

Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG
Instituto de Ciências Exatas – ICEX
Departamento de Matemática – DMat

Monografia de Especialização
12 de abril de 2005

Introdução à Resolução Numérica de Equações Diferenciais

Orientador: Prof.(a) Denise Burgarelli Duczmal
Autor: Dênis Emanuel da Costa Vargas

“A coisa mais bonita que podemos experimentar é o misterioso.”

Albert Einstein

“A chave de todas as ciências é o ponto de interrogação.”

Honoré de Balzac

Agradecimentos

A Deus.

A minha mãe, **Maria Rosália Vargas** e ao meu pai **Fernando Antônio Vargas**, pelo amor, incentivo e compreensão inigualáveis.

A minha orientadora, **Professora Denise Burgarelli Duczmal**, pelo seu apoio perfeito na Especialização .

À **Professora Cristina Maria Marques**, Coordenadora do Curso de Especialização em Matemática, pelo incentivo.

Créditos

TEX é marca registrada da American Mathematical Society.

Maple e Maple V são marcas registradas de Waterloo Maple Inc.

Windows e Windows 98 são marcas registradas da Microsoft Corporation.

Sinopse

A resolução numérica de equações diferenciais é um modo de resolução que vem sendo , no avanço da tecnologia, muito útil nos problemas de engenharia que são modelados por essas equações. Essas equações resultado do modelamento matemático não possuem resolução analítica de fácil acesso.

Nossa intenção nessa monografia é tratar de algumas maneiras de resolver essas equações de modo aproximado utilizando-se de métodos numéricos. A primeira tentativa de aproximar a solução de uma equação diferencial por métodos numéricos foi de Euler, no Século XVIII. Os métodos numéricos avançaram bastante nesse período. Com a ajuda de um computador para realizar os cálculos, esses métodos numéricos são eficientes tanto em resultados, pois nos fornece uma segurança de cálculos, quanto em tempo, pois fazem os cálculos em uma velocidade sobre-humana.

No capítulo 1, é feita uma introdução às equações diferenciais e suas classificações. No capítulo 2 falamos das equações ordinárias de primeira ordem, onde tratamos de algumas delas e seus métodos analíticos de resolução. No capítulo 3 falamos a mesma coisa do capítulo 2 mas para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. No capítulo 4 tratamos dos métodos numéricos para equações ordinárias. Fizemos implementações desses algoritmos no Maple. No capítulo 5 estudamos as equações principais parciais, que são as equações de Onda, Calor e Laplace. Finalmente no capítulo 6 estudamos métodos numéricos de equações parciais e também implementamos os algoritmos em Maple. Boa leitura.

Sumário

1	Introdução	5
1.1	Classificação Quanto à Ordem	5
1.2	Classificação Quanto à Linearidade	6
1.3	Classificação das Equações Diferenciais	6
1.4	Solução de uma Equação Diferencial Ordinária	6
2	Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	8
2.1	Equações de Variáveis Separáveis	8
2.2	Fatores Integrantes	9
2.3	Equações Lineares	11
2.4	Equações Exatas	13
2.4.1	Fatores Integrantes em Equações Exatas	16
2.5	Método da Variação de Parâmetros	18
3	Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem	20
3.1	Equação Linear Homogênea	20
3.1.1	Equação Característica com Raízes Reais Distintas	21
3.1.2	Equação Característica com Raízes Reais Iguais	22
3.1.3	Equação Característica com Raízes Complexas	23
3.2	Equação Linear Não - Homogênea	24
3.2.1	Métodos dos Coeficientes Indeterminados	25
4	Métodos Numéricos	28
4.1	Método de Euler (Método da Tangente)	28
4.2	Erros	29
4.3	Método de Euler Aprimorado	30
4.4	Método de Runge-Kutta	32
4.5	Métodos de Passos Múltiplos	32
4.5.1	Método de Adams	33
4.5.2	Fórmulas Inversas de Diferenciação	34
4.6	Estabilidade	35
5	Equações Diferenciais Parciais	37
5.1	Método da Separação de variáveis	37
5.2	Equação do Calor	39
5.3	Séries de Fourier	42
5.4	Teorema de Fourier	44
5.5	Equação da Onda	46
5.5.1	Onda Com Velocidade Inicial Nula	47

5.5.2	Solução Geral da Onda	49
5.6	Equação de Laplace	50
6	Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais	55
6.1	Método das Diferenças Finitas	55
6.2	Método das Diferenças Finitas na Equação da Onda	56

1 Introdução

Neste trabalho vamos falar um pouco sobre as equações diferenciais. Problemas de engenharia e de todas as ciências que trabalham com modelos matemáticos podem ser modelados por equações diferenciais. Vamos também ver os diversos tipos de equações diferenciais, seus métodos de resolução analíticos e numéricos.

Definição 1.1 Equação Diferencial

Uma Equação Diferencial é uma equação que contém uma ou mais derivadas de uma função desconhecida.

Exemplo 1.2

- $y' = \cos(x)$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- $y''' + 2y'' - 5y = 0$

são equações diferenciais. □

1.1 Classificação Quanto à Ordem

Definição 1.3 Ordem de uma Equação Diferencial

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem envolvida na equação

Exemplo 1.4

- $y' = \cos(x)$ é de primeira ordem
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é de segunda ordem
- $y''' + 2y'' - 5y = 0$ é de terceira ordem

□

1.2 Classificação Quanto à Linearidade

Definição 1.5 Equação Diferencial Linear

Uma equação diferencial linear é uma equação que é linear em x , em y e em suas derivadas. Caso contrário a equação é não-linear.

Exemplo 1.6

- $y' = \cos(x)$ é não-linear pois $\cos(x)$ é uma função não-linear
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é linear pois é linear nas derivadas parciais.
- $y''' + 2y'' - 5y = 0$ é linear pois é linear nas derivadas ordinárias.

□

1.3 Classificação das Equações Diferenciais

Definição 1.7 Equação Diferencial Ordinária

Uma equação diferencial ordinária é uma equação onde as derivadas que estão envolvidas são ordinárias, isto é, são funções de uma única variável. Caso contrário a equação é parcial.

Exemplo 1.8

- $y' = \cos(x)$ é ordinária pois $y = f(x)$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é parcial pois $u = f(x, y)$.
- $y''' + 2y'' - 5y = 0$ é ordinária pois $y = f(x)$

□

1.4 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária

Definição 1.9 Solução de uma Equação Diferencial Ordinária

Uma solução de uma equação diferencial ordinária em um domínio $\alpha < x < \beta$

é uma função $y = f(x)$ derivável até a ordem da equação de tal forma que substituída na equação, a transforma em uma identidade.

Exemplo 1.10 As funções $y_1(x) = \cos(x)$ e $y_2(x) = \sin(x)$ são soluções da equação $y'' + y = 0$ em todo domínio da função. Essa solução é chamada de solução particular.

A função $y(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ é chamada de solução geral, onde a e b são números reais. Isso significa que toda solução da equação diferencial pode ser escrita dessa forma. \square

2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Neste capítulo vamos tratar das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Nosso objetivo é encontrar o melhor método de resolvê-la e achar sua solução, caso exista.

Definição 2.1 Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem

Uma Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem é uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

onde f é uma função conhecida de duas variáveis.

Vamos ver alguns tipos de equações diferenciais de primeira ordem e seus métodos analíticos de resolução.

2.1 Equações de Variáveis Separáveis

Definição 2.2 Equação Diferencial de Variáveis Separáveis

Uma Equação Diferencial de variáveis separáveis ou simplesmente equação diferencial separável é uma equação que pode ser escrita na forma

$$M(x)dx = N(y)dy$$

Isto é, uma equação separável é uma equação que pode ser separada de tal forma que de um lado da equação fique apenas com uma função na variável x e o outro lado fique uma outra função apenas na variável y .

A solução de uma equação diferencial de variáveis separáveis é obtida integrando ambos os lados da equação.

Exemplo 2.3 Seja a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}.$$

Ela é uma equação de variáveis separáveis pois pode ser escrita na forma $M(x)dx = N(y)dy$ com $M(x) = x^2$ e $N(y) = 1 - y^2$. Isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$$

pode ser escrita como

$$x^2 dx = (1 - y^2) dy$$

Sua solução pode ser encontrada facilmente integrando os dois lados da equação, ou seja,

$$\int (1 - y^2) dy = \int x^2 dx$$

e o resultado dessa integração nos fornece implicitamente a solução analítica da equação separável proposta, que é

$$y - y^3 = \frac{x^3}{3} + C.$$

□

2.2 Fatores Integrantes

Muitas vezes uma equação diferencial de primeira ordem pode ser resolvida multiplicando a equação por uma outra função de tal forma que o produto fique imediatamente integrável. A função que se usa para esse fim chama-se fator integrante. Determinar esse fator integrante não é nada fácil. Para isso, usamos diretamente a equação dada.

Exemplo 2.4 Seja a equação

$$y' + 2xy = x$$

Vamos determinar diretamente dessa equação um fator integrante. Multipliquemos a equação por uma função ainda não conhecida $u(x)$, obtemos:

$$u(x)y' + 2xyu(x) = xu(x)$$

Nosso objetivo é que o produto fique imediatamente integrável. Como $xu(x)$ já é integrável, queremos que $u(x)y' + 2xyu(x)$ seja imediatamente integrável, isto é, que seja a derivada de alguma função. Para isso, devemos ter

$$2xu(x) = u'(x)$$

ou seja,

$$2xu(x) = \frac{du}{dx}$$

que é uma equação separável. Portanto, temos

$$2xdx = \frac{du}{u(x)}$$

e conseqüentemente

$$\int 2xdx = \int \frac{du}{u(x)}$$

que tem por resultado

$$x^2 = \ln u(x)$$

e portanto

$$u(x) = e^{x^2}$$

é o nosso fator integrante. A equação agora fica

$$u(x)y' + yu'(x) = [u(x)y]'$$

Substituindo $u(x)$ por e^{x^2} , temos

$$e^{x^2}y = \int xe^{x^2} dx + C$$

que resolvendo, temos como resposta

$$e^{x^2}y = \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

onde concluímos que

$$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

□

2.3 Equações Lineares

Definição 2.5 Equação Linear

Uma equação diferencial de primeira ordem linear é uma equação que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

onde $p(x)$ e $g(x)$ são contínuas em um intervalo aberto (a, b) contendo x .

Exemplo 2.6 Seja a equação

$$y' - \frac{y}{2} = e^{-x}$$

Ela está escrita na forma acima com $p(x) = -\frac{1}{2}$ e $g(x) = e^{-x}$ e portanto é uma equação diferencial linear de primeira ordem. \square

Vamos desenvolver uma fórmula para resolver uma equação linear de primeira ordem. Seja a equação diferencial linear de primeira ordem genérica

$$y' + p(x)y = g(x)$$

Multiplicando essa equação por um fator integrante $u(x)$ ainda indeterminado, temos

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = g(x)u(x).$$

Para que $u(x)y' + u(x)p(x)y$ seja imediatamente integrável, ele tem que ser a derivada de uma função. Para isso, devemos ter

$$u(x)p(x) = u'(x)$$

ou seja

$$u(x)p(x) = \frac{du}{dx}$$

que é uma equação de variáveis separáveis. Portanto, sua resolução é

$$p(x)dx = \frac{du}{u(x)}$$

e assim

$$\ln(u(x)) = \int p(x)dx + K$$

Portanto, fazendo $K = 0$

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Esse é o fator integrante, agora determinado. Voltando para a equação inicial, temos

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = g(x)u(x)$$

substituindo $p(x)u(x)$ por $u'(x)$, temos

$$u(x)y' + u'(x)y = g(x)u(x)$$

Assim,

$$[u(x)y]' = g(x)u(x)$$

Integrando a equação, temos

$$u(x)y = \int u(x)g(x)dx + C$$

Portanto, a fórmula para se resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem é

$$y = \frac{\int u(x)g(x)dx + C}{u(x)}$$

onde

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Exemplo 2.7 Voltando na equação

$$y' - \frac{y}{2} = e^{-x}$$

Como $p(x) = -\frac{1}{2}$ e $g(x) = e^{-x}$ então, usando a fórmula que acabamos de desenvolver, temos

$$y = \frac{\int u(x)e^{-x}dx + C}{u(x)}$$

com

$$u(x) = e^{\int -\frac{1}{2}dx} = e^{-\frac{x}{2}}$$

E assim, a solução fica

$$y = -\frac{2}{3}e^{-x} + Ce^{\frac{x}{2}}$$

□

2.4 Equações Exatas

Definição 2.8 Equação Exata

Uma equação diferencial de primeira ordem

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é uma equação exata se o primeiro membro é a diferencial exata

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

de uma função $u(x, y)$.

Exemplo 2.9 Seja a equação

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0$$

Essa equação é exata, pois esta na forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

com

$$M(x, y) = 2x + y^2 \quad \text{e} \quad N(x, y) = 2xy$$

e o primeiro membro é a diferencial exata de uma função $u(x, y) = x^2 + xy^2$ \square

Vamos ver agora como se resolve uma equação diferencial de primeira ordem exata.

Lema 2.10 *Uma equação diferencial de primeira ordem é exata se e somente se*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Demonstração:

(\Rightarrow)Seja uma equação diferencial de primeira ordem exata genérica

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Então existe uma função $u(x, y)$ tal que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Portanto $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Da mesma forma, temos que $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Portanto, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ como queríamos demonstrar.

(\Leftarrow) Suponha que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Seja $u(x, y)$ uma função de duas variáveis de tal forma que $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$. Assim, temos que

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y).$$

Ou seja, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x, y)dx + h(y))$. Como $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ temos que

$$N(x, y) = \int \frac{\partial M}{\partial y}dx + h'(y).$$

Logo,

$$h'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx.$$

Derivando a equação em relação à x , temos que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ é nulo. O que comprova que a função $N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx$ não é uma função de duas variáveis, isto é, não depende de x e sim depende somente de y . Assim,

$$u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx + \int [N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx]dy.$$

Portanto chegamos a conclusão de que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

o que comprova que a equação diferencial de primeira ordem é exata, como queríamos demonstrar. ■

A própria demonstração desse lema nos ajuda a entender como resolver uma equação diferencial exata de primeira ordem. Vamos apresentar um

exemplo de uma resolução analítica de uma equação diferencial exata de primeira ordem.

Exemplo 2.11 Seja a equação diferencial

$$[y \cos(x) + 2xe^y]dx + [\text{sen}(x) + x^2e^y - 1]dy = 0.$$

Temos que

$$M(x, y) = y \cos(x) + 2xe^y \quad e \quad N(x, y) = \text{sen}(x) + x^2e^y - 1$$

Assim, é fácil ver que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y$$

Pelo lema, temos que essa equação diferencial de primeira ordem é exata. Assim, existe uma função $u(x,y)$ tal que o primeiro membro dessa equação é a diferencial exata dessa função. Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cos x + 2xe^y$$

O que significa que

$$u(x, y) = \int [y \cos x + 2xe^y] dx$$

Integrando , temos

$$u(x, y) = y \text{sen} x + x^2e^y + h(y)$$

Derivando $u(x,y)$ acima em relação a y , temos que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \text{sen} x + x^2e^y + h'(y)$$

Mas como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \text{sen} x + x^2e^y - 1$$

temos que

$$\text{sen} x + x^2e^y + h'(y) = \text{sen} x + x^2e^y - 1$$

ou seja, $h'(y) = -1$, que integrando, por sua vez, temos $h(y) = -y$.

Definindo $h(y)$, vimos que a função

$$u(x, y) = y \text{sen} x + x^2e^y - y = C$$

onde C é uma constante, é a solução da equação diferencial exata descrita no início do exemplo. \square

2.4.1 Fatores Integrantes em Equações Exatas

Já apresentamos o conceito de fator integrante, usado para demonstrar a fórmula de uma equação diferencial de primeira ordem linear.

Os fatores integrantes serão muito úteis nas equações diferenciais exatas. Isso se deve ao fato de que muitas equações diferenciais que não são exatas, geralmente de difícil solução analítica, poder se transformar em uma equação exata multiplicando por um fator integrante, facilitando sua solução analítica.

Vamos ver como funciona um fator integrante em uma equação que não é exata.

Seja a equação genérica não exata

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Multiplicando por um fator integrante ainda indeterminado $u(x, y)$ temos a equação

$$u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)N(x, y)dy = 0$$

Nossa esperança é que essa nova equação seja exata. Para isso, devemos ter,

$$\frac{\partial uM}{\partial y} = \frac{\partial uN}{\partial x}$$

Através de manipulações algébricas, temos

$$M \frac{\partial u}{\partial y} - N \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) u = 0$$

Nosso problema agora é resolver a equação acima e achar o fator integrante, que não é tão simples assim. Portanto, apesar de ser um método muito bom para se resolver equações que podem se transformar em exatas a partir de um fator integrante, só funciona quando a equação acima é de imediata solução.

Assim, o fator integrante acima é imediato quando $u(x, y)$ é uma função de uma só variável, ou x ou y .

Suponhamos $u(x, y)$ ser uma função só na variável x , isto é $u(x)$. Assim ,

$$\frac{\partial uM}{\partial y} = u \frac{\partial M}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial uN}{\partial x} = u \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{du}{dx}$$

Assim, para $\frac{\partial uM}{\partial y} = \frac{\partial uN}{\partial x}$, devemos ter

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} u$$

Logo, se $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ for uma função exclusiva da variável x , então existe um fator integrante $u(x)$ que pode ser obtido resolvendo a equação diferencial de variáveis separáveis acima. Esse procedimento é análogo se escolhermos y no lugar de x .

Exemplo 2.12 Seja a equação

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

Essa equação claramente não é exata, pois como

$$M(x, y) = 3xy + y^2 \quad e \quad N(x, y) = x^2 + xy$$

temos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

isto é

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Vamos determinar agora um fator integrante que dependa só da variável x .

Ao determinar a expressão $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ temos

$$\frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}$$

que é uma função que depende só da variável x , provando assim que existe um fator integrante.

Assim,

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \Rightarrow u(x) = x$$

Portanto, a equação

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

que não é exata, se transformou em uma equação exata mediante uma multiplicação pelo fator integrante $u(x)$.

Assim,

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$

é uma equação exata, e essa já sabemos resolver analiticamente. \square

2.5 Método da Variação de Parâmetros

O método da variação de parâmetros é outro interessante método para obter a solução geral de uma equação diferencial linear de primeira ordem. Na verdade, vamos utilizá-lo para esse fim simplesmente com o objetivo de mostrar como se usa esse método. Não faz nenhum sentido usar esse método apenas para desenvolver a solução geral de uma equação diferencial linear uma vez que já temos a fórmula que faz esse trabalho. Mais a frente do nosso trabalho vamos voltar a usar o método da variação de parâmetros em outras aplicações.

Seja uma equação diferencial linear genérica

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Suponha $q(x) = 0 \quad \forall x$. Assim, pela fórmula desenvolvida para resolução de uma equação diferencial linear, temos que

$$u(x) = e^{-\int f(x)dx}$$

é a solução da equação $y' + p(x)y = 0$.

Vamos determinar agora uma função $v(x)$ tal que

$$y(x) = u(x)v(x)$$

seja a solução geral da equação diferencial linear.

O produto é sugerido pela solução geral da equação

$$y' + p(x)y = 0$$

ser $y(x) = Cu(x)$, obtida pela fórmula.

Consiste em substituir C por uma variável $v(x)$. Este método pode ser generalizado para equações de ordem superior e é de grande importância.

Substituindo $y(x) = u(x)v(x)$ em

$$y' + p(x)y = q(x)$$

temos

$$u'v + u(v' + pv) = q$$

Como u é a solução da equação $y' + p(x)y = 0$ temos

$$v'u = q \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{q}{u}$$

Logo

$$v = \int \frac{q}{u} dx + C$$

Assim, temos que

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y = u \left(\int \frac{q}{u} dx + C \right)$$

que é a mesma fórmula definida anteriormente para equações diferenciais lineares.

Exemplo 2.13 Seja a equação linear

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos(3x)$$

A equação $y' - \frac{2y}{x} = 0$ tem como solução $v = x^2$ Assim,

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y = ux^2$$

Então

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos(3x)$$

Fazendo uso de manipulações algébricas, temos

$$u'v + v'u - \frac{2uv}{x} = x^2 \cos(3x) \quad \Rightarrow \quad u' = \cos(3x) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\text{sen}(3x)}{3} + C$$

Portanto,

$$y = ux^2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 \left[\frac{\text{sen}(3x)}{3} + C \right]$$

é a solução geral da equação linear dada. □

3 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Neste capítulo vamos tratar das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Nosso objetivo é encontrar o melhor método de resolvê-la e achar sua solução, caso exista.

Definição 3.1 Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem

Uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem é uma equação do tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Exemplo 3.2 A equação $y'' = 3x + 2y - y'$ é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. \square

Equação Linear de Segunda Ordem

Definição 3.3 Equação Linear de Segunda Ordem

Uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem Linear é uma equação que pode ser escrita na forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

que também pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

dividindo a equação anterior por $P(x)$. Caso contrário, isto é, uma equação diferencial ordinária de segunda ordem que não pode ser escrita na forma acima é dita não-linear.

3.1 Equação Linear Homogênea

Definição 3.4 Equação Linear Homogênea

Uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem Linear Homogênea

é uma equação que pode ser escrita na forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

onde $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são chamados de coeficientes.

Aqui nesta monografia vamos trabalhar apenas com coeficientes constantes. Assim, a equação acima fica

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{com} \quad a, b \text{ e } c \in \mathbb{R}$$

Através de manipulações algébricas, temos que $y = e^{\lambda x}$ é uma solução, se λ for escolhido adequadamente.

Assim, $ay'' + by' + cy = 0$ fica

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$$

Portanto, a escolha de λ será a raiz da equação

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

que é chamada de equação característica da equação homogênea dada.

Assim, para as equações homogêneas, temos três casos a considerar:

- Se as raízes da equação característica são distintas e reais
- Se as raízes da equação característica são iguais e reais
- Se as raízes da equação característica são conjugadas e complexas

3.1.1 Equação Característica com Raízes Reais Distintas

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são raízes reais da equação característica então $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ são duas soluções distintas da equação homogênea dada.

Por meio de um algebrismo simples, mas entediado, verifica-se que o produto de uma constante real por y_1 ou y_2 também é solução da equação homogênea dada. Da mesma maneira, verifica-se que a soma desses produtos também é uma solução da equação homogênea dada.

Chamamos o conjunto $\{y_1, y_2\}$ de conjunto fundamental de soluções. Assim, qualquer combinação linear do conjunto fundamental de soluções é uma solução da equação homogênea dada.

Portanto, a solução geral de uma equação homogênea na qual as raízes da equação característica são reais e distintas é

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Vale a pena resaltar que o conjunto fundamental de soluções é linearmente independente, isto é,

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0$$

Exemplo 3.5 Seja a equação homogênea $y'' + y' - 2y = 0$. A equação característica é

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Essa equação tem por raízes $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. Assim, a solução geral da equação homogênea dada é

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

□

3.1.2 Equação Característica com Raízes Reais Iguais

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ são raízes reais e iguais da equação característica da equação homogênea dada, temos que $y_1 = e^{\lambda x}$ é uma solução da equação homogênea dada.

Para acharmos a outra solução y_2 , vamos aplicar o método da variação de parâmetros.

Para isso, chamamos a solução geral $y(x) = u(x)y_1(x)$. Vamos determinar $u(x)$ substituindo $y(x)$ na equação homogênea dada.

Assim, como $ay'' + by' + cy = 0$ é a equação homogênea dada, temos

$$a\left[u''(x) - \frac{b}{a}u'(x) + \frac{b^2}{4a^2}u(x)\right] + b\left[u'(x) - \frac{b}{2a}u(x)\right] + cu(x)e^{\lambda x} = 0$$

e por consequência

$$au''(x) + (-b + b)u'(x) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)u(x) = 0$$

Como $b^2 - 4ac = 0$ temos $au''(x) = 0 \Rightarrow u''(x) = 0 \Rightarrow u(x) = C_1x + C_2$

Logo, $y(x) = (C_1x + C_2)e^{\lambda x} \Rightarrow y(x) = C_1xe^{\lambda x} + C_2e^{\lambda x}$

Assim, temos que $y_1 = e^{\lambda x}$ e $y_2 = xe^{\lambda x}$. No caso de uma equação homogênea que tem uma equação característica de raízes reais e iguais, o conjunto fundamental de soluções é $\{y_1, y_2\}$ com $y_1 = e^{\lambda x}$ e $y_2 = xe^{\lambda x}$. Portanto, a solução geral dessa equação é

$$y(x) = C_1xe^{\lambda x} + C_2e^{\lambda x}$$

Exemplo 3.6 Seja a equação $y'' + 4y' + 4y = 0$. A equação característica é $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, cuja raiz é $\lambda = -2$. Portanto, a solução geral dessa equação é $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$. \square

3.1.3 Equação Característica com Raízes Complexas

Se as soluções da equação característica são duas raízes complexas, elas são conjugadas. Assim, as raízes são

$$\lambda_1 = p + qi \quad e \quad \lambda_2 = p - qi$$

Logo, teríamos soluções como

$$y_1 = e^{(p+qi)x} \quad e \quad y_2 = e^{(p-qi)x}$$

Aplicando a Fórmula de Euler, que diz que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \quad e \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$$

temos

$$y_1 = e^{p+iqx} \Rightarrow y_1 = e^{px} \cdot e^{iqx} \Rightarrow y_1 = e^{px}[\cos(qx) + i\operatorname{sen}(qx)]$$

e

$$y_2 = e^{p-iqx} \Rightarrow y_2 = e^{px} \cdot e^{-iqx} \Rightarrow y_2 = e^{px}[\cos(qx) - i\operatorname{sen}(qx)]$$

Para não trabalhar com a unidade imaginária i , vamos somar y_1 e y_2 e dividir a soma por 2. Assim, temos

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{px} \cos(qx)$$

Da mesma maneira, vamos subtrair y_2 de y_1 e dividir a diferença por $2i$. Logo,

$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{px} \operatorname{sen}(qx)$$

Como qualquer combinação linear do conjunto fundamental de soluções é também uma solução da equação homogênea dada, temos que y_3 e y_4 são soluções, pois eles são combinações lineares de $\{y_1, y_2\}$, que por sua vez é um conjunto fundamental de soluções. É fácil provar que o conjunto $\{y_3, y_4\}$ é linearmente independente. Para isso, basta provar que a combinação linear $K_1 y_3 + K_2 y_4 = 0$ somente quando $K_1 = K_2 = 0$. Portanto, temos que o conjunto $\{y_3, y_4\}$ também forma um conjunto fundamental de soluções.

Portanto, a solução geral de uma equação homogênea que tem a equação característica com raízes complexas e por sua vez conjugadas, é

$$y = C_1 e^{px} \cos(qx) + C_2 e^{px} \operatorname{sen}(qx)$$

Exemplo 3.7 Seja a equação $y'' - 2y' + 10 = 0$. A equação característica é

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

e admite as soluções $\lambda_1 = 1 + 3i$ e $\lambda_2 = 1 - 3i$. Como $p = 1$ e $q = 3$, temos que a solução geral dessa equação é

$$y = e^x [C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x)]$$

□

3.2 Equação Linear Não - Homogênea

Definição 3.8 Equação Linear Não - Homogênea

Uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem Linear Não - Homogênea é uma equação que pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Para achar a solução geral de uma equação não-homogênea, precisamos de uma solução particular $Y(x)$. Temos que a diferença entre duas soluções particulares $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ é uma solução da equação homogênea correspondente $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Isso se verifica facilmente apenas substituindo

$Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ na equação não-homogênea e observando que o resultado é nulo.

Assim, $Y_1(x) - Y_2(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação homogênea correspondente.

Portanto, a solução geral y de uma equação não-homogênea é

$$y - Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \Rightarrow y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + Y(x)$$

Logo, para acharmos a solução geral y de uma equação não-homogênea precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente, encontrar uma solução particular da equação não-homogênea e depois somar as duas.

Repare que a preocupação de encontrar a solução geral da equação não-homogênea será de encontrar uma solução particular, pois a solução da equação homogênea correspondente não teremos dificuldades, desde que os coeficientes sejam constantes.

Para tanto, vamos desenvolver alguns métodos de se encontrar essa solução particular.

3.2.1 Métodos dos Coeficientes Indeterminados

Neste método, devemos fazer uma suposição inicial sobre a solução particular e depois vamos ajustando essa solução até chegarmos na solução verdadeira.

A desvantagem desse método é ter um limitado número de equações que podem ser resolvidas por ele. Essas equações são, essencialmente, constituídas por funções polinomiais, exponenciais, senos e cossenos.

Seja a equação não-homogênea geral

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

com a , b e c constantes.

A função $g(x)$ pertence a classe das funções discutidas anteriormente, ou seja, polinomiais, senos, cossenos, exponenciais ou somas e produtos dessas funções.

A função $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x)$ pode formular n subproblemas, cada um com um termo da soma de $g(x)$.

Assim, o i -ésimo subproblema é

$$ay'' + by' + cy = g_i(x)$$

Para esse subproblema, fazer a hipótese da solução particular $Y_i(x)$, considerando a natureza de $g_i(x)$.

Achando a solução particular $Y_i(x)$ para todo $i = 1, \dots, n$, temos que a solução particular da equação não-homogênea dada é

$$\sum_{i=1}^n Y_i(x)$$

Vamos mostrar as várias suposições que podemos fazer quanto à solução particular da equação não-homogênea que estamos trabalhando através de vários exemplos, para evitar teoria em demasia.

Exemplo 3.9 Seja a equação $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$. A hipótese de uma solução particular é

$$Y(x) = Ae^{2x}$$

Vamos agora determinar o coeficiente A . Assim, $y'' = 4Ae^{2x}$ e $y' = 2Ae^{2x}$. Portanto,

$$(4A - 6A - 4A)e^{2x} = 3e^{2x}$$

o que significa que $A = -\frac{1}{2}$. Assim, a solução particular é $Y(x) = -\frac{e^{2x}}{2}$. \square

Exemplo 3.10 Seja a equação $y'' - 3y' - 4y = 2\text{sen}(x)$. A hipótese de uma solução particular deve envolver seno e cosseno, pois a equação envolve suas derivadas. Então, a hipótese é

$$Y(x) = A\text{sen}(x) + B\text{cos}(x)$$

Vamos agora determinar os coeficientes A e B . Portanto,

$$(-A + 3B - 4A)\text{sen}(x) + (-B - 3A - 4B)\text{cos}(x) = 2\text{sen}(x)$$

E assim, resolvendo esse sistema, temos que $A = -\frac{5}{17}$ e $B = \frac{2}{17}$. Portanto, a solução particular é

$$Y(x) = -\frac{5}{17}\text{sen}(x) + \frac{2}{17}\text{cos}(x).$$

\square

Exemplo 3.11 Seja a equação $y'' - 3y' - 4y = 4x^2 - 1$. A hipótese de uma solução particular deve ser um polinômio do mesmo grau que $g(x)$. Então, a hipótese é

$$Y(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Vamos agora determinar os coeficientes A , B e C . Como $Y''(x) = 2A$ e $Y'(x) = 2Ax + B$ temos,

$$-2A - 6Ax - 3B - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 4x^2 - 1$$

E assim, resolvendo esse sistema, temos que $A = -1$, $B = \frac{3}{2}$ e $C = -\frac{11}{8}$. Portanto, a solução particular é

$$Y(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{11}{8}.$$

□

Exemplo 3.12 Seja a equação $y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos(2x)$. A hipótese de uma solução particular deve ser um produto de e^x por uma combinação linear de $\cos(2x)$ e $\sin(2x)$. Então, a hipótese é

$$Y(x) = Ae^x \sin(2x) + Be^x \cos(2x)$$

Vamos agora determinar os coeficientes A e B . Derivando $Y(x)$ e substituindo na equação acima, temos

$$10B + 2A = 8 \quad e \quad 2B - 10A = 0$$

E assim, resolvendo esse sistema, temos que $A = \frac{2}{13}$ e $B = \frac{10}{13}$. Portanto, a solução particular é

$$Y(x) = \frac{2}{13}e^x \sin(2x) + \frac{10}{13}e^x \cos(2x).$$

□

Exemplo 3.13 Seja a equação $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2\sin(x) - 8e^x \cos(2x)$. Separamos em três subproblemas

- $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$
- $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$
- $y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos(2x)$

Como para cada caso já fizemos a análise das soluções particulares nos exemplos anteriores, temos que a solução particular é

$$Y(x) = -\frac{e^{2x}}{2} + \frac{3}{17}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x) + \frac{10}{13}e^x \cos(2x) + \frac{2}{13}e^x \sin(2x).$$

□

4 Métodos Numéricos

Neste capítulo vamos fazer uma discussão sobre os métodos numéricos para resolver equações diferenciais. Nosso objetivo é encontrar o melhor método de resolvê-la e achar sua solução.

Até agora vimos métodos de resolução analíticos. Muitas vezes teremos que encontrar uma solução de maneira aproximada. Assim entra em ação o método numérico.

Definição 4.1 Método Numérico

Um método numérico é um procedimento iterativo que busca a aproximação de um resultado tendo como base o resultado anterior que já é conhecido. Vamos começar com o método de Euler que, em 1768, foi o primeiro que tentou resolver numericamente uma equação diferencial.

4.1 Método de Euler (Método da Tangente)

Seja $\frac{dy}{dx} = f(x, t)$ uma equação diferencial de primeira ordem com um valor inicial $y(x_0) = y_0$ da solução. Queremos calcular os valores aproximados de y_i da solução $y = \phi(x)$ a partir de um conjunto de valores de x . Tendo um incremento h constante, temos que $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h = x_0 + h + h = x_0 + 2h$ o que significa que $x_n = x_0 + nh$. É bom lembrar que y_n é o valor aproximado de $\phi(x_n)$, portanto temos em geral que $y_n \neq \phi(x_n)$.

A derivada no ponto (x_0, y_0) nos fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva solução $y = \phi(x)$ que passa pelo ponto (x_0, y_0) . Assim, temos que $\phi'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Portanto, isolando y_1 na equação temos

$$y_1 = y_0 + \phi'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Como $x_{n+1} - x_n = h$ para todos os valores de n e $\phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$, temos

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

Fazendo para y_2, y_3, \dots vamos perceber a relação

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h.$$

Vamos dar um exemplo de como resolver numericamente uma equação diferencial de primeira ordem com um valor inicial.

Exemplo 4.2 Seja a equação diferencial de primeira ordem

$$y' = 1 - x + 4y$$

de valor inicial

$$y(0) = 1$$

Já conhecemos a solução dessa equação diferencial pois é uma equação linear da qual já desenvolvemos a fórmula geral. A solução é

$$y = \phi(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{16} + \frac{19e^{4x}}{16}.$$

Vamos por exemplo calcular o valor de $\phi(0,2)$ pelo método de Euler com um incremento $h = 0,1$.

Temos $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 1 + 5 \cdot (0,1) = 1,5$. Assim,

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 1,5 + (6,9) \cdot (0,1) = 2,19.$$

Portanto, como $y_2 = \phi(x_2)$, temos que $\phi(x_2) = 2,19$. O valor de $\phi(x_2)$ na solução analítica é 2,51 o que provoca um erro de 0,32, que é aproximadamente 12 por cento de 2,51. \square

Esse erro normalmente não é aceito pois é um valor considerado muito alto. Talvez se h fosse um incremento menor o erro poderia ser reduzido.

4.2 Erros

Uma questão que temos que levar em conta é : se o incremento h tende para zero então y_n tende para $\phi(x_n)$? Essa questão é chamada convergência. Se a resposta é sim, outra questão que temos que levar em conta é : Qual é o tamanho necessário de h para que y_n tenda para $\phi(x_n)$ com a maior velocidade possível? Isso se deve ao fato de que não é somente diminuir o valor do incremento h que vai tornar o procedimento numérico melhor, pois para um valor de h desnecessariamente pequeno o algoritmo é retardado.

Temos duas fontes de erro para a resolução numérica de valor inicial. A primeira é o erro de truncamento acumulado E_n , que é a diferença entre

o valor aproximado pelo procedimento numérico é o valor exato, isto é ,
 $E_n = \phi(x_n) - y_n$.

A segunda é o erro de arredondamento do computador, R_n , já que a capacidade varia de cada computador. Assim, $R_n = y_n - Y_n$ onde Y_n é o valor arredondado dentro das capacidades do computador que estivermos usando.

O erro total do cálculo então é dado pela diferença

$$|\phi(x_n) - Y_n| = |\phi(x_n) - y_n + y_n - Y_n| \leq |\phi(x_n) - y_n| + |y_n - Y_n| = |E_n| + |R_n|$$

Ou seja, como $|\phi(x_n) - Y_n| \leq |E_n| + |R_n|$, temos que o erro total é limitado pela soma dos valores absolutos dos erros de truncamento acumulado e o erro de arredondamento .

Vamos chamar de erro de truncamento local o erro de truncamento em um passo do processo, considerando que a entrada é exata.

Desenvolvendo ϕ em série de Taylor em torno do ponto x_n vamos ter

$$\phi(x_n + h) = \phi(x_n) + \phi'(x_n)h + \frac{h^2}{2}\phi''(\bar{x}_n)$$

onde $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$.

Assim, temos que o erro local de truncamento da fórmula é

$$e_{n+1} = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2}\phi''(\bar{x}_n)$$

Logo, o erro de truncamento local é proporcional ao quadrado do incremento h para o método de Euler.

Suponha que para cada passo do método de Euler temos um erro de truncamento local máximo Mh^2 . Assim, nos n passos o erro de truncamento global é no máximo nMh^2 , ao passarmos de x_0 para x_n . Logo $nMh^2 = (x_n - x_0)Mh$. Assim, temos que o erro de truncamento global é proporcional ao incremento h . Por essa proporção é que o método de Euler é considerado um método de primeira ordem.

4.3 Método de Euler Aprimorado

O erro global e local de truncamento no método de Euler é proporcional a h e h^2 , respectivamente. Alguns problemas irão precisar de um método mais

preciso. Vamos aprimorar o método de Euler fazendo essas aproximações melhores.

Considere a expressão

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f[x, \phi(x)] dx$$

A fórmula do método de Euler é obtida substituindo $f[x, \phi(x)]$ por seu valor aproximado $f(x_n, y_n)$ na extremidade esquerda do intervalo de integração. Podemos melhorar essa aproximação substituindo o integrando pela média dos seus valores nas duas extremidades, isto é, substituir por

$$\frac{f[x_n, \phi(x_n)] + f[x_{n+1}, \phi(x_{n+1})]}{2}$$

Assim aproximado também os valores de $\phi(x_n)$ e $\phi(x_{n+1})$ por y_n e y_{n+1} , temos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f[x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)]}{2} h.$$

Essa fórmula é conhecida como fórmula aprimorada do método de Euler ou simplesmente fórmula de Heun. Ela é mais precisa que a fórmula do método de Euler, pois o erro de truncamento global é proporcional a h^2 e o local a h^3 .

Exemplo 4.3 Seja a mesma equação diferencial de primeira ordem dada no exemplo do método de Euler

$$y' = 1 - x + 4y$$

de valor inicial

$$y(0) = 1$$

Vamos por exemplo calcular o valor de $\phi(0, 2)$ pelo método de Euler aprimorado com um incremento $h = 0, 1$. Temos $f[x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)] = 1 - 0, 1 + 4[1 + (0, 1)5] = 6, 9$. Assim,

$$y_1 = 1 + (0, 5)(5 + 6, 9)(0, 1) = 1, 595.$$

Portanto, $f(x_1, y_1) = 1 - 0, 1 + 4(1, 595) = 7, 28$, temos que $y_1 + hf(x_1, y_1) = 2, 323$. O valor de $y_2 = 2, 4636$, que já é uma melhor aproximação da solução analítica 2, 51. \square

4.4 Método de Runge-Kutta

Vamos discutir sobre o método formulado pelos matemáticos alemães Carl David Runge (1856-1927) e Wilhelm Kutta (1867-1944).

Esse método é conhecido como método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem e quatro estágios. O erro de truncamento local desse método é proporcional a h^5 e num intervalo finito, o erro de truncamento acumulado é proporcional a h^4 . A fórmula desse método envolve a média ponderada de $f(x, y)$ tomados em diferentes pontos pertencentes ao intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ e é dada por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})$$

onde

$$k_{n1} = f(x_n, y_n)$$

$$k_{n2} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n1}\right)$$

$$k_{n3} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n2}\right)$$

$$k_{n4} = f(x_n + h, y_n + hk_{n3})$$

4.5 Métodos de Passos Múltiplos

O principal aspecto que diferencia essa classe de métodos numéricos de todos os outros métodos numéricos que já vimos é o fato de que os métodos que já vimos utilizam-se apenas do ponto x_n para determinar o ponto x_{n+1} . Nessa nova classe de métodos numéricos, a chamada classe dos métodos de passos múltiplos, para determinar o ponto x_{n+1} precisamos saber outros pontos além do x_n , como o x_{n-1} , x_{n-2} , etc.

Temos dois principais métodos nessa classe, que são o método de Adams e o método inverso de diferenciação.

4.5.1 Método de Adams

Já vimos que

$$\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \phi'(x) dx.$$

A idéia principal desse método é aproximar $\phi'(x)$ por um polinômio $P_k(x)$ de grau $k - 1$ e usar esse polinômio para determinar a integral na equação acima. O valor de k é a quantidade de pontos anteriores que já conhecemos. Os coeficientes são determinados por esses pontos. Se estivessemos querendo usar os pontos (x_n, y_n) e (x_{n-1}, y_{n-1}) teríamos um polinômio de primeiro grau, pois $k = 2$. Assim, $P_2(x)$ teria a forma $P_2(x) = Ax + B$. Como $P_2(x)$ é uma aproximação de $\phi'(x)$ temos

$$P_2(x_n) = Ax_n + B = f(x_n, y_n) = f_n$$

e

$$P_2(x_{n-1}) = Ax_{n-1} + B = f(x_{n-1}, y_{n-1}) = f_{n-1}.$$

Expondo os valores de A e B , temos

$$A = \frac{f_n - f_{n-1}}{h}$$

e

$$B = \frac{x_n f_{n-1} - f_n x_{n-1}}{h}.$$

Agora, substituindo na equação original e resolvendo a integral, temos

$$\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n) = \frac{A}{2}(t_{n+1}^2 - t_n^2) + B(t_{n+1} - t_n).$$

Substituindo $\phi(x_{n+1})$ e $\phi(x_n)$ por y_{n+1} e y_n , ficamos com

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2}hf_n - \frac{1}{2}hf_{n-1}.$$

Essa equação é conhecida como fórmula de Adams-Bashforth de segunda ordem. O erro de truncamento local é proporcional a h^3 . Observe também que a fórmula de Adams-Bashforth de primeira ordem é a própria fórmula de Euler. Fórmulas de Adams-Bashforth mais precisas podem ser obtidas usando polinômios de grau mais elevados, isto é, conhecendo mais pontos.

Se ao invés de usarmos os pontos (x_n, y_n) e (x_{n-1}, y_{n-1}) usássemos os pontos (x_n, y_n) e (x_{n+1}, y_{n+1}) , o polinômio no ponto (x_{n+1}, y_{n+1}) ficaria

$$P_2(x_{n+1}) = Ax_{n+1} + B = f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f_{n+1}.$$

Os coeficientes ficariam

$$A = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}$$

e

$$B = \frac{x_{n+1}f_n - f_{n+1}x_n}{h}.$$

Assim, a fórmula ficaria

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}hf_n + \frac{1}{2}hf_{n+1}.$$

Essa fórmula é conhecida como fórmula de Adams-Moulton de segunda ordem. Essa fórmula fornece o valor de y_{n+1} de maneira implícita e o erro de truncamento local é proporcional a h^3 .

Embora os erros de truncamento local das duas fórmulas serem proporcional a mesma potência de h , as fórmulas de Adams-Moulton de ordem moderada são bem mais precisas.

Vimos que os métodos de passos múltiplos necessitam de conhecermos os valores de alguns pontos. Para encontrarmos esses pontos usamos os métodos de passo único (Euler, Euler aprimorado, Runge-Kutta). Podemos também usar um método de passo múltiplo mas com baixa ordem e ir aumentando a ordem até que um número suficiente de pontos seja alcançado.

4.5.2 Fórmulas Inversas de Diferenciação

Nesse método de passo múltiplo, vamos usar um polinômio $P_k(x)$ para aproximar a solução $\phi(x)$ e não sua derivada, como fizemos no método de Adams. Depois dessa aproximação, diferenciamos o polinômio e igualamos $P'_k(x_{n+1}) = f_{n+1}$. Dessa maneira, obtemos uma fórmula implícita para achar y_{n+1} .

Vamos tomar, por exemplo, um polinômio de primeiro grau $P_1(x) = Ax + B$. Assim, temos

$$P_1(x_n) = Ax_n + B = y_n$$

e

$$P_1(x_{n+1}) = Ax_{n+1} + B = y_{n+1}.$$

Como $P_1'(x_{n+1}) = A$ temos

$$A = f_{n+1}.$$

A diferença entre as equações $Ax_n + B = y_n$ e $Ax_{n+1} + B = y_{n+1}$ nos dá o valor de $A = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$. Igualando os dois valores de A , temos

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}.$$

Usando polinômios de ordem mais elevada, podemos obter fórmulas inversas de diferenciação de ordem mais elevada. No caso de primeira ordem, o erro de truncamento local é proporcional a h^3 enquanto o erro da fórmula inversa de diferenciação de segunda ordem, por exemplo, é proporcional a h^5 .

4.6 Estabilidade

Já dissemos que no método de Euler, o erro de truncamento local é proporcional a h^2 e que num intervalo finito o erro de truncamento global ou acumulado é proporcional a h . De maneira geral, um método de ordem p tem erro de truncamento local proporcional a h^{p+1} e o erro global proporcional a h^p . A precisão do método cresce a medida que a ordem cresce. Mas o problema é que, para uma ordem muito grande, a fórmula para se calcular y_{n+1} se torna muito complicada. Dependendo de $f(x, y)$, isso pode ser um grande problema ou não. Se diminuirmos o tamanho do incremento h , diminuímos o erro de truncamento global, mas se h é demasiadamente pequeno, serão necessários muito passos para cobrir um intervalo pequeno e o erro de arredondamento global poderá ser maior que o erro de truncamento global. Assim, o valor ótimo de h é o valor que permite que o aumento do erro de truncamento seja compensado pela diminuição do erro de arredondamento.

O valor ótimo de h e do número de passos N irá depender da equação diferencial, do método utilizado, e do número de algarismos significativos a serem conservados. Mas em geral, se o número de passos aumentar muito os erros de arredondamento se acumularão de tal forma que os resultados não serão mais confiáveis. Esse é o motivo pelo qual o valor do incremento h deve variar, de acordo com o intervalo que estamos trabalhando.

O conceito de estabilidade está na possibilidade de pequenos erros introduzidos durante a execução de um método numérico tender a zero no final do processo. Caso contrário, ocorre a instabilidade, ou seja, se pequenos erros tenderem a aumentar no fim do processo. De maneira geral, a solução de um problema de valor inicial é assintoticamente estável quando as soluções inicialmente próximas da solução real tendem a se aproximar da solução dada e é instável se tendem a se afastar dela. Para evitar que instabilidades ocorram, pode ser necessário impor restrições ao valor de h .

Parciais

5 Equações Diferenciais Parciais

Neste capítulo vamos tratar de um importante método para resolver uma equação diferencial parcial (EDP), chamado método da separação de variáveis. A importância de se tratar de uma equação diferencial parcial é que ela é o resultado de muitos modelos matemáticos de problemas físicos, tais como a distribuição de temperatura, vibrações e potenciais.

Definição 5.1 Equações Lineares de Segunda Ordem

Uma equação diferencial parcial de segunda ordem linear em duas variáveis, digamos x e y é toda equação que pode ser escrita na forma

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G.$$

onde as funções de A até G são funções de x e y . Vale lembrar também que quando $G(x, y) = 0$ a equação é dita homogênea. Caso contrário é dita não-homogênea.

5.1 Método da Separação de variáveis

Esse método trata de encontrar uma solução particular na forma de um produto de duas funções, uma somente de x e outra somente de y . Assim, se $u(x, y)$ é uma solução da EDP então temos que $u(x, y) = X(x)Y(y)$, isto é, podemos reduzir uma EDP linear em duas variáveis a um produto de duas EDO.

Se $u(x, y) = X(x)Y(y)$ então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY' \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''.$$

Exemplo 5.2 Seja a EDP linear em duas variáveis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Substituindo $u(x, y)$ por $X(x)Y(y)$, temos

$$X''Y = 4XY'$$

que separando as variáveis, fica

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}.$$

Agora temos a seguinte situação: como cada membro da equação é dependente apenas de uma variável e essas variáveis são independentes uma da outra, a única solução aceita para essa situação é que essa equação seja uma constante K . Portanto,

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = K.$$

Veremos mais adiante que é conveniente escrever $k = \lambda^2$ ou $k = -\lambda^2$. Logo, temos

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = \lambda^2.$$

Assim, temos três casos a analisar:

Caso 1: $\lambda^2 > 0$

Temos então duas equações: $X'' - 4\lambda^2 X = 0$ e $Y' - \lambda^2 Y = 0$. Essas EDO's admitem as soluções $X = c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x$ e $Y = c_3 e^{\lambda^2 y}$. Portanto, uma solução particular da EDP é

$$u = XY = a_1 e^{\lambda^2 y} \cosh 2\lambda x + b_1 e^{\lambda^2 y} \sinh 2\lambda x.$$

Caso 2: $-\lambda^2 < 0$

Temos então duas equações: $X'' + 4\lambda^2 X = 0$ e $Y' + \lambda^2 Y = 0$. Essas EDO's admitem as soluções $X = c_1 \cos 2\lambda x + c_2 \sin 2\lambda x$ e $Y = c_3 e^{-\lambda^2 y}$. Portanto, uma solução particular da EDP é

$$u = XY = a_1 e^{-\lambda^2 y} \cos 2\lambda x + b_1 e^{-\lambda^2 y} \sin 2\lambda x.$$

Caso 3: $\lambda^2 = 0$

Temos então duas equações: $X'' = 0$ e $Y' = 0$. Essas EDO's admitem as soluções $X = c_1 x + c_2$ e $Y = c_3$. Portanto, uma solução particular da EDP é

$$u = XY = a_1 x + b_1.$$

□

Podemos estender para EDP o resultado já conhecido na EDO que se u_1, \dots, u_n são soluções particulares de uma EDP linear homogênea então

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i$$

também é uma solução, onde c_i é um escalar para todo $i = 1 \dots n$. Esse princípio é chamado de princípio da superposição.

Definição 5.3 Classificação de EDP de Segunda Ordem Linear em Duas Variáveis

Uma EDP linear de segunda ordem em duas variáveis, x e y ,

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = 0.$$

onde os coeficientes de A até F são constantes reais, é chamada de:

- Hiperbólica se $B^2 - 4AC > 0$
- Parabólica se $B^2 - 4AC = 0$
- Elíptica se $B^2 - 4AC < 0$

5.2 Equação do Calor

Nesta seção vamos considerar um problema de condução de calor em uma barra retilínea e de material homogêneo. O eixo x será o eixo da barra e L o comprimento da barra. Assim, as extremidades da barra são $x = 0$ e $x = L$. A barra está completamente isolada, isto é, não há troca de calor de nenhuma maneira. A temperatura u de qualquer ponto da barra depende do comprimento x e do tempo t , ou seja, u é uma função de x e t , a saber $u(x, t)$.

A variação de temperatura ao longo da barra é governada pela equação da condução do calor que é dada por

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

onde $0 < x < L$, $t > 0$. O parâmetro α^2 é a difusividade térmica e é definida por

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho s}$$

onde k é a condutividade térmica, ρ é a densidade e s o calor específico. Assim a determinação de α^2 depende exclusivamente do material que é feito a barra. Vale a pena dizer que a unidade de α^2 é (comprimento)²/tempo.

Vamos admitir também que a temperatura inicial da barra seja dada por uma função $f(x)$, pois ela depende apenas do comprimento e não do tempo. Assim, temos que no tempo $t = 0$, $u(x, 0) = f(x)$. Também vamos supor as temperaturas nas extremidades fixas nulas, isto é, quando $x = 0$ ou $x = L$ temos $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$ em qualquer tempo.

As condições iniciais $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$ são chamadas de valores de contorno. Isto se deve ao fato de que queremos saber como se comporta a função $u(x, t)$ dentro de um intervalo $0 < x < L$ onde sabemos seus valores nos extremos. Assim, queremos determinar $u(x, t)$ que satisfaça a equação do calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

com as condições de contorno acima e de valor inicial $f(x)$.

Como a equação do calor é linear de segunda ordem, podemos aplicar o método da separação de variáveis. Assim, se $u(x, t) = X(x)T(t)$, temos

$$\alpha^2 X'' T = X T' \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\sigma$$

que gera as equações $X'' + \sigma X = 0$ e $T' + \alpha^2 \sigma T = 0$.

Para resolver a equação $X'' + \sigma X = 0$, já vimos que se $\sigma = 0$ a solução da equação é $X(x) = k_1 x + k_2$. Como $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ temos que $X(0) = 0$. Da mesma forma, temos que $X(L) = 0$. Assim, não existe nenhuma solução não trivial quando $\sigma = 0$, pois as condições de contorno forçam o resultado $X(x) = 0$ para todo $0 < x < L$.

Se $\sigma < 0$ substituímos $\sigma = -\lambda^2$, com $\lambda > 0$. Assim, a equação fica $X'' - \lambda^2 X = 0$, cuja solução já sabemos ser $X(x) = k_1 \cosh(\lambda x) + k_2 \sinh(\lambda x)$. Da mesma maneira, pelas condições de contorno, fazendo as substituições devidas chegamos a conclusão de que também não existe solução não trivial quando $\sigma < 0$.

Se $\sigma > 0$ substituímos $\sigma = \lambda^2$, com $\lambda > 0$. Assim, a equação fica $X'' + \lambda^2 X = 0$, cuja solução já sabemos ser $X(x) = k_1 \cos(\lambda x) + k_2 \sin(\lambda x)$. Da mesma maneira, pelas condições de contorno, fazendo as substituições devidas chegamos a conclusão que $k_2 \sin(\lambda L) = 0$. Se $k_2 = 0$ também chegamos a solução trivial. Portanto, a outra maneira de satisfazer a equação

é $\text{sen}(\lambda L) = 0$. Assim chegamos a conclusão de que $\lambda L = n\pi$ com $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lambda = n\pi/L$ o que faz com que

$$\sigma = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Os valores de σ para os quais existem soluções não triviais são os autovalores do problema $X'' + \sigma X = 0$ de valor de contorno $X(0) = X(L) = 0$. As soluções não triviais correspondentes $X(x)$ proporcionais a $\text{sen}(n\pi x/L)$ são as autofunções.

Substituindo o valor de σ na outra equação, temos

$$T' + (n^2\pi^2\alpha^2/L^2)T = 0.$$

Assim, chegamos a conclusão de que $T(t)$ é proporcional a $e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}$. Assim, concluímos que

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \text{sen}(n\pi x/L) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

obedece à equação diferencial parcial e cumpre as condições de contorno e são chamadas de soluções fundamentais do problema.

Pelo princípio da superposição, temos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m c_n u_n = \sum_{n=1}^m c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

onde os coeficientes c_n ainda são indeterminados e m é um inteiro positivo.

A determinação dos valores dos coeficientes c_n vai depender da forma que a equação de valor inicial $f(x)$. Se

$$f(x) = \sum_{i=1}^m b_i \text{sen}(i\pi x/L)$$

é possível cumprir a condição inicial mediante uma soma finita na forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Caso contrário, devemos ampliar o conceito de superposição para uma série infinita, isto é, se u_1, \dots, u_n, \dots são infinitas soluções particulares de uma EDP linear homogênea então

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$$

também é uma solução, onde c_i é um escalar para todo $i = 1 \dots \infty$. Assim,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Vamos admitir que essa série seja convergente. Pelas condições iniciais, temos que ter

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

Suponha que seja possível exprimir $f(x)$ como uma série infinita de termos em seno. Assim, teríamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Se pudermos determinar os coeficientes b_n é só fazer $c_n = b_n$ que temos resolvida por separação de variáveis a equação do calor. Assim ficam duas questões a serem analisadas. A primeira é como podemos identificar as funções de valor inicial $f(x)$ que podem ser escritas como uma série infinita de senos. A outra é, sabendo que $f(x)$ pode ser escrita como uma série infinita de senos, como calcular os coeficientes b_n .

5.3 Séries de Fourier

Definição 5.4 Séries de Fourier

Suponha que possamos exprimir $f(x)$ como uma série infinita de senos. No conjunto de pontos em que a série for convergente ela define uma função onde o valor em cada ponto é a série calculada nesse ponto. Dizemos então que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right)$$

é a série de Fourier da função $f(x)$.

Uma função f é periódica de período $T > 0$ se $x + T$ pertence ao domínio de f sempre que x pertencer e $f(x + T) = f(x)$. Se $T > 0$ for o período da função f então todo múltiplo inteiro de T é um período de f , sendo que o

menor valor de $T > 0$ para o qual a função é periódica é chamado período fundamental de f .

Se f e g são duas funções periódicas então o produto fg e qualquer combinação linear $c_1f + c_2g$ são também periódicos com período T . Assim, a soma finita de funções de período T e a soma de uma série infinita convergente constituídas de funções de período T são também periódicas de período T .

Definição 5.5 Produto Interno

O produto interno padrão (u, v) de duas funções reais u e v no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ é definido por

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx.$$

As funções u e v são ortogonais se o produto interno delas for nulo. Um conjunto de funções é ortogonal se qualquer par de funções do conjunto for ortogonal.

Pode-se verificar que as funções $\text{sen}(m\pi x/L)$ e $\text{cos}(m\pi x/L)$ constituem um conjunto de funções ortogonal com $m = 1, 2, \dots$ no intervalo $-L \leq x \leq L$.

Seja agora

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \text{cos} \frac{m\pi x}{L} + b_m \text{sen} \frac{m\pi x}{L} \right).$$

Suponha que a série converge, que f seja periódica com período $2L$ e integrável no intervalo $-L \leq x \leq L$. Multiplicando a equação acima por $\text{cos}(n\pi x/L)$ onde n é fixo positivo e integramos em relação a x no intervalo $-L \leq x \leq L$. É fácil ver que, em razão da ortogonalidade, o único termo não nulo é aquele em que $m = n$. Assim, chegamos a expressão

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{cos} \frac{n\pi x}{L} dx$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$

Expressão para o cálculo de b_n pode ser obtida se ao invés de multiplicar a equação por $\text{cos}(n\pi x/L)$ multiplicarmos por $\text{sen}(n\pi x/L)$. A expressão fica

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

onde $n = 1, 2, \dots$

Essas equações para determinar os coeficientes a_n e b_n são conhecidas como as fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier.

5.4 Teorema de Fourier

Definição 5.6 Seccionalmente Contínua

Uma função $f(x)$ é seccionalmente contínua em um intervalo $a \leq x \leq b$ se esse intervalo de definição da função puder ser dividido por um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de modo que

- f seja contínua em cada intervalo $x_{i-1} < x < x_i$
- f tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo quando essas extremidades forem aproximadas por dentro do intervalo.

A notação $f(c+)$ e $f(c-)$ indica o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow c$ pela direita e pela esquerda, respectivamente.

Teorema de Fourier: Suponha que f e f' sejam seccionalmente contínuas no intervalo $-L \leq x < L$. Suponha também que f é definida fora do intervalo $-L \leq x \leq L$ de modo a ser periódica com período $2L$. Então f tem a série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right)$$

cujos coeficientes são dados pelas fórmulas de Euler-Fourier. A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f for contínua e para

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

em todos os pontos onde f for descontínua.

Podemos dizer também que a série de Fourier converge para $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ em todos os pontos. A prova desse teorema é muito difícil e não está no onjetivo dessa monografia.

Vamos ver agora algumas funções em que as fórmulas de Euler-Fourier podem ser simplificadas, que são as funções pares e as funções ímpares.

Definição 5.7 Função Par e Ímpar

Uma função $f(x)$ é par quando $f(-x) = f(x)$ e é ímpar quando $f(-x) = -f(x)$ para qualquer x do domínio de f .

Algumas propriedades dessas funções são interessantes:

- A soma (diferença) e o produto (quociente) de duas funções pares é par
- A soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar
- O produto (quociente) de duas funções ímpares é par
- A soma (diferença) de duas funções uma par e outra ímpar nem é par e nem é ímpar
- O produto (quociente) de duas funções uma par e outra ímpar é ímpar
- Se f é par então $\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx$
- Se f é ímpar então $\int_{-L}^L f(x)dx = 0$

Suponhamos que f e f' sejam seccionalmente contínuas sobre $-L \leq x < L$ e que f seja periódica par de período $2L$. Assim, pelas propriedades acima, temos que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é par e $f(x)\sen(n\pi x/L)$ é ímpar. Também temos que os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e $b_n = 0$ para todo n . Então f tem a série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Assim, a série de Fourier de uma função par é sempre uma série constituída por funções pares $\cos(n\pi x/L)$ e pelo termo constante. Ela é conhecida como série de cossenos de Fourier.

Suponhamos que f e f' sejam seccionalmente contínuas sobre $-L \leq x < L$ e que f seja periódica ímpar de período $2L$. Assim, pelas propriedades acima, temos que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é ímpar e $f(x)\sen(n\pi x/L)$ é par. Também temos que os coeficientes de Fourier são dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\sen\frac{n\pi x}{L}dx \quad n = 1, 2, \dots$$

e $a_n = 0$ para todo n . Então f tem a série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Assim, a série de Fourier de uma função ímpar é sempre uma série constituída por funções ímpares $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$. Ela é conhecida como série de senos de Fourier.

Exemplo 5.8

Determine a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante de uma barra de metal de 50 cm de comprimento, com superfície lateral isolada, que inicialmente está com uma temperatura uniforme de 20°C e a temperatura nas extremidades é 0°C em todo tempo.

Temos que $L = 50$, $f(x) = 20$ para todo x no intervalo $(0, 50)$. Portanto, de acordo com a solução encontrada para a equação do calor, temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/2500} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{50}.$$

Determinando os coeficientes, temos

$$b_n = \frac{4}{5} \int_0^{50} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{50} dx = \frac{40}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

Assim, $b_n = \frac{80}{n\pi}$ quando n for ímpar e $b_n = 0$ quando n for par. Substituindo os valores de b_n , temos

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/2500} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{50}.$$

□

5.5 Equação da Onda

Vamos estudar agora uma equação que faz a análise matemática dos fenômenos de propagação de ondas em um meio contínuo. Apesar de essa equação servir como modelo de qualquer onda, como por exemplo eletromagnética, acústica,

da água, vamos basear nosso estudo das vibrações mecânicas, simplesmente por ser mais fácil de visualizar.

Suponha uma corda elástica, de comprimento L , esteja fortemente esticada no nível horizontal. Suponha o eixo x coincidindo com a corda. Suponha também a corda vibrando num plano vertical. Seja $u(x, t)$ o deslocamento vertical em relação ao eixo x no ponto x e no tempo t . Assim, temos que $u(x, t)$ obedece a equação diferencial parcial

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Essa equação é chamada de equação da onda.

O coeficiente a^2 é dado por

$$a^2 = \frac{T}{\rho}$$

onde T é a tensão na corda e ρ é a densidade do material que é feito a corda. Dessa maneira, a tem como unidade de medida comprimento por tempo, isto é, a indica a velocidade de propagação das ondas na corda.

Como a corda está presa nas extremidades, temos que as condições de contorno da corda estão indicadas por $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Como a equação é de segunda ordem em relação a t , as variáveis de estado são duas e teremos que ter duas equações de condições iniciais, a saber, uma para a posição inicial e outra para a velocidade inicial de cada ponto do eixo x no instante $t = 0$. Assim, $u(x, 0) = f(x)$ indicando a posição inicial e $u_t(x, 0) = g(x)$ indicando a velocidade inicial, onde f e g são funções conhecidas.

Também temos que ter $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$, pois nas extremidades a posição e a velocidade inicial são nulas.

5.5.1 Onda Com Velocidade Inicial Nula

Suponha que a corda tenha velocidade inicial nula, isto é, $g(x) = 0$ para todo x . Para conseguir a solução da equação da onda, podemos usar o método da separação de variáveis. Assim, temos que $u(x, t) = X(x)T(t)$. O que nos leva a concluir

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\sigma$$

onde σ é uma constante. Assim, temos duas equações ordinárias de segunda ordem, que são

$$X'' + \sigma X = 0 \quad e \quad T'' + a^2 \sigma T = 0.$$

Vamos encontrar os possíveis valores de σ pelas condições de contorno. Como é exatamente a mesma equação da condução de calor, temos que

$$\sigma = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Lembramos também que as soluções correspondentes para $X(x)$ são proporcionais a $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$. Temos também, pela substituição de σ na equação do tempo que $T(t)$ é uma combinação linear de $\text{sen}(n\pi at/L)$ e $\text{cos}(n\pi at/L)$. Assim, as funções

$$u_n(x, t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi at}{L}$$

e

$$v_n(x, t) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{cos} \frac{n\pi at}{L}$$

para todo n natural, satisfazem a equação da onda e as condições de contorno. Essas equações $u_n(x, t)$ e $v_n(x, t)$ são as soluções fundamentais do problema.

Pelo princípio da superposição, temos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} (c_n \text{sen} \frac{n\pi at}{L} + k_n \text{cos} \frac{n\pi at}{L})$$

onde c_n e k_n são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

Assim, se $u(x, 0) = f(x)$, então

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

o que implica que k_n são coeficientes de uma série de senos de Fourier para f de período $2L$, dados por

$$k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Vamos admitir que podemos derivar a equação

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} (c_n \text{sen} \frac{n\pi at}{L} + k_n \text{cos} \frac{n\pi at}{L}).$$

em relação a t . Assim, considerando $u(x, 0) = 0$, temos que

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = 0.$$

Portanto, os coeficientes $c_n \frac{n\pi a}{L}$ deverão ser os coeficientes de uma série de Fourier de uma função identicamente nula, o que significa, pelas fórmulas de Euler-Fourier, que $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, a solução da equação da onda com as condições de contorno nulas e valor inicial $f(x)$ com velocidade inicial nula é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L}$$

onde

$$k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

5.5.2 Solução Geral da Onda

Suponha agora o problema geral da equação da onda, ou seja, que a condição inicial da velocidade é $g(x)$. Assim, a única equação que se altera é

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = g(x)$$

Assim, os coeficientes da equação acima $\frac{n\pi a}{L} c_n$ são os coeficientes da série de senos de Fourier para g com o período $2L$. Portanto,

$$\frac{n\pi a}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, a equação

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{L} + k_n \cos \frac{n\pi at}{L} \right).$$

com os coeficientes

$$k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

e

$$\frac{n\pi a}{L}c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

constitui a solução formal da equação da onda com condições de contorno nulas e condições iniciais $f(x)$ e $g(x)$.

5.6 Equação de Laplace

A equação de Laplace é uma equação que tem a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Em um problema de três dimensões tem a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Por exemplo, se o problema é a condução do calor em uma chapa, o problema é de duas dimensões e a temperatura $u(x, y, t)$ deve obedecer a equação do calor

$$\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Supondo que a função u seja invariante no tempo, a sua derivada no tempo se anula e a equação do calor se torna a equação de Laplace em duas dimensões. Se o problema fosse a distribuição de calor em um sólido, no estado permanente, isto é, invariante no tempo, a equação do calor se transforma na equação de Laplace em três dimensões. Assim, a equação de Laplace tem uma grande variedade de aplicações na matemática. A função da energia potencial de uma partícula no vácuo, sob a ação apenas das forças gravitacionais, obedece a equação de Laplace. Por isso que, em muitas ocasiões, a equação de Laplace recebe o nome também de equação do potencial.

Como a equação de Laplace não depende do tempo, não existe condições iniciais para um problema modelado por ela. No entanto precisamos de um número de condições de contorno. Lembramos que na condução do calor e na onda foi preciso duas condições de contorno. Isso se deve ao fato de que tínhamos duas fronteiras que delimitavam a região em que queríamos conhecer a solução. De maneira análoga, o número de condições de contorno

necessárias para a equação de Laplace será o número de fronteiras da região em que vamos determinar a solução.

Dois casos que podemos determinar os valores de contorno são no caso em que especificamos os valores da função em cada ponto da fronteira e no caso em que especificamos os valores da derivada normal sobre a fronteira. No primeiro caso, o problema para determinar a solução de Laplace é chamado de problema de Dirichlet. No segundo, é chamado de problema de Neumann.

Exemplo 5.9 Vamos verificar agora um problema de Dirichlet no retângulo. Queremos encontrar uma função que satisfaça a equação de Laplace em um retângulo de dimensões a e b . Os valores de contorno que vamos considerar aqui são $u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = 0$ e $u(a, y) = f(y)$ onde $x \in (0, a)$ e $y \in [0, b]$.

Vamos admitir que $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Substituindo na equação, temos

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma.$$

Obtemos duas equações ordinárias

$$X - \sigma X = 0$$

e

$$Y'' + \sigma Y = 0.$$

Substituindo as condições de contorno homogêneas, temos que os valores encontrados são $X(0) = 0$, $Y(0) = 0$ e $Y(b) = 0$. O problema $Y'' + \sigma Y = 0$ com as condições de contorno $Y(0) = 0$ e $Y(b) = 0$ tem como solução, que já foi apresentada anteriormente, igual a

$$\sigma = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

com $n \in \mathbb{N}$.

As soluções de $Y(y)$ são proporcionais a

$$\text{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Substituindo os valores de σ e dos valores de contorno, concluímos que $X(x)$ deve ser proporcional a

$$\text{senh} \frac{n\pi x}{b}.$$

Assim as soluções fundamentais são

$$u_n(x, y) = \text{senh} \frac{n\pi x}{b} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Fazendo o princípio da superposição, temos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Fazendo a condição de contorno restante, $u(a, y) = f(y)$, temos

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = f(y).$$

Assim, os coeficientes $c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b}$ serão os coeficientes de uma série de senos de Fourier para f com período $2b$. Portanto,

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy.$$

Assim, a equação

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

é a solução geral da equação de Laplace com as condições de contorno acima ditas, onde c_n é dado por

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy.$$

□

Exemplo 5.10 Considere agora o problema de Dirichlet em um círculo de raio $r < a$. A condição de contorno é $u(a, \theta) = f(\theta)$, onde $\theta \in [0, 2\pi)$. Em coordenadas polares, temos a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Para $u(r, \theta)$ ser unívoca, temos que ter u periódica em θ com período 2π . Também devemos ter $u(r, \theta)$ limitada quando $r \leq a$, pois será importante adiante.

Fazendo a separação de variáveis, temos

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Fazendo a substituição na equação, temos

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0.$$

Surge então por manipulação algébrica a equação

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \sigma.$$

Assim, conseguimos as duas equações diferenciais ordinárias

$$r^2 R'' + rR' - \sigma R = 0$$

e

$$\Theta'' + \sigma\Theta = 0.$$

Vamos considerar os três casos, com $\sigma < 0$, $\sigma = 0$ ou $\sigma > 0$.

Se $\sigma < 0$, temos $\sigma = -\lambda^2$, com $\lambda > 0$. A equação se torna $\Theta - \lambda^2\Theta = 0$. Assim, a solução geral é

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\lambda\theta} + c_2 e^{-\lambda\theta}.$$

Portanto, só será periódica se $c_1 = c_2 = 0$, o que implica que σ não pode ser negativo.

Se $\sigma = 0$, temos

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta.$$

Só será periódica se $c_2 = 0$ e $\Theta(\theta)$ seria uma constante. Além disso, $r^2 R'' + rR' = 0$. Essa equação é chamada de Equação de Euler e tem solução $R(r) = k_1 + k_2 \ln r$. Assim, o termo com o logaritmo não é aceito já que quando r tender para 0 a função $u(r, \theta)$ tem que ser limitada. Isso implica que $k_2 = 0$. Assim, a solução com $\sigma = 0$ é $u(r, \theta) = 1$.

Se $\sigma > 0$, temos $\sigma = \lambda^2$, com $\lambda > 0$. A equação se torna $\Theta'' + \lambda^2\Theta = 0$ e $r^2 R'' + rR' - \lambda^2 r = 0$. Assim, a solução geral é

$$\Theta(\theta) = c_1 \text{sen}(\lambda\theta) + c_2 \text{cos}(-\lambda\theta).$$

e

$$R(r) = k_1 r^\lambda + k_2 r^{-\lambda}.$$

Para Θ ser periódica de período 2π , é necessário que $\lambda \in \mathbb{N}$ ou $\lambda = 0$. Assim, a solução $r^{-\lambda}$ fica ilimitada quando $r \rightarrow 0$, o que implica que $k_2 = 0$. Temos então como solução

$$u_n(r, \theta) = r^n \text{cos}(n\theta)$$

e

$$v_n(r, \theta) = r^n \text{sen}(n\theta)$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Juntamente com a solução $u(r, \theta) = 1$ as soluções acima formam o conjunto de soluções fundamentais do problema.

Assim,

$$u(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{senn}\theta).$$

Pela condição de contorno, temos

$$u(a, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{senn}\theta) = f(\theta).$$

A função $f(\theta)$ tem período 2π e portanto uma série de Fourier na forma acima. Vamos encontrar os coeficientes de Fourier pela integração sobre o período da função de zero até 2π . Assim, temos

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

e

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{senn}\theta d\theta$$

com n inteiro não negativo na primeira equação e n natural na segunda equação. □ Parciais

6 Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais

Neste capítulo vamos tratar de resolver equações diferenciais parciais por métodos numéricos. A importância disso, como já dissemos na introdução desta monografia, é que uma quantidade muito grande de problemas são modelados matematicamente por equações diferenciais parciais, mas de difícil solução analítica. Daí a importância dos métodos numéricos para esse tipo de equação. O método que vamos tratar neste capítulo é o método das diferenças finitas.

6.1 Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas consiste basicamente em aproximar as equações diferenciais parciais por quocientes de diferenças. Vamos mostrar aqui como utilizar esse método para as equações de Onda, Calor e de Laplace.

Primeiramente vamos falar da expansão em Série de Taylor. Seja uma função $u(x, t)$. A expansão de Taylor em segunda ordem é

$$u(x+h, t+k) = u + h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + hk \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(|h|^3 + |k|^3).$$

Fazendo a expansão em primeira ordem, temos

$$u(x+h, t+k) = u(x, t) + h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial t} + O(|h|^2 + |k|^2).$$

Fazendo $k = 0$ e depois $h = 0$, temos respectivamente

$$u_x(x, t) = \frac{1}{h} [u(x+h, t) - u(x, t)] + O(|h|)$$

e

$$u_t(x, t) = \frac{1}{k} [u(x, t+k) - u(x, t)] + O(|k|)$$

onde

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Essas derivadas primeiras são chamadas de diferenças avançadas. Podemos ter também

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2h} [u(x + h, t) - u(x - h, t)] + O(|h|^2)$$

e

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2k} [u(x, t + k) - u(x, t - k)] + O(|k|^2).$$

Essas últimas são chamadas de diferenças centradas.

Seja o plano (x, t) . Considere nesse plano os pontos da forma $x = mh$ e $t = nk$, com $n, m \in \mathbb{Z}$. Seja também uma função discreta $u_{m,n}$ definida nesses pontos. Queremos encontrar equações de diferenças finitas para a função $u_{m,n}$ que sejam aproximações de $u(x, t)$. Surgem então as mesmas duas questões básicas ditas no capítulo 4, nos métodos numéricos para EDO. A primeira questão é a de convergência, ou seja, $u_{m,n} \rightarrow u(mh, nk)$ quando $h, k \rightarrow 0$? A segunda é sobre estabilidade, isto é, os arredondamentos e os erros de cálculo se acumulam a ponto de distorcer um cálculo futuro em uma margem de erro inaceitável?

6.2 Método das Diferenças Finitas na Equação da Onda

Seja a equação da onda $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Este caso particular é chamado problema de Cauchy. Sejam as condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x)$.

Se fizermos uma aproximação em segunda ordem para u_{tt} e u_{xx} , temos

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{h^2} [u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)] + O(|h|^2)$$

e

$$u_{tt}(x, t) = \frac{1}{k^2} [u(x, t + k) - 2u(x, t) + u(x, t - k)] + O(|k|^2).$$

Assim, uma aproximação de diferenças finitas é obtida substituindo as equações acima na equação da onda original do problema de Cauchy. Logo, temos

$$\frac{1}{k^2} [u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}] - \frac{1}{h^2} [u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}] = 0.$$

A equação acima nos dá a seguinte relação de recorrência:

$$u_{m,n+1} = 2u_{m,n} + \frac{k^2}{h^2}[u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}] - u_{m,n-1}.$$

Portanto, temos que a equação acima nos dá a solução aproximada no tempo $t = (n + 1)k$ em função dos valores da equação conhecidos em dois tempos anteriores.

É possível de ser visto que quando $h = k \rightarrow 0$ a solução do problema aproximado converge para solução do problema original e também que o erro na aproximação é de segunda ordem. Temos também que, quando $\frac{k}{h} \leq 1$ o esquema converge e é estável. Quando $\frac{k}{h} > 1$ o esquema é instável.