G = (V, E)$ el grafo del modelo de Cárdenas-Haro con n^2 etapas y p niveles y sea $G^* = (V^*, E^*)$ el grafo transformado usando el procedimiento descrito arriba, entonces G^* tiene a lo más $2p + 1$ niveles con $pn^2 + n^2$ etapas.*

Cabe enfatizar que el número de iteraciones para completar el proceso de podado en G^* se incrementa en un factor de 2 (una para eliminar los nodos normales y otra iteración adicional para eliminar los nodos convergentes).

A pesar del incremento en el número de iteraciones, el tiempo de ejecución del algoritmo se mantiene en el mismo orden. Sin embargo, se conjetura que con la transformación del modelo el análisis del tiempo de ejecución del algoritmo es más sencillo.

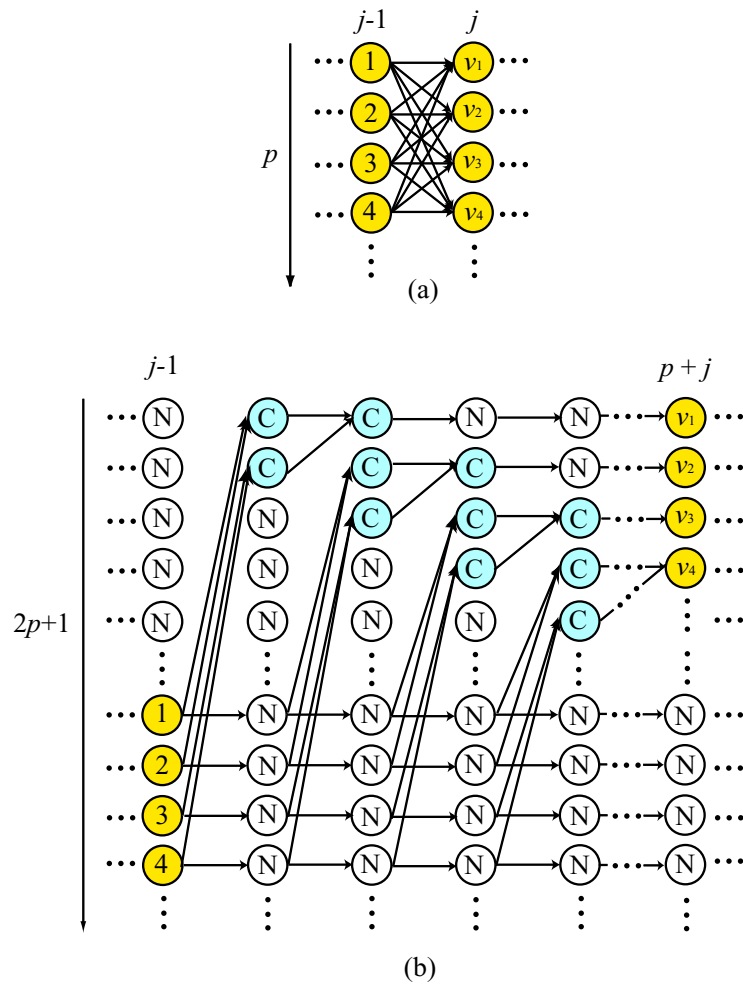


Figura 35. Transformación general de las conexiones de la etapa $j - 1$ a la etapa j del grafo G .

VI.1. Análisis del grafo transformado

El análisis se basa en un caso restringido del modelo de p niveles cuando $P_{E_3} = P_{E_4} = 0$. Esto forma parte de un caso general del modelo con dos niveles, por lo que se tiene que este análisis se realiza sobre cualquier grafo del modelo de Cárdenas-Haro con p niveles, utilizando un criterio de conexiones y de grados de salida no equiprobables.

Así, se conjetura que el número esperado de iteraciones necesarias para finalizar el proceso de podado en el grafo G^* es de $O(\log n)$ iteraciones.

Capítulo VII

Análisis general

En la sección VII.1 de este capítulo se obtiene el número esperado de iteraciones necesarias para finalizar el proceso de podado del grafo $G = (V, E)$ del modelo de Cárdenas-Haro con p niveles y n^2 etapas. Asimismo, se establece un procedimiento general del podado basado en las distribuciones de grados de entrada en cada iteración del algoritmo. Para ejemplificar dicho procedimiento, en la sección VII.2 se simula numéricamente el proceso de podado para los modelos con tres, cuatro, cinco y seis niveles.

VII.1. Análisis del modelo de p niveles

El propósito de este análisis es determinar el factor de reducción de los nodos con grado de entrada cero en cada iteración del algoritmo de Cárdenas-Haro. Una vez que no existan nodos con grado de entrada cero, entonces no existen nodos podables y el proceso de podado finaliza.

Dada una distribución inicial de grados de entrada en los nodos del modelo de Cárdenas-Haro, se determina la probabilidad de que cualquier nodo del grafo localizado en la etapa j sea podable. Dicha probabilidad se denota como $P(R^j)$ y se representa

por la siguiente ecuación:

$$P(R^j) = P(R^1)(P_{E1})^{j-1} + P_{E0} \left(\frac{1 - (P_{E1})^{j-1}}{1 - P_{E1}} \right) \quad (45)$$

Cuando existen uno o más nodos escritores en el grafo el proceso de podado tarda menos en completarse, por lo que en este análisis se supone que no existen nodos escritores en el grafo. Así, la probabilidad de que un nodo sea podable en la primer etapa (denotada por $P(R^1)$) es 1 y se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P(R^j) &= (P_{E1})^{j-1} + P_{E0} \left(\frac{1 - (P_{E1})^{j-1}}{1 - P_{E1}} \right) \\ &= (P_{E1})^{j-1} + \frac{P_{E0}}{1 - P_{E1}} - \frac{P_{E0}(P_{E1})^{j-1}}{1 - P_{E1}} \\ &= \frac{P_{E0}}{1 - P_{E1}} + P_{E1}^{j-1} \left(1 - \frac{P_{E0}}{1 - P_{E1}} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

Conforme j (el número de la etapa) se incrementa, la probabilidad de que un nodo sea podable (denotada como $P(R^j)$) se hace cada vez menor. Esto se debe a que j representa la longitud de una cadena de nodos podables con grado de entrada uno que dependen uno de otros. Esta dependencia se puede eliminar considerando un valor promedio de las probabilidades de que un nodo con grado de entrada uno sea podable

El modelo de Cárdenas-Haro se compone de n^2 etapas (donde n^2 es el número de procesadores en el DR-Mesh), por lo que el valor promedio de la posición de un nodo en el grafo es $\frac{n^2}{2}$, por lo que la ecuación 46 se puede expresar de la siguiente manera:

$$P(R) = \frac{P_{E0}}{1 - P_{E1}} + P_{E1}^{n^2/2} \quad (47)$$

Note que en la ecuación 47 ya no existe dependencia de j .

Sea k una iteración del algoritmo de Cárdenas-Haro y sea $G = (V, E)$ un grafo donde dicho algoritmo se ejecuta. El factor de reducción del grafo G en cada iteración k depende del grado de entrada de sus nodos. Por lo que se define a $E_z^{(k)}$ como el evento “el grado de entrada de un nodo en la iteración k es igual a z ”, y a $R^{(k)}$ como el evento “cualquier nodo localizado en la etapa j es podable en la iteración k ”.

Un nodo se considera inactivo si éste se podó en alguna iteración, asimismo, un nodo se considera activo en caso contrario. Sea $A^{(k)}$ el evento “el nodo está activo al final de la iteración k ”, entonces $P(A^{(k)}) = 1 - P(R^{(k)})$. Utilizando el teorema de probabilidad total se define la probabilidad de que un nodo se pode (o se desactive) en la iteración k (denotada como $P(R^{(k)})$) en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 P(R^{(k)}) &= P[R^{(k)}|E_0^{(k)}]P_{E_0}^{(k)} + P[R^{(k)}|E_1^{(k)}]P_{E_1}^{(k)} + \\
 &P[R^{(k)}|E_2^{(k)}]P_{E_2}^{(k)} + P[R^{(k)}|E_3^{(k)}]P_{E_3}^{(k)} + \\
 &P[R^{(k)}|E_4^{(k)}]P_{E_4}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{48}$$

Por cada k se eliminan en G todos los nodos con grado de entrada cero (por lo que $P[R^{(k)}|E_0^{(k)}] = 1$) y una parte de nodos con grado de entrada uno. Los nodos con grado de entrada dos, tres y cuatro, no se podan pero sus distribuciones se pueden afectar (es decir, se pueden transformar a nodos con grado de entrada menor). Así, la ecuación 48 se reduce a la siguiente expresión:

$$P(R^{(k)}) = P_{E_0}^{(k)} + P_{E_1}^{(k)}P[R^{(k)}|E_1^{(k)}] \tag{49}$$

Despejando la ecuación, se obtiene la probabilidad de que un nodo se puede dado que tiene grado de entrada uno. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$P[R^{(k)}|E_1^{(k)}] = \frac{P(R^{(k)}) - P_{E0}^{(k)}}{P_{E1}^{(k)}} \quad (50)$$

Sea $P_{Ex \rightarrow Ey}^{(k)}$ la probabilidad de que un nodo con grado de entrada x , en la iteración k , cambie a grado de entrada y en la iteración $k + 1$, para $1 \leq x \leq 4$ y $y \leq x$. La probabilidad de que un nodo con grado de entrada uno permanezca igual al finalizar la primera iteración se obtiene a partir de la ecuación 50 y es:

$$P_{E1 \rightarrow E1}^{(k)} = 1 - \left[\frac{P(R^{(k)}) - P_{E0}^{(k)}}{P_{E1}^{(k)}} \right] \quad (51)$$

Por otro lado, los nodos con grado de entrada dos, tres y cuatro, se transforman como se indica abajo. Note que el cambio en sus grados de entrada depende totalmente de la probabilidad de podado de sus predecesores.

- Los nodos con grado de entrada dos se afectan al finalizar la iteración k de la siguiente manera:

$$P_{E2 \rightarrow E0}^{(k)} = [P(R^{(k)})]^2 \quad (52)$$

$$P_{E2 \rightarrow E1}^{(k)} = 2P(R^{(k)})(1 - P(R^{(k)})) \quad (53)$$

$$P_{E2 \rightarrow E2}^{(k)} = [1 - P(R^{(k)})]^2 \quad (54)$$

- Los nodos con grado de entrada tres se afectan al finalizar la iteración k de la siguiente manera:

$$P_{E3 \rightarrow E0}^{(k)} = [P(R^{(k)})]^3 \quad (55)$$

$$P_{E3 \rightarrow E1}^{(k)} = 3P(R^{(k)})^2(1 - P(R^{(k)})) \quad (56)$$

$$P_{E3 \rightarrow E2}^{(k)} = 3P(R^{(k)})(1 - P(R^{(k)}))^2 \quad (57)$$

$$P_{E3 \rightarrow E3}^{(k)} = [1 - P(R^{(k)})]^3 \quad (58)$$

- Los nodos con grado de entrada cuatro se afectan en la iteración k de la siguiente manera:

$$P_{E4 \rightarrow E0}^{(k)} = [P(R^{(k)})]^4 \quad (59)$$

$$P_{E4 \rightarrow E1}^{(k)} = 4P(R^{(k)})^3(1 - P(R^{(k)})) \quad (60)$$

$$P_{E4 \rightarrow E2}^{(k)} = 6P(R^{(k)})^2(1 - P(R^{(k)}))^2 \quad (61)$$

$$P_{E4 \rightarrow E3}^{(k)} = 4P(R^{(k)})(1 - P(R^{(k)}))^3 \quad (62)$$

$$P_{E4 \rightarrow E4}^{(k)} = [1 - P(R^{(k)})]^4 \quad (63)$$

La distribución de grados de entrada de los nodos en la iteración $k + 1$ se determina por medio de las probabilidades de cambio de los nodos con grados de entrada dos, tres y cuatro, dado que cada uno de ellos se encuentra activo. Así, la probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada y en la iteración $k + 1$ se define por medio del teorema de probabilidad total de la siguiente manera:

$$P_{Ey}^{(k+1)} = \sum_{i=y}^x E_i^{(k)} P_{Ei \rightarrow Ey}^{(k)} \quad (64)$$

Usando la ecuación 64 se obtiene la probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada cero en la iteración $k + 1$, ésta se expresa como sigue:

$$P_{E0}^{(k+1)} = P_{E2}^{(k)} P_{E2 \rightarrow E0}^{(k)} + P_{E3}^{(k)} P_{E3 \rightarrow E0}^{(k)} + P_{E4}^{(k)} P_{E4 \rightarrow E0}^{(k)} \quad (65)$$

Al sustituir las probabilidades de cambio (ecuaciones 52, 55 y 59), la ecuación anterior queda,

$$P_{E0}^{(k+1)} = P_{E2}^{(k)}P(R^{(k)})^2 + P_{E3}^{(k)}P(R^{(k)})^3 + P_{E4}^{(k)}P(R^{(k)})^4 \quad (66)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene la distribución de los grados de entrada restantes. (Note que $P_{E1 \rightarrow E0}^{(k)}$ y $P_{E0 \rightarrow E0}^{(k)}$ son ambos cero.)

- Probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada uno en la iteración $k + 1$:

$$\begin{aligned} P_{E1}^{(k+1)} &= P_{E1}^{(k)}P_{E1 \rightarrow E1}^{(k)} + P_{E2}^{(k)}P_{E2 \rightarrow E1}^{(k)} + P_{E3}^{(k)}P_{E3 \rightarrow E1}^{(k)} + P_{E4}^{(k)}P_{E4 \rightarrow E1}^{(k)} \\ &= P_{E1}^{(k)}[1 - ((P(R^{(k)}) - P_{E0}^{(k)})/P_{E1}^{(k)})] + 2P_{E2}^{(k)}P(R^{(k)})(1 - P(R^{(k)})) + \\ &\quad 3P_{E3}^{(k)}P(R^{(k)})^2(1 - P(R^{(k)})) + 4P_{E4}^{(k)}P(R^{(k)})^3(1 - P(R^{(k)})) \\ &= P_{E1}^{(k)}[1 - ((P(R^{(k)}) - P_{E0}^{(k)})/P_{E1}^{(k)})] + (1 - P(R^{(k)})) \\ &\quad [2P_{E2}^{(k)}P(R^{(k)}) + 3P_{E3}^{(k)}P(R^{(k)})^2 + 4P_{E4}^{(k)}P(R^{(k)})^3] \end{aligned} \quad (67)$$

- Probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada dos en la iteración $k + 1$:

$$\begin{aligned} P_{E2}^{(k+1)} &= P_{E2}^{(k)}P_{E2 \rightarrow E2}^{(k)} + P_{E3}^{(k)}P_{E3 \rightarrow E2}^{(k)} + P_{E4}^{(k)}P_{E4 \rightarrow E2}^{(k)} \\ &= P_{E2}^{(k)}(1 - P(R^{(k)}))^2 + 3P_{E3}^{(k)}P(R^{(k)})(1 - P(R^{(k)}))^2 + \\ &\quad 6P_{E4}^{(k)}P(R^{(k)})^2(1 - P(R^{(k)}))^2 \\ &= (1 - P(R^{(k)}))^2[P_{E2}^{(k)} + 3P_{E3}^{(k)}P(R^{(k)}) + 6P_{E4}^{(k)}P(R^{(k)})^2] \end{aligned} \quad (68)$$

- Probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada tres en la iteración $k + 1$:

$$P_{E3}^{(k+1)} = P_{E3}^{(k)}P_{E3 \rightarrow E3}^{(k)} + P_{E4}^{(k)}P_{E4 \rightarrow E3}^{(k)}$$

$$\begin{aligned}
&= P_{E3}^{(k)}(1 - P(R^{(k)}))^3 + 4P_{E4}^{(k)}P(R^{(k)})(1 - P(R^{(k)}))^3 \\
&= (1 - P(R^{(k)}))^3 [P_{E3}^{(k)} + 4P_{E4}^{(k)}P(R^{(k)})]
\end{aligned} \tag{69}$$

- Probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada cuatro en la iteración $k + 1$:

$$\begin{aligned}
P_{E4}^{(k+1)} &= P_{E4}^{(k)}P_{E4 \rightarrow E4}^{(k)} \\
&= (1 - P(R^{(k)}))^4 P_{E4}^{(k)}
\end{aligned} \tag{70}$$

Se busca demostrar que la probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada cero se reduce en una fracción constante en cada iteración, por lo que el análisis se enfoca principalmente a la ecuación 66. Por simplificación se factoriza dicha ecuación de la siguiente forma:

$$P_{E0}^{(k+1)} = P(R^{(k)})^2 [P_{E2}^{(k)} + P_{E3}^{(k)} + P_{E4}^{(k)}] + \alpha + \beta \tag{71}$$

donde $\alpha = P_{E3} [(P(R)^{(k)})^3 - (P(R)^{(k)})^2]$ y $\beta = P_{E4} [(P(R)^{(k)})^4 - (P(R)^{(k)})^2]$.

Dado que $P_{E0}^{(k)} + P_{E1}^{(k)} + P_{E2}^{(k)} + P_{E3}^{(k)} + P_{E4}^{(k)} = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
P_{E0}^{(k+1)} &= P(R^{(k)})^2 [1 - P_{E0} - P_{E1}] + \alpha + \beta \\
&= P(R^{(k)})P(R^{(k)}) [1 - P_{E0} - P_{E1}] + \alpha + \beta
\end{aligned} \tag{72}$$

Se sabe que $P(R^{(k)}) = P_{E0}^{(k)}/(1 - P_{E1}^{(k)}) + P_{E1}^{n^2/2}$ (ecuación 47), al sustituir éste en el primer factor del primer término de la derecha en la ecuación 72 resulta:

$$\begin{aligned}
P_{E0}^{(k+1)} &= \frac{P(R^{(k)})(P_{E0}^{(k)})}{[1 - P_{E1}^{(k)}]} [1 - P_{E1}^{(k)}] + P(R^{(k)})(P_{E1}^{(k)})^{n^2/2} (1 - P_{E1}^{(k)}) - P_{E0}^{(k)}P(R^{(k)})^2 + \\
&\quad \alpha + \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_{E_0}^{(k)} \left[P(R^{(k)}) - P(R^{(k)})^2 \right] + P(R^{(k)}) (P_{E_1}^{(k)})^{n^2/2} - P(R^{(k)}) (P_{E_1}^{(k)})^{(n^2/2)+1} + \\
&\quad \alpha + \beta
\end{aligned} \tag{73}$$

Se tiene que $(P(R)^{(k)})^2 \geq (P(R)^{(k)})^3 \geq (P(R)^{(k)})^4$ por lo que los terminos α y β de la ecuación 73 son negativos. Asimismo, para una n muy grande el termino $(P_{E_1}^{(k)})^{n^2/2}$ es casi cero por lo que el resultado de sumar los últimos cuatro terminos de la derecha de la ecuación es negativo. Así, es posible acotar por arriba a la ecuación 73 por lo que resulta que,

$$P_{E_0}^{(k+1)} \leq P_{E_0}^{(k)} \left[P(R^{(k)}) - P(R^{(k)})^2 \right] \tag{74}$$

Se puede verificar que la función $f(x) = x - x^2$ donde $0 \leq x \leq 1$, es siempre menor o igual a $\frac{1}{4}$ (ver figura 36); si $x = P(R^{(k)})$, entonces

$$P_{E_0}^{(k+1)} \leq \frac{1}{4} P_{E_0}^{(k)} \tag{75}$$

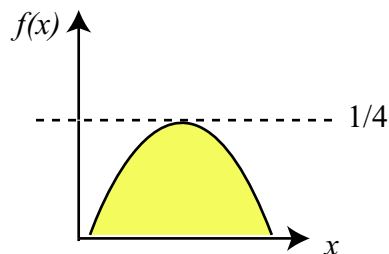


Figura 36. Grafica de la función $f(x) = x - x^2$.

Sea X_k una variable aleatoria que representa el número de nodos con grado de entrada cero en la iteración k , entonces por la ecuación 75 se tiene que

$$E[X_{k+1}] \leq \frac{1}{4} E[X_k] \tag{76}$$

Así, el número de nodos con grado de entrada cero disminuye en promedio al menos en un factor de $\frac{1}{4}$ en cada iteración; por lo que después de $O(\log_4 n)$ iteraciones, en promedio, no existen nodos con grado de entrada cero en el grafo.

VII.1.1. Análisis con alta probabilidad

El proceso de podado tarda más de $O(\log n)$ iteraciones para completarse cuando existe un patrón de conexiones (denominado subred lenta) de más de $\log n$ etapas. Para el caso de dos niveles se pudo comprobar que la probabilidad de ocurrencia de estas redes es muy baja. Aunque conjeturamos que con alta probabilidad la subred lenta no se presenta, no ha sido posible probarlo debido a la dificultad que presenta.

Para encontrar la probabilidad de que una subred lenta de dos niveles aparezca en una red de p niveles, se propone la siguiente estrategia:

1. Encontrar la probabilidad de ocurrencia de una célula lenta en cada etapa de la red. Una célula lenta es una conexión con las características de la figura 37. Para ello se requiere obtener el total de conexiones que se pueden generar en una etapa. El total de conexiones depende de la alcanzabilidad de los nodos de la red, ya que éstos sólo pueden tener grado de entrada/salida máximo de cuatro. Para cada conexión se requiere encontrar cuántas células lentas se presentan en ella. Con esta información se puede encontrar el valor esperado de células lentas por etapas en la red.

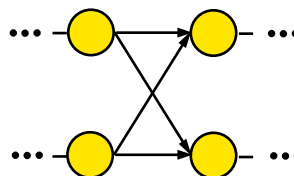


Figura 37. Célula lenta.

2. Después, se requiere calcular la probabilidad de que las células lentas de cada etapa empalmen (se conecten) con otras en las etapas vecinas. El número de etapas consecutivas que se conectan de esta forma debe ser mayor a $O(\log n)$ etapas.

Conjeturamos que la parte más compleja es la número 1; para solucionar este problema se requieren conocimientos profundos de análisis combinatorio.

VII.2. Simulación numérica

En esta sección se ejemplifica el procedimiento general mediante la simulación numérica del modelo de Cárdenas-Haro con tres, cuatro, cinco y seis niveles. Asimismo, se plantea el problema de la definición de una distribución inicial de grados de entrada conforme se aumenta el número de niveles en el modelo.

VII.2.1. Modelo de tres niveles

En la presente sección se obtiene el número de iteraciones en que finaliza el proceso de podado de un modelo de Cárdenas-Haro con tres niveles. Se asume que las posibles conexiones por etapa son equiprobables y con base en esto se calculan las probabilidades del grado de entrada de los nodos del modelo de Cárdenas-Haro.

Existen $4^3 = 64$ posibles combinaciones de grado de salida en la etapa $j - 1$ y 2^9 posibles patrones de conexión de la etapa $j - 1$ a la etapa j , que representan los eventos elementales de un conjunto de muestreo. Cada nodo en la etapa $j - 1$ tiene uno de cuatro posibles grados de salida (0, 1, 2 ó 3) y cada etapa consiste de tres nodos. Inicialmente, el análisis se enfoca al criterio de grados de salida equiprobables.

Sea $C_{x,y,z}^{j-1}$ una posible combinación de grados de salida en la etapa $j - 1$, donde x , y , z representan el grado de salida de los nodos $v_{1,j-1}$, $v_{2,j-1}$ y $v_{3,j-1}$, respectivamente,

en la etapa $j - 1$ del modelo para $0 \leq x, y, z \leq 3$. En la tabla IX se muestran cada uno de estos eventos de combinación de grados de salida (denotadas por Ev.) del modelo con tres niveles.

A continuación se obtiene la probabilidad de que un nodo en la etapa j tenga grado de entrada cero, uno, dos o tres (denotados por P_{E0}^j , P_{E1}^j , P_{E2}^j y P_{E3}^j , respectivamente). Para ello se utiliza el teorema de probabilidad total expresado en la ecuación 77 y cuyas probabilidades condicionales se muestran en las tablas X y XI.

$$P_{Ez}^j = P(E_z^j) = P(C_{0,0}^{j-1})P(E_z^j|C_{0,0}^{j-1}) + P(C_{0,1}^{j-1})P(E_z^j|C_{0,1}^{j-1}) + \dots + P(C_{2,2}^{j-1})P(E_z^j|C_{2,2}^{j-1}) \quad (77)$$

Al sustituir los valores de las tablas para determinar los grados de entrada de los nodos, se tienen las siguientes expresiones:

$$P_{E0}^j = \frac{27}{27}P_{S0}^3 + \frac{54}{27}P_{S0}^2P_{S1} + \frac{27}{27}P_{S0}^2P_{S2} + \frac{36}{27}P_{S0}P_{S1}^2 + \frac{36}{27}P_{S0}P_{S1}P_{S2} + \frac{9}{27}P_{S0}P_{S2}^2 + \frac{8}{27}P_{S1}^3 + \frac{12}{27}P_{S1}^2P_{S2} + \frac{6}{27}P_{S1}P_{S2}^2 + \frac{1}{27}P_S^3 \quad (78)$$

$$P_{E1}^j = \frac{27}{27}P_{S0}^2P_{S1} + \frac{54}{27}P_{S0}^2P_{S2} + \frac{81}{27}P_{S0}^2P_{S3} + \frac{36}{27}P_{S0}P_{S1}^2 + \frac{90}{27}P_{S0}P_{S1}P_{S2} + \frac{108}{27}P_{S0}P_{S1}P_{S3} + \frac{36}{27}P_{S0}P_{S2}^2 + \frac{12}{27}P_{S1}^3 + \frac{36}{27}P_{S1}^2P_{S3} + \frac{27}{27}P_{S1}P_{S2}^2 + \frac{9}{27}P_{S2}^2P_{S3} + \frac{36}{27}P_{S1}P_{S2}P_{S3} + \frac{54}{27}P_{S0}P_{S2}P_{S3} + \frac{6}{27}P_{S2}^3 \quad (79)$$

$$\begin{aligned}
P_{E2}^j = & \frac{36}{27}P_{S0}P_{S1}P_{S2} + \frac{54}{27}P_{S0}P_{S1}P_{S3} + \frac{9}{27}P_{S0}P_{S1}^2 + \frac{108}{27}P_{S0}P_{S2}P_{S3} + \frac{36}{27}P_{S0}P_{S2}^2 + \\
& \frac{81}{27}P_{S0}P_{S3}^2 + \frac{6}{27}P_{S1}^3 + \frac{27}{27}P_{S1}^2P_{S2} + \frac{27}{27}P_{S1}^2P_{S2} + \frac{36}{27}P_{S1}^2P_{S3} + \frac{36}{27}P_{S1}P_{S2}^2 + \\
& \frac{27}{90}P_{S1}P_{S2}P_{S3} + \frac{54}{27}P_{S1}P_{S3}^2 + \frac{12}{27}P_{S2}^3 + \frac{36}{27}P_{S2}^2P_{S3} + \frac{27}{27}P_{S2}P_{S3}^2 \quad (80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{E3}^j = & \frac{1}{27}P_{S1}^3 + \frac{6}{27}P_{S1}^2P_{S2} + \frac{9}{27}P_{S1}^2P_{S3} + \frac{12}{27}P_{S1}P_{S2}^2 + \frac{36}{27}P_{S1}P_{S2}P_{S3} + \\
& \frac{27}{27}P_{S1}P_{S3}^2 + \frac{36}{27}P_{S2}^2P_{S3} + \frac{54}{27}P_{S2}P_{S3}^2 + \frac{27}{27}P_{S3}^3 + \frac{8}{27}P_{S3}^3 \quad (81)
\end{aligned}$$

Tabla IX. Eventos de combinación de grados de salida en la etapa $j - 1$ del modelo con tres niveles.

Ev.	Prob.	Ev.	Prob.	Ev.	Prob.	Ev.	Prob.
$C_{0,0,0}^{j-1}$	P_{S0}^3	$C_{0,1,0}^{j-1}$	$P_{S0}^2P_{S1}$	$C_{0,2,0}^{j-1}$	$P_{S0}^2P_{S2}$	$C_{0,3,0}^{j-1}$	$P_{S0}^2P_{S3}$
$C_{0,0,1}^{j-1}$	$P_{S0}^2P_{S1}$	$C_{0,1,1}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}^2$	$C_{0,2,1}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S2}$	$C_{0,3,1}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S3}$
$C_{0,0,2}^{j-1}$	$P_{S0}^2P_{S2}$	$C_{0,1,2}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S2}$	$C_{0,2,2}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}^2$	$C_{0,3,2}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}P_{S3}$
$C_{0,0,3}^{j-1}$	$P_{S0}^2P_{S3}$	$C_{0,1,3}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S3}$	$C_{0,2,3}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}P_{S3}$	$C_{0,3,3}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S3}^2$
$C_{1,0,0}^{j-1}$	$P_{S0}^2P_{S1}$	$C_{1,1,0}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}^2$	$C_{1,2,0}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S2}$	$C_{1,3,0}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S3}$
$C_{1,0,1}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}^2$	$C_{1,1,1}^{j-1}$	P_{S1}^3	$C_{1,2,1}^{j-1}$	$P_{S1}^2P_{S2}$	$C_{1,3,1}^{j-1}$	$P_{S1}^2P_{S3}$
$C_{1,0,2}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S2}$	$C_{1,1,2}^{j-1}$	$P_{S1}^2P_{S2}$	$C_{1,2,2}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}^2$	$C_{1,3,2}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}P_{S3}$
$C_{1,0,3}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S3}$	$C_{1,1,3}^{j-1}$	$P_{S1}^2P_{S3}$	$C_{1,2,3}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}P_{S3}$	$C_{1,3,3}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S3}^2$
$C_{2,0,0}^{j-1}$	$P_{S0}^2P_{S2}$	$C_{2,1,0}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S2}$	$C_{2,2,0}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}^2$	$C_{2,3,0}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}P_{S3}$
$C_{2,0,1}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S2}$	$C_{2,1,1}^{j-1}$	$P_{S1}^2P_{S2}$	$C_{2,2,1}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}^2$	$C_{2,3,1}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}P_{S3}$
$C_{2,0,2}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}^2$	$C_{2,1,2}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}^2$	$C_{2,2,2}^{j-1}$	P_{S2}^3	$C_{2,3,2}^{j-1}$	$P_{S2}^2P_{S3}$
$C_{2,0,3}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}P_{S3}$	$C_{2,1,3}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}P_{S3}$	$C_{2,2,3}^{j-1}$	$P_{S2}^2P_{S3}$	$C_{2,3,3}^{j-1}$	$P_{S2}P_{S3}^2$
$C_{3,0,0}^{j-1}$	$P_{S0}^2P_{S3}$	$C_{3,1,0}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S3}$	$C_{3,2,0}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}P_{S3}$	$C_{3,3,0}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S3}^2$
$C_{3,0,1}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S1}P_{S3}$	$C_{3,1,1}^{j-1}$	$P_{S1}^2P_{S3}$	$C_{3,2,1}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}P_{S3}$	$C_{3,3,1}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S3}^2$
$C_{3,0,2}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S2}P_{S3}$	$C_{3,1,2}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S2}P_{S3}$	$C_{3,2,2}^{j-1}$	$P_{S2}^2P_{S3}$	$C_{3,3,2}^{j-1}$	$P_{S2}P_{S3}^2$
$C_{3,0,3}^{j-1}$	$P_{S0}P_{S3}^2$	$C_{3,1,3}^{j-1}$	$P_{S1}P_{S3}^2$	$C_{3,2,3}^{j-1}$	$P_{S2}P_{S3}^2$	$C_{3,3,3}^{j-1}$	P_{S3}^3

Tabla X. Probabilidades condicionales de un modelo con tres niveles.

GE cero	GE uno	GE dos	GE tres
$P(E_0^j C_{0,0,0}^{j-1}) = 1$	$P(E_1^j C_{0,0,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{0,0,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{0,0,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,0,1}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_1^j C_{0,0,1}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_2^j C_{0,0,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{0,0,1}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,0,2}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_1^j C_{0,0,2}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_2^j C_{0,0,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{0,0,2}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,0,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{0,0,3}^{j-1}) = 1$	$P(E_2^j C_{0,0,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{0,0,3}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,1,0}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_1^j C_{0,1,0}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_2^j C_{0,1,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{0,1,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,1,1}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_1^j C_{0,1,1}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_2^j C_{0,1,1}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_3^j C_{0,1,1}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,1,2}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_1^j C_{0,1,2}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_2^j C_{0,1,2}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_3^j C_{0,1,2}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,1,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{0,1,3}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_2^j C_{0,1,3}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_3^j C_{0,1,3}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,2,0}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_1^j C_{0,2,0}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_2^j C_{0,2,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{0,2,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,2,1}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_1^j C_{0,2,1}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_2^j C_{0,2,1}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_3^j C_{0,2,1}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,2,2}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_1^j C_{0,2,2}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_2^j C_{0,2,2}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_3^j C_{0,2,2}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,2,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{0,2,3}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_2^j C_{0,2,3}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_3^j C_{0,2,3}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,3,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{0,3,0}^{j-1}) = 1$	$P(E_2^j C_{0,3,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{0,3,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,3,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{0,3,1}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_2^j C_{0,3,1}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_3^j C_{0,3,1}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,3,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{0,3,2}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_2^j C_{0,3,2}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_3^j C_{0,3,2}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{0,3,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{0,3,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{0,3,3}^{j-1}) = 1$	$P(E_3^j C_{0,3,3}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,0,0}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_1^j C_{1,0,0}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_2^j C_{1,0,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{1,0,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,0,1}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_1^j C_{1,0,1}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_2^j C_{1,0,1}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_3^j C_{1,0,1}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,0,2}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_1^j C_{1,0,2}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_2^j C_{1,0,2}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_3^j C_{1,0,2}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,0,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{1,0,3}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_2^j C_{1,0,3}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_3^j C_{1,0,3}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,1,0}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_1^j C_{1,1,0}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_2^j C_{1,1,0}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_3^j C_{1,1,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,1,1}^{j-1}) = \frac{8}{27}$	$P(E_1^j C_{1,1,1}^{j-1}) = \frac{12}{27}$	$P(E_2^j C_{1,1,1}^{j-1}) = \frac{6}{27}$	$P(E_3^j C_{1,1,1}^{j-1}) = \frac{1}{27}$
$P(E_0^j C_{1,1,2}^{j-1}) = \frac{4}{27}$	$P(E_1^j C_{1,1,2}^{j-1}) = \frac{12}{27}$	$P(E_2^j C_{1,1,2}^{j-1}) = \frac{9}{27}$	$P(E_3^j C_{1,1,2}^{j-1}) = \frac{2}{27}$
$P(E_0^j C_{1,1,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{1,1,3}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_2^j C_{1,1,3}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_3^j C_{1,1,3}^{j-1}) = \frac{1}{9}$
$P(E_0^j C_{1,2,0}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_1^j C_{1,2,0}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_2^j C_{1,2,0}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_3^j C_{1,2,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,2,1}^{j-1}) = \frac{4}{27}$	$P(E_1^j C_{1,2,1}^{j-1}) = \frac{12}{27}$	$P(E_2^j C_{1,2,1}^{j-1}) = \frac{9}{27}$	$P(E_3^j C_{1,2,1}^{j-1}) = \frac{2}{27}$
$P(E_0^j C_{1,2,2}^{j-1}) = \frac{2}{27}$	$P(E_1^j C_{1,2,2}^{j-1}) = \frac{9}{27}$	$P(E_2^j C_{1,2,2}^{j-1}) = \frac{12}{27}$	$P(E_3^j C_{1,2,2}^{j-1}) = \frac{4}{27}$
$P(E_0^j C_{1,2,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{1,2,3}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_2^j C_{1,2,3}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_3^j C_{1,2,3}^{j-1}) = \frac{2}{9}$
$P(E_0^j C_{1,3,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{1,3,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{1,3,0}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_3^j C_{1,3,0}^{j-1}) = \frac{1}{3}$
$P(E_0^j C_{1,3,1}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_1^j C_{1,3,1}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_2^j C_{1,3,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{1,3,1}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,3,2}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_1^j C_{1,3,2}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_2^j C_{1,3,2}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_3^j C_{1,3,2}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{1,3,3}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_1^j C_{1,3,3}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_2^j C_{1,3,3}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_3^j C_{1,3,3}^{j-1}) = 0$

Tabla XI. Probabilidades condicionales de un modelo con tres niveles (Cont).

GE cero	GE uno	GE dos	GE tres
$P(E_0^j C_{2,0,0}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_1^j C_{2,0,0}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_2^j C_{2,0,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{2,0,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{2,0,1}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_1^j C_{2,0,1}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_2^j C_{2,0,1}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_3^j C_{2,0,1}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{2,0,2}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_1^j C_{2,0,2}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_2^j C_{2,0,2}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_3^j C_{2,0,2}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{2,0,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,0,3}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_2^j C_{2,0,3}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_3^j C_{2,0,3}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{2,1,0}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_1^j C_{2,1,0}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_2^j C_{2,1,0}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_3^j C_{2,1,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{2,1,1}^{j-1}) = \frac{4}{27}$	$P(E_1^j C_{2,1,1}^{j-1}) = \frac{12}{27}$	$P(E_2^j C_{2,1,1}^{j-1}) = \frac{9}{27}$	$P(E_3^j C_{2,1,1}^{j-1}) = \frac{2}{27}$
$P(E_0^j C_{2,1,2}^{j-1}) = \frac{2}{27}$	$P(E_1^j C_{2,1,2}^{j-1}) = \frac{9}{27}$	$P(E_2^j C_{2,1,2}^{j-1}) = \frac{12}{27}$	$P(E_3^j C_{2,1,2}^{j-1}) = \frac{4}{27}$
$P(E_0^j C_{2,1,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,1,3}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_2^j C_{2,1,3}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_3^j C_{2,1,3}^{j-1}) = \frac{2}{9}$
$P(E_0^j C_{2,2,0}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_1^j C_{2,2,0}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_2^j C_{2,2,0}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_3^j C_{2,2,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{2,2,1}^{j-1}) = \frac{2}{27}$	$P(E_1^j C_{2,2,1}^{j-1}) = \frac{9}{27}$	$P(E_2^j C_{2,2,1}^{j-1}) = \frac{12}{27}$	$P(E_3^j C_{2,2,1}^{j-1}) = \frac{4}{27}$
$P(E_0^j C_{2,2,2}^{j-1}) = \frac{1}{27}$	$P(E_1^j C_{2,2,2}^{j-1}) = \frac{6}{27}$	$P(E_2^j C_{2,2,2}^{j-1}) = \frac{12}{27}$	$P(E_3^j C_{2,2,2}^{j-1}) = \frac{8}{27}$
$P(E_0^j C_{2,2,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,2,3}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_2^j C_{2,2,3}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_3^j C_{2,2,3}^{j-1}) = \frac{4}{9}$
$P(E_0^j C_{2,3,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,3,0}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_2^j C_{2,3,0}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_3^j C_{2,3,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{2,3,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,3,1}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_2^j C_{2,3,1}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_3^j C_{2,3,1}^{j-1}) = \frac{2}{9}$
$P(E_0^j C_{2,3,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,3,2}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_2^j C_{2,3,2}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_3^j C_{2,3,2}^{j-1}) = \frac{4}{9}$
$P(E_0^j C_{2,3,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{2,3,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{2,3,3}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_3^j C_{2,3,3}^{j-1}) = \frac{2}{3}$
$P(E_0^j C_{3,0,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,0,0}^{j-1}) = 1$	$P(E_2^j C_{3,0,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{3,0,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{3,0,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,0,1}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_2^j C_{3,0,1}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_3^j C_{3,0,1}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{3,0,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,0,2}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_2^j C_{3,0,2}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_3^j C_{3,0,2}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{3,0,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,0,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{3,0,3}^{j-1}) = 1$	$P(E_3^j C_{3,0,3}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{3,1,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,1,0}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_2^j C_{3,1,0}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_3^j C_{3,1,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{3,1,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,1,1}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_2^j C_{3,1,1}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_3^j C_{3,1,1}^{j-1}) = \frac{1}{9}$
$P(E_0^j C_{3,1,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,1,2}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_2^j C_{3,1,2}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_3^j C_{3,1,2}^{j-1}) = \frac{2}{9}$
$P(E_0^j C_{3,1,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,1,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{3,1,3}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_3^j C_{3,1,3}^{j-1}) = \frac{1}{3}$
$P(E_0^j C_{3,2,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,2,0}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_2^j C_{3,2,0}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_3^j C_{3,2,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{3,2,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,2,1}^{j-1}) = \frac{2}{9}$	$P(E_2^j C_{3,2,1}^{j-1}) = \frac{5}{9}$	$P(E_3^j C_{3,2,1}^{j-1}) = \frac{2}{9}$
$P(E_0^j C_{3,2,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,2,2}^{j-1}) = \frac{1}{9}$	$P(E_2^j C_{3,2,2}^{j-1}) = \frac{4}{9}$	$P(E_3^j C_{3,2,2}^{j-1}) = \frac{4}{9}$
$P(E_0^j C_{3,2,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,2,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{3,2,3}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_3^j C_{3,2,3}^{j-1}) = \frac{2}{3}$
$P(E_0^j C_{3,3,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,3,0}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{3,3,0}^{j-1}) = 1$	$P(E_3^j C_{3,3,0}^{j-1}) = 0$
$P(E_0^j C_{3,3,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,3,1}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{3,3,1}^{j-1}) = \frac{2}{3}$	$P(E_3^j C_{3,3,1}^{j-1}) = \frac{1}{3}$
$P(E_0^j C_{3,3,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,3,2}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{3,3,2}^{j-1}) = \frac{1}{3}$	$P(E_3^j C_{3,3,2}^{j-1}) = \frac{2}{3}$
$P(E_0^j C_{3,3,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_1^j C_{3,3,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_2^j C_{3,3,3}^{j-1}) = 0$	$P(E_3^j C_{3,3,3}^{j-1}) = 1$

Al establecer $P_{S0} = P_{S1} = P_{S2} = P_{S3} = \frac{1}{4}$ en las ecuaciones anteriores, la distribución de grados de entrada de los nodos para el modelo de Cárdenas-Haro con tres niveles, queda:

$$P_{E0}^j = \frac{1}{8} \quad (82)$$

$$P_{E1}^j = \frac{3}{8} \quad (83)$$

$$P_{E2}^j = \frac{3}{8} \quad (84)$$

$$P_{E3}^j = \frac{1}{8} \quad (85)$$

El número de operaciones para obtener la distribución de grados de entrada en modelos con niveles mayores a tres, se eleva sustancialmente. Por lo que la utilización del criterio de grados de salida equiprobables no es factible para estos casos. Por ejemplo, en un modelo con cuatro niveles se necesitarían definir $5^4 = 625$ combinaciones de grados de salida, lo cual es complicado. En el caso de los modelos con cinco y seis niveles se requieren de $5^5 = 3,125$ y $5^6 = 15,625$ combinaciones, respectivamente. Por esta razón, para los modelos con cuatro, cinco y seis niveles, se utiliza el criterio de conexiones equiprobables para obtener la distribución de grados de entrada de los nodos.

En este caso, existen tres niveles en el modelo, por lo que los nodos sólo pueden tener un grado de entrada/salida menor a 3 y $P_{E4}^{(k)} = 0$. Dada una distribución inicial de grados de entrada, la probabilidad de que un nodo sea podable se define por la ecuación 47, por lo que en la primera iteración $P(R^{(1)}) = \frac{1}{5}$.

En la tabla XII se resumen los resultados de todas las iteraciones. La iteración 1 representa la distribución inicial de grados de entrada de los nodos en la cual no se ha aplicado ninguna iteración de podado. Se observa que los resultados tienden a generar

Tabla XII. Resultados de iteraciones en el modelo de tres niveles.

Iteración	P_{E0}	P_{E1}	P_{E2}	P_{E3}	$P(R^{(k)})$
1	0.125	0.375	0.375	0.125	0.2
2	0.016	0.432	0.288	0.064	0.0282
3	2.30E-04	0.4357	0.2771	0.0587	4.08E-04
4	4.60E-08	0.4358	0.277	0.0587	8.16E-08
5	1.84E-15	0.4358	0.277	0.0587	3.27E-15
6	2.96E-30	0.4358	0.277	0.0587	5.24E-30

cada vez menos nodos podables de manera rápida. Así, la probabilidad de podado es cada vez menor en cada iteración.

Para calcular el momento en que el proceso de podado finaliza, se asigna un valor de $\epsilon = 1/(3n^2)$ y se monitorea el momento en que $P_{E0} < \epsilon$. Esta condición es equivalente a encontrar la iteración en que la probabilidad de que haya menos de un nodo con grado de entrada cero en el grafo. Para $n = 1,000,000$ se tiene que $\epsilon = 3.33\text{E-}13$ por lo que se requieren de 4 iteraciones. Asimismo, para $n = 1,000,000,000$ se tiene que $\epsilon = 3.33\text{E-}19$ y el número de iteraciones sólo aumenta en uno al anterior.

VII.2.2. Modelo de cuatro, cinco y seis niveles

En este trabajo de tesis se han estudiado dos criterios para modelar un patrón de conexiones reales: las conexiones equiprobables y los grados de salida equiprobables. Ambos criterios se utilizan para calcular la distribución del grado de entrada en cada nodo del modelo de Cárdenas-Haro y con ambos se obtuvo el mismo resultado para el caso de dos niveles. Esto no implica que la obtención de esos resultados requiera el mismo esfuerzo computacional.

Aquí se presentan los resultados del análisis de los modelos con cuatro, cinco y seis niveles, utilizando el criterio de conexiones equiprobables. Por cada nodo existen a lo más $2^4 = 16$ patrones de conexión (aunque en forma global existen 2^{16} patrones

de conexión entre la etapa $j - 1$ y j). Así, para obtener el correspondiente grado de entrada, se etiquetan las cuatro posibles aristas de entrada de un nodo x , provenientes de los nodos de la etapa anterior (ver figura 38).

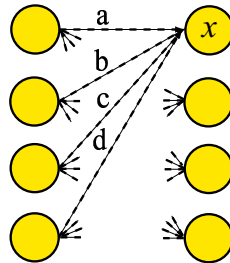


Figura 38. Posibles aristas de entrada de un nodo x en el modelo de Cárdenas-Haro con cuatro niveles.

Las siguientes condiciones determinan las distribuciones de los grados de entrada:

1. El nodo x tiene grado de entrada cero cuando a , b , c y d son iguales a cero, de aquí que $P_{E0} = \frac{1}{16}$.
2. El nodo x tiene grado de entrada uno cuando $a + b + c + d = 1$. Existen 4 patrones de conexiones que cumplen esta condición. De aquí que $P_{E1} = \frac{4}{16}$.
3. El nodo x tiene grado de entrada dos si $a + b + c + d = 2$. Existen 6 patrones de conexiones con esta restricción, quedando $P_{E2} = \frac{6}{16}$.
4. El nodo x tiene grado de entrada tres si $a + b + c + d = 3$. Existen 4 patrones de conexiones, por lo que queda que $P_{E3} = \frac{4}{16}$.
5. El nodo x tiene grado de entrada cuatro si $a + b + c + d = 4$. Así $P_{E4} = \frac{1}{16}$.

El problema ahora radica en obtener el número de posibles patrones de conexión para así conocer la distribución inicial de grados de entrada del grafo con niveles mayores a cuatro. La limitante principal es la restricción de que los grados de entrada/salida

deben ser menores o iguales a cuatro. Sin embargo, esto no repercute en la independencia entre etapas ya que los grados de salida no se afectan por los grados de entrada anteriores.

Dado que hay cinco posibles grados de entrada (cero, uno, dos, tres y cuatro) por nodo, existen 5^p eventos elementales (donde el número p de niveles es constante). Estos representan las posibles combinaciones de grados de salida en la etapa $j - 1$ y calcular cada una de ellas resulta impráctico.

Para obtener las distribuciones iniciales de grados de entrada, para los modelos con niveles cinco y seis, se realizó un programa en ANSI C que determina mediante una búsqueda exhaustiva el número de conexiones posibles entre la etapa $j - 1$ a la etapa j de ambos modelos. Los resultados se muestran en las tablas XIII y XIV.

Tabla XIII. Distribución de grados de entrada del modelo de Cárdenas-Haro con cinco niveles.

Grado de entrada	No. de Nodos	Probabilidad
1	923,521	0.0369
2	4,364,480	0.1746
3	8,246,720	0.3299
4	7,787,680	0.3115
5	3,675,520	0.1471

Tabla XIV. Distribución de grados de entrada del modelo de Cárdenas-Haro con seis niveles.

Grado de entrada	No. de Nodos	Probabilidad
1	3,256,794,606	0.025528401
2	16,825,274,856	0.131885005
3	36,792,767,790	0.288400302
4	42,788,517,120	0.335398014
5	27,911,989,890	0.218788278

Conforme el número de niveles crece, existe un mayor número de enlaces de la etapa j a la etapa $j + 1$. Esto trae consigo un fenómeno de homogenización en la distribución del grado de entrada en las etapas, de tal forma que el grado de entrada de los nodos tiende a ser el promedio del número de enlaces entre el número de nodos y las probabilidades de que un nodo tenga grado de entrada cero o cuatro son cada vez menores; así, existen cada vez menos nodos podables. La figura 39 ilustra la tendencia de las distribuciones de nodos con grado de entrada cero en base al número de niveles del modelo. Esta tendencia ocurre también en cada cada iteración; se conjetura que el número de iteraciones disminuye a medida que p aumenta, entonces el tiempo de ejecución promedio es cada vez menor que $\Theta(\log n)$.

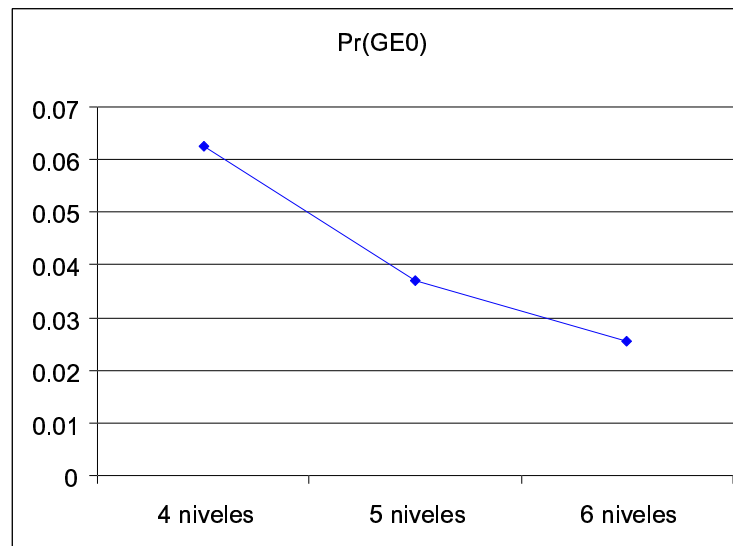


Figura 39. Gráfica que muestra la tendencia de la probabilidad de ocurrencia de nodos con grado de entrada cero de los modelos de cuatro, cinco y seis niveles.

Una vez que se obtiene la distribución de los grados de entrada de los nodos, se procede a analizar la forma en que éstos cambian en cada iteración y cuál es la tendencia de podabilidad.

En la tabla XV se muestran los resultados de las iteraciones en el modelo de cuatro niveles.

Tabla XV. Resultados de iteraciones en el modelo de cuatro niveles.

Iteración	P_{E0}	P_{E1}	P_{E2}	P_{E3}	P_{E4}	$P(R^{(k)})$
1	0.0625	0.25	0.375	0.25	0.0625	0.0833
2	0.0028	0.2914	0.3698	0.2086	0.0441	0.0039
3	5.59E-06	0.2931	0.3694	0.2069	0.0434	7.91E-06
4	2.31E-11	0.2931	0.3694	0.2069	4.34E-02	3.27E-11
5	3.94E-22	0.2931	0.3694	0.2069	4.34E-02	5.57E-22

Se observa que existe una tendencia de disminuir cada vez más rápido la distribución de nodos con grado de entrada cero. Para $n = 1,000,000$ se tiene un $\epsilon = 1/(4n^2)=2.50E-13$ para el cual en promedio se requieren de 3 iteraciones para finalizar el proceso de podado. Asimismo, para $n = 1,000,000,000$ el número de iteraciones se mantiene.

Tabla XVI. Resultados de iteraciones en el modelo de cinco niveles.

Iteración	P_{E0}	P_{E1}	P_{E2}	P_{E3}	P_{E4}	$P(R^{(k)})$
1	0.0369	0.1746	0.3299	0.3115	0.1471	0.0447
2	6.88E-04	0.1968	0.3408	0.2945	0.1225	8.56E-04
3	2.50E-07	0.1972	0.341	0.2942	0.1221	3.11E-07
4	3.31E-14	0.1972	0.341	0.2942	0.1221	4.12E-14
5	5.79E-28	0.1972	0.341	0.2942	0.1221	7.21E-28

Por otro lado, las tablas XVI y XVII muestran la distribución de entrada de los nodos en cada iteración de los modelos con cinco y seis niveles, respectivamente.

En el caso del modelo con cinco niveles con $n = 1,000,000$ etapas, se tiene un $\epsilon = 1/(5n^2)=2.00E-13$ y se requieren 3 iteraciones en promedio para finalizar el proceso de podado. Utilizando $n = 1,000,000,000$ etapas se requieren de 4 iteraciones en promedio.

Tabla XVII. Resultados de iteraciones en el modelo de seis niveles.

Iteración	P_{E0}	P_{E1}	P_{E2}	P_{E3}	P_{E4}	$P(R^{(k)})$
1	0.025528	0.131885	0.288400	0.335398	0.218788	0.0294
2	2.58E-04	0.1453	0.3006	0.3302	0.1942	3.02E-04
3	2.74E-08	0.1455	0.3007	0.3301	0.1939	3.21E-08
4	3.10E-16	0.1455	0.3007	0.3301	0.1939	3.62E-16
5	3.95E-32	0.1455	0.3007	0.3301	0.1939	4.62E-32

Finalmente, el modelo con seis niveles utiliza el mismo número de iteraciones que el modelo con cinco niveles. Se observa que estos resultados concuerdan con los obtenidos por Cárdenas-Haro.

Capítulo VIII

Conclusiones y trabajo futuro

Cárdenas-Haro desarrolló un algoritmo que reproduce el comportamiento de un ciclo de máquina de un DR-Mesh de $N \times N$ procesadores en un LR-Mesh de $O(N \times N)$ procesadores [Cárdenas-Haro, 2001]. La simulación más rápida conocida de este tipo se ejecuta en $O(\log n)$ u.t. con $O(N^{12})$ procesadores [Trahan *et al.*, 1997]. En su trabajo Cárdenas-Haro obtiene un uso eficiente de recursos, ya que utiliza $O(N \times N)$ procesadores. Sin embargo, aunque sus resultados muestran un algoritmo bastante rápido no hace un análisis formal del mismo, por lo que en el presente trabajo de tesis se obtiene el tiempo de ejecución promedio del algoritmo de Cárdenas-Haro.

En este capítulo se presentan los resultados y conclusiones del presente trabajo de tesis y se proponen nuevas actividades y problemáticas a resolver.

VIII.1. Conclusiones

Antes de poder analizar un algoritmo, es necesario tener un modelo con el que se puedan cuantificar los recursos computacionales que dicho algoritmo requiera. En esta tesis se hace una evaluación cualitativa del modelo de Cárdenas-Haro, que consiste en determinar si éste representa fielmente un patrón de conexiones de un DR-Mesh, basandose en características tales como: regularidad, número de nodos, alcanzabilidad, distribución del grado de entrada/salida de los nodos y diámetro del modelo.

Los resultados de la evaluación muestran que el modelo original de Cárdenas-Haro es una buena representación de un patrón de conexiones reales (ver sección IV.3) a pesar de que puede presentar conexiones que no existen en un patrón de conexiones reales. Sin embargo, al definir conexiones equiprobables en el modelo se obtiene una distribución de grados de entrada/salida más justa que permite una representación general del patrón de conexiones reales. Con base en los criterios de comparación definidos, se concluye que el modelo de Cárdenas-Haro bajo el criterio de conexiones equiprobables se aproxima satisfactoriamente a cualquier patrón de conexiones reales.

Se encontró en este estudio que el tiempo de ejecución del algoritmo de Cárdenas-Haro se encuentra acotado por el tiempo de terminación del proceso de podado. Una vez que el proceso de podado finaliza, la propagación del dato se realiza en una sola iteración (Ver sección III.2).

El tiempo esperado del proceso de podado del modelo de Cárdenas-Haro con dos niveles es de a lo más $O(\log N)$ u.t. con alta probabilidad, esto ocurre cuando la probabilidad de que un nodo tenga grado de entrada cero y dos es la misma. Cuando estas probabilidades son distintas ($P_{E0} \neq P_{E2}$) se observa que el tiempo de ejecución es mucho menor y se conjetura que para este caso el proceso de podado finaliza en $O(\log \log N)$ u.t.

Para corroborar lo anterior, se realizó una simulación numérica en Matlab para modelos de dos niveles con etapas de 100, 10,000 y 1,000,000. Las figuras 30, 31 y 32 muestran un mayor número de iteraciones cuando los grados de entrada cero y dos son iguales. La mayor parte del área que se observa, es menor a ese comportamiento y representa el caso en el que los grados de salida y las conexiones no son equiprobables.

En el caso del modelo con p niveles y n^2 etapas, se tiene que el número esperado de iteraciones para completar el proceso de podado es de $O(\log N)$. Se conjetura que

esto ocurre con alta probabilidad, pero debido a la complejidad del análisis esto no se demuestra, sin embargo en la sección VII.1.1 se propone una estrategia para resolverlo. Por otro lado, se simuló numericamente a los modelos con tres cuatro, cinco y seis niveles; puede observarse que conforme el número de niveles incrementa el número de iteraciones es menor. Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Cárdenas-Haro en sus simulaciones.

Finalmente, se concluye que el tiempo de ejecución promedio de la simulación de un DR-Mesh acíclico en un LR-Mesh es de a lo más $O(\log N)$ u.t. con $O(N \times N)$ procesadores. Esta simulación es la más eficiente en su tipo.

VIII.2. Trabajo futuro

Como trabajo futuro se contempla analizar el tiempo de ejecución promedio con alta probabilidad del algoritmo basado en un modelo con p niveles. Asimismo, se efectuará este análisis con base en el modelo transformado (en el que el grado de entrada/salida máximo de cada nodo es dos) del capítulo VI.

Por otro lado, es interesante analizar el caso cuando el DR-Mesh tiene ciclos y se determinará su poder computacional con respecto al DR-Mesh acíclico.

Una línea de investigación interesante se desprende de la evaluación de la modelación en grafos; por lo que se evaluarán y ampliarán los criterios de comparación propuestos, así como generalizar su utilización para otro tipo de aplicaciones.

Finalmente, se obtendrá el número de posibles conexiones en base al número de niveles del modelo (bajo el criterio de conexiones equiprobables); para ello, se utilizarán técnicas de conteo y de combinatoria para determinar una ecuación que represente dicha dependencia.

Bibliografía

- [Ben-Asher *et al.*, 1995] Ben-Asher, Y., Gordon, D., y Schuster, A. 1995. “Efficient Self Simulation Algorithms for Reconfigurable Arrays”. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 30(1):1-22 p.
- [Ben-Asher *et al.*, 1992] Ben-Asher, Y., Peleg, D., Ramaswami, R., y Schuster, A. 1992. “Optimal Simulations in Reconfigurable Arrays”. Technical Report 716, Technion Israel Institute of Technology, Computer Science Department.
- [Cárdenas-Haro, 2001] Cárdenas-Haro, J. A. 2001. “Simulación Eficiente de Modelos Paralelos DR-Mesh en LR-Mesh”. Tesis de Maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Ensenada, B.C. 62 pp.
- [Fernández-Zepeda *et al.*, 1999] Fernández-Zepeda, J. A., Vaidyanathan, R., y Trahan, J. L. 1999. “Improved Scalability Simulation of the General Reconfigurable Mesh”. *Proc. 6th Reconfigurable Architecture Workshop, LNCS, (Parallel and Distributed Processing; Lect. Notes Comp. Sci. 1586)*, (IEEE, San Juan, PR, April 1999), 1586:616-624 p.
- [Harary *et al.*, 1965] Harary, F., Norman, R. Z., y Cartwright, D. 1965. “Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs”. John Wiley and Sons, Inc. Primera edición. New York. 415 pp.
- [JáJá, 1992] JáJá, J. 1992. “An Introduction to Parallel Algorithms”. Addison-Wesley Publishing Co. Primera edición. New York. 576 pp.
- [Leighton, 1992] Leighton, T. 1992. “Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes”. Morgan Kaufmann. Primera edición. San Mateo, CA. 831 pp.
- [Li y Maresca, 1989] Li, H. y Maresca, M. 1989. “Polymorphic-Torus Network”. *IEEE Trans. Comput.*, 38(9):1345-1351 p.
- [Li y Stout, 1991] Li, H. y Stout, Q. F. 1991. “Reconfigurable SIMD Massively Parallel Computers”. *IEEE Proceedings*, 79(4):429-443 p.
- [Miller *et al.*, 1993] Miller, R., Prasanna-Kumar, V. K., Reisis, D., y Scout, Q. F. 1993. “Parallel Computations on Reconfigurable Meshes”. *IEEE Trans. Comput.*, 42(6):678-692 p.
- [Motwani y Raghavan, 1995] Motwani, R. y Raghavan, P. 1995. “Randomized Algorithms”. Cambridge University Press. Primera edición. Cambridge. 476 pp.

- [Papoulis y Pillai, 2002] Papoulis, A. y Pillai, U. S. 2002. “Probability, Random Variables and Stochastic Processes”. McGraw-Hill. Cuarta edición. New York. 837 pp.
- [Trahan *et al.*, 1997] Trahan, J. L., Vaidyanathan, R., y Bourgeois, A. G. 1997. “LRN Simulation of RN and RN Simulation of DRN”. Manuscrito no publicado, 13 de Junio.
- [Trahan *et al.*, 1996] Trahan, J. L., Vaidyanathan, R., y Thiruchelvan, R. K. 1996. “On the Power of Segmenting and Fusing Buses”. J. Parallel Distrib. Comput., 34(1):82-94 p.
- [Wang y Chen, 1990] Wang, B. F. y Chen, G. H. 1990. “Constant Time Algorithms for the Transitive Closure and some related Graph Problems on Processor Arrays with Reconfigurable Bus Systems”. IEEE Trans. Parallel Distrib. Systems, 1(4):500-507 p.
- [Wilf, 1994] Wilf, H. S. 1994. “Generatingfunctionology”. Academic Press. Segunda edición. Boston. 228 pp.

Vita



Daniel Fajardo Delgado se graduó de Licenciado en Informática en el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán, Jalisco en febrero de 2001. Se le otorgó el grado de Maestro en Ciencias en el CICESE en agosto de 2003, en el área de Ciencias de la Computación con especialidad en cómputo paralelo. Sus intereses estriban en el análisis y diseño de algoritmos, cómputo paralelo y distribuido, administración de sistemas operativos Unix, y redes de computadoras.