

1\$ OSNOVE MEHANIKE FLUIDA

1\$.1 UVOD

Kada su brzine strujanja fluida u fluidnom polju mnogo manje od brzine zvuka $V < a$, odnosno kada je Machov broj manji od jedinice ($Ma \leq 1$) strujanje se moglo smatrati nestlačivim. U velikom broju primjena, posebno u zrakoplovstvu, promjene tlaka fluida su znatne pa se promjena gustoće mora uzeti u obzir. Primjeri takvih primjena su: strujanje zraka oko aeroprofila s velikim podzvučnim brzinama, strujanje ispušnih plinova iz konusa mlaznog motora, strujanje ulja u elektrohidrauličkim sustavima za upravljanje pokretnim površinama, strujanje oko Pitot statičke cijevi i drugi. Strujanje s velikim promjenama tlaka uzrokuje i promjenu temperature te dolazi do izmjene toplinske energije. Zato je potrebno uzeti u obzir i ostale fundamentalne zakone: prvi i drugi zakon termodinamike, jednadžbu stanja kao i relevantne osobine fluida (stlačivost, toplinska provodljivost, specifične topline, unutarnja energija, entalpija, entropija) čija promjena nije bila značajna kod strujanja s malim brzinama (nestlačiv fluid).

Opći slučaj trodimenzionalnog strujanja viskoznog fluida je kompleksan i izvan okvira ovog teksta. Ovdje je proučeno osnovno neviskozno jednodimenzionalno i dvodimenzionalno strujanje relevantno primjenama strujanja oko aeroprofila i unutar kanala. Fluid koji struji ima osobine savršenog plina, tj. plina kod koga se mogu zanemariti sile međumolekularnog djelovanja. To se događa ako su molekule plina na dovoljnom međusobnom odstojanju, većem od deset promjera molekule. Istovremeno odstojanje između molekula, zapravo odstojanje između dva uzastopna sudara, mora biti malo u poređenju s karakterističnom dimenzijom objekta oko koga se promatra strujanje (npr. tetiva aeroprofila) da se ne ugrozi temeljna pretpostavka o kontinuiranosti fluida. Zrak kao osnovni fluid aerodinamike može se smatrati savršenim plinom ako temperatura nije velika.

1\$.2 JEDNADŽBA STANJA

Jednadžba stanja je odraz termodinamičke ravnoteže između pojedinih veličina stanja (osobina) fluida u stanju mirovanja ili gibanja čestice. Za savršen fluid jednadžba stanja ima oblik

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} \quad (1$.2.1)$$

gdje su: p – tlak izražavan u apsolutnim jedinicama N/m^2 ; T – temperatura izražavana u stupnjevima kelvina; R – plinska konstanta čija vrijednost zavisi od prirode plina. Za zrak plinska konstanta ima vrijednost

$$R = 287,053 \text{ N}\cdot\text{m/kg}\cdot\text{K} \quad (1$.2.2)$$

Alternativno ako se koristi specifični obujam $v = 1/\rho$, jednadžba (1\$.2.1) ima oblik

$$p \cdot v = R \cdot T \quad (1$.2.3)$$

U SI sustavu jedinica specifični obujam se izražava u m^3/kg . Sve veličine u jednadžbama (1\$.2.1) i (1\$.2.3) su statičke vrijednosti dobivene od promatrača koji se giba brzinom fluida.

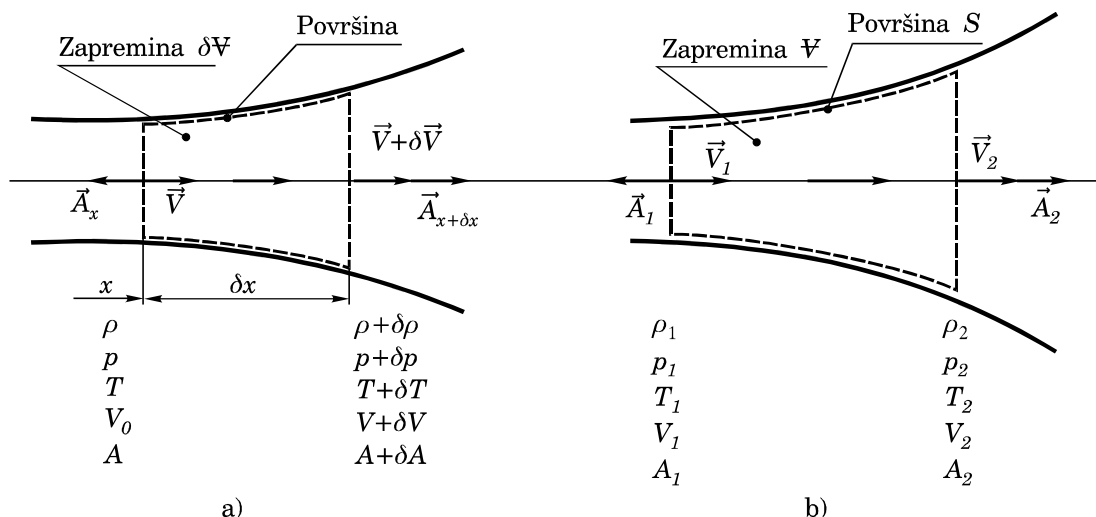
1\$.3 JEDNADŽBA KONTINUITETA

Jednadžba kontinuiteta je posljedica primjene zakona o održanju mase na masu fluida unutar granične površine S . Granična površina S se definira kao zamišljena površina fiksna u

polju fluida koja obuhvaća zapreminu V i kroz koju može proticati fluid. U općem slučaju jednačba kontinuiteta napisana u integralnom obliku se piše kao (xxxxx)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV + \int_S \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1\$3.1)$$

gdje prvi član označava brzinu promjene mase fluida u promatranoj zapremini V , a drugi ukupni maseni protok fluida koji prolazi kroz površinu S . Jednačba (1\\$3.1) se može primjeniti na beskonačno malu zapreminu dV i konačnu zapreminu V strujne cijevi (slika 1\\$3.1.)



Slika 1\\$3.1. Zapremina strujne cijevi
a) beskonačno mala δV
b) konačna V

Za stacionarno uniformno strujanje fluida primjena jednačbe (1\\$3.1) na zapreminu dV daje

$$0 - (\rho \cdot V \cdot A) + (\rho + d\rho) \cdot (V + dV) \cdot (A + dA) = 0 \quad (1\$3.2)$$

Poslije množenja i zanemarivanja članova višeg reda (ε^2) dobiva se

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (1\$3.3)$$

Jednačba (1\\$3.3) naziva se diferencijalnom jednačbom kontinuiteta za stacionarno jednodimenzionalno strujanje stlačivog fluida. Primjena jednačbe (1\\$3.1) na konačnu zapreminu daje

$$0 - \rho_1 \cdot V_1 \cdot A_1 + \rho_2 \cdot V_2 \cdot A_2 = 0 \quad (1\$3.4)$$

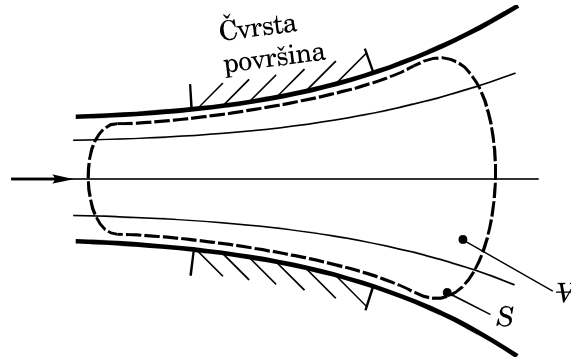
ili pošto je maseni protok definiran kao $\dot{m} = \rho \cdot V \cdot A$ jednačba (1\\$3.4) može se pisati i kao

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot V_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot A_2 = \text{const.} \quad (1\$3.5)$$

Jednačba (1\\$3.5) naziva se integralnom jednačbom kontinuiteta za stacionarno, jednodimenzionalno strujanje stlačivog fluida.

1§.4 JEDNADŽBA PROMJENE KOLIČINE GIBANJA

Jednadžba promjene količine gibanja ili osnovna jednadžba dinamike fluida dobiva se primjenom drugog Newtonovog zakona na masu fluida unutar zamišljene površine S , fiksne u prostoru fluidnog polja koja obuhvaća zapreminu V . Na slici 1§.4.1. je pokazana površina S koja obuhvaća zapreminu V . Površina S je u općem slučaju takva da jednim dijelom presjeca strujne linije, drugim tangira granične površine fluidnog polja, a može i sjeći čvrstu konturu.



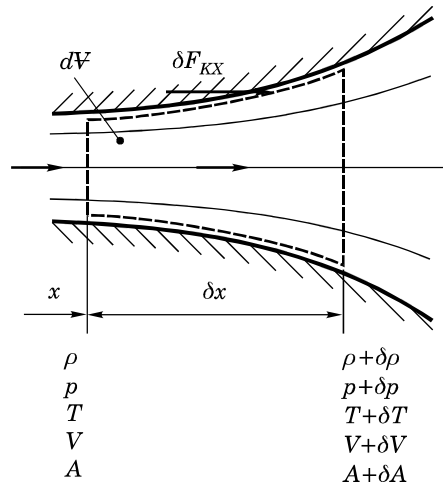
Slika 1§.4.1. Zamišljena površina S obuhvaća promatranu fluidnu masu

Jednadžba promjene količine gibanja u integralnom obliku je prema (xxxxx)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot \vec{V} \cdot dV + \int_S \vec{V} \cdot \rho \cdot (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = \int_V \rho \cdot \vec{b} \cdot dV + \int_S \tau \cdot d\vec{S} \quad (1§.4.1)$$

Prvi član s lijeve strane označava brzinu promjene količine gibanja mase unutar površine S . Ako je strujanje stacionarno, ovaj član jednak je nuli. Drugi član predstavlja promjenu količine gibanja uslijed promjene brzine fluida pri prolasku kroz površinu S . Prvi član s desne strane označava rezultantu vanjskih sila kada su iste definirane po jedinici mase s $\vec{b}$ (gravitacija, elektromagnetske). Posljednji integral u jednadžbi (1§.4.1) označava površinske sile, sile kojima okolina preko površine S djeluje na promatranu masu unutar površine S .

Neka se sada jednadžba (1§.4.1) primjeni na beskonačno malu zapreminu dV kao dijela strujne cijevi shematski prikazane na slici 1§.4.2.



Slika 1§.4.2. Sile na elementarnu zapreminu

Pod pretpostavkama: stacionarno strujanje, jednodimenzionalno, zanemarive vanjske masene sile $\vec{b} = 0$ i neviskozno strujanje, jednačba (1\$.4.1) može se napisati

$$\begin{aligned} 0 + (V + dV) \cdot (\rho + d\rho) \cdot (A + dA) \cdot (V + dV) - V \cdot \rho \cdot A \cdot V = \\ = p \cdot A - (p + dp) \cdot (A + dA) + \left(p + \frac{dp}{2} \right) \cdot dA \end{aligned} \quad (1$.4.2)$$

Lijeva strana jednačbe (1\$.4.2) predstavlja brzinu promjene količine gibanja, a desna djelovanje površinskih sila. Sila kojom kontura djeluje na fluid unutar površine data je s $(p + dp/2) \cdot dA$ gdje $(p + dp/2)$ predstavlja srednju vrijednost tlaka, a dA povećanje površine u promatranom pravcu gibanja. Korištenjem jednačbe kontinuiteta (1\$.3.2) jednačba (1\$.4.2) se može pisati

$$V \cdot \rho \cdot A \cdot (V + dV) - V \cdot \rho \cdot A \cdot V = p \cdot A - (p \cdot A + p \cdot dA + A \cdot dp + dp \cdot dA) - p \cdot dA - \frac{dp \cdot dA}{2}$$

ili poslije sređivanja i zanemarivanja malih članova višeg reda (ε^2) dobiva se

$$-\rho \cdot V \cdot dV = dp \quad (1$.4.3)$$

ili u obliku

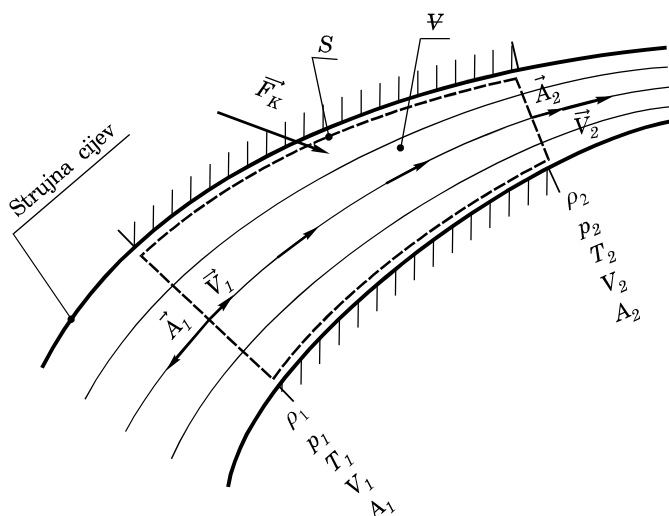
$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad (1$.4.4)$$

S obzirom na pretpostavke, jednačba (1\$.4.2) predstavlja diferencijalnu jednačbu promjene količine gibanja za stacionarno, jednodimenzionalno gibanje stlačivog i neviskoznog fluida u polju sa zanemarivim vanjskim silama.

Ako se jednačba (1\$.4.1) primjeni na konačan obujam kao na slici 1\$.4.3 dobiva se

$$\dot{m}_2 \cdot \vec{V}_2 - \dot{m}_1 \cdot \vec{V}_1 = -p_1 \cdot \vec{A}_1 - p_2 \cdot \vec{A}_2 + \vec{F}_K \quad (1$.4.5)$$

gdje $\dot{m}$ označava maseni protok u odgovarajućem presjeku, a $\vec{F}_K$ silu kojom čvrsta kontura djeluje na fluid preko dijela površine S koji se poklapa sa čvrstom konturom.



Slika 1\$.4.3. Sile na konačnu zapreminu

U slučaju kada su ulazni presjek i brzina, te izlazni presjek i brzina paralelni (promatrano vektorski) vektorska jednažba (1\$.4.5) može se zamijeniti skalarnom

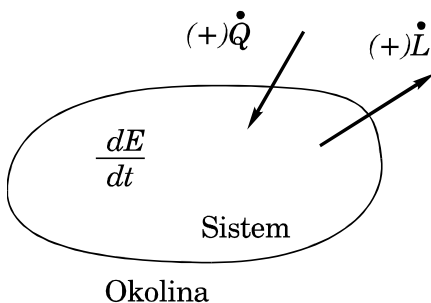
$$\dot{m}_2 \cdot V_2 - \dot{m}_1 \cdot A_1 = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 + F_K \quad (1$.4.6)$$

1\$.5 JEDNADŽBA ENERGIJE

Jednažba energije je posljedica primjene (prvog zakona termodinamike) zakona o održanju energije. U formulaciji podjele sistem – okolina zakon o održanju energije ima oblik

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{sist.} = \dot{Q} - \dot{L} \quad (1$.5.1)$$

gdje E označava ukupnu energiju sistema, $\dot{Q}$ razmijenjenu toplinsku energiju (dovođenje sistemu je pozitivno) i $\dot{L}$ razmijenjeni rad (rad nad okolinom je pozitivan). Na slici 1\$.5.1. prikazana je shema sistem – okolina.



Slika 1\$.5.1. Shema sistem – okolina za formulaciju prvog zakona termodinamike

U promatranim problemima aerodinamike ukupnu energiju čini zbir od unutarnje, kinetičke i geopotencijalne energije koje se za jedinicu mase može izraziti kao

$$e = u + \frac{V^2}{2} + g \cdot z. \quad (1$.5.2)$$

Kada se zakon o održanju energije primjeni na masu fluida unutar zamišljene površine S , fiksne u prostoru fluidnog polja i koja obuhvaća zapreminu V dobiva se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V e \cdot \rho \cdot dV + \int_S \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S} = \dot{Q} - \dot{L}_p - \dot{L}_s - \dot{L}_\tau \quad (1$.5.3)$$

Prvi član s lijeve strane predstavlja brzinu promjene energije mase fluida unutar površine S . Drugi član je neto donos energije kroz površinu S po jedinici vremena. Član $\dot{Q}$ je toplinska energija koja se po jedinici vremena dovodi masi unutar S . Član $\dot{L}_p = \int_S p \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S}$ označava rad po jedinici vremena protiv sile tlaka na konturi S . Ovaj član postoji samo na dijelu konture gdje je $\vec{V} \cdot d\vec{S} \neq 0$ (dakle na protočnim površinama). Direktna razmjena rada (preko nekog vratila – pumpa ili elektromagnetnih sila) data je članom $\dot{L}_s$. Član $\dot{L}_\tau$ označava razmjenu energije po

jedinici vremena nastale kao posljedica rada tangencijalnih sila na površinu S , $\dot{L}_\tau = -\int_S \vec{\tau} \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S}$. Ako se površina S učini takvom da je $\vec{\tau} \cdot \vec{V} = 0$ (međusobno okomiti vektori $\vec{\tau}$ i $\vec{V}$ ili $V = 0$ kao na čvrstoj konturi), taj član jednak je nuli.

Kod stacionarnog strujanja, neviskoznog fluida, bez razmjene toplinske energije i direktne razmjene rada jednadžba energije u integralnom obliku može se prepisati kao

$$\int_S \left(u + p \cdot v + \frac{V^2}{2} + g \cdot z \right) \cdot \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1\$5.4)$$

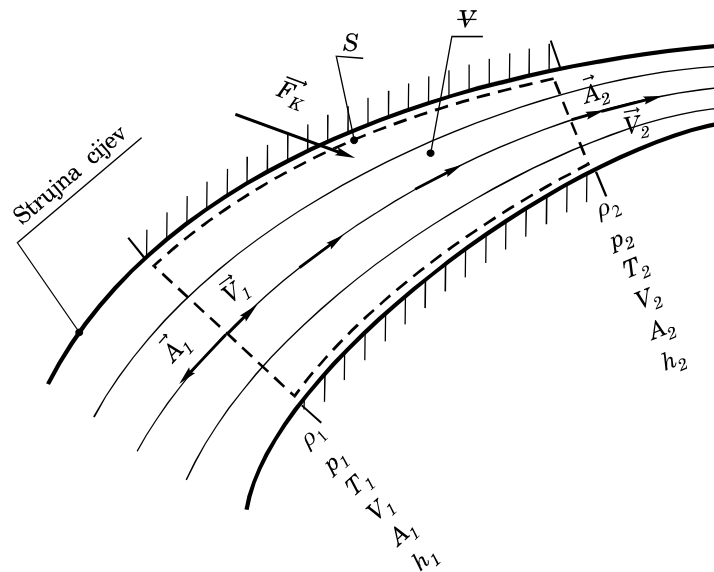
ili uz korištenje definicije entalpije $h = u + p \cdot v$

$$\int_S \left(h + \frac{V^2}{2} + g \cdot z \right) \cdot \rho \cdot (\vec{V} \cdot d\vec{S}) = 0 \quad (1\$5.5)$$

U velikom broju primjera doprinos promjene geodetske potencijalne energije $g \cdot \Delta z$ je zanemariv u odnosu na ostale članove.

Primjena jednadžbe (1\\$5.4) na beskonačno malu zapreminu kao na slici 1\\$5.2. daje

$$-\left(u + p \cdot v + \frac{V^2}{2} \right) + \left[u + du + (p + dp) \cdot (v + dv) + \frac{(V + dV)^2}{2} \right] = 0$$



Slika 1\\$5.2. Promjena energije unutar beskonačno male zapremine

Poslije sređivanja i zanemarivanja malih veličina drugog reda ($\varepsilon^2 \approx dp \cdot dv$) dobiva se

$$-du - p \cdot dv - v \cdot dp - V \cdot dV = 0 \quad (1\$5.6)$$

ili

$$du + d(p \cdot v) + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad (1\$5.7)$$

odnosno, s obzirom na definiciju entalpije

$$dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad (1\$5.8)$$

Jednadžba (1\\$5.7) ili u alternativnom obliku (1\\$5.8) naziva se jednadžbom energije u diferencijalnom obliku. Vrijedi za stacionarno, jednodimenzionalno gibanje neviskoznog stlačivog fluida u polju zanemarive gravitacije bez razmjene topline i rada.

Kada se jednadžba (1\\$5.5) primjeni na konačnu zapreminu jednodimenzionalne strujne cijevi dobiva se

$$-\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right) \cdot \rho_1 \cdot V_1 \cdot S_1 + \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) \cdot \rho_2 \cdot V_2 \cdot S_2 = 0 \quad (1\$5.9)$$

ili uz primjenu jednadžbe kontinuiteta (1\\$3.5) dobiva se

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (1\$5.10)$$

koja vrijedi pod istim pretpostavkama kao i jednadžba (1\\$5.8).

1\\$6 DRUGI ZAKON TERMODINAMIKE

Drugi zakon termodinamike formulira se pomoću osobine stanja koja se naziva entropija i označava se sa s i izražava u N·m/kg·K. Procesi strujanja fluida mogu biti samo takvi da je ukupna promjena entropije veća ili jednaka nuli, tj.

$$ds \geq 0 \quad (1\$6.1)$$

Ukupna promjena entropije jednaka je nuli kod reverzibilnih procesa. Za reverzibilnu razmjenu topline po sistemu, promjena entropije računa se iz

$$ds = \frac{dq}{T} \quad (1\$6.2)$$

Prema prvom zakonu termodinamike kod reverzibilnih procesa $dq = du + p \cdot dv$, tako da se promjena entropije dobiva iz

$$ds = \frac{du + p \cdot dv}{T} \quad (1\$6.3)$$

Za adijabatski i reverzibilni proces (izentropski proces) $ds = 0$, pa se dobiva

$$du = -p \cdot dv. \quad (1\$6.4)$$

Za savršen plin prema (xxxxx)

$$du = c_v \cdot dT = \frac{R}{\kappa - 1} \cdot dT = \frac{d(R \cdot T)}{\kappa - 1}. \quad (1\$6.5)$$

S obzirom da je iz jednadžbe stanja (1\$.2.3) $p \cdot v = R \cdot T$, jednadžba (1\$.6.4) daje

$$\kappa \frac{dv}{v} = - \frac{dp}{p} \quad (1\$6.6)$$

ili poslije integracije

$$p \cdot v^\kappa = \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const} \quad (1\$6.7)$$

Dakle, kod izentropske promjene stanja postoji jednostavna ovisnost tlaka i gustoće. Ako se koristi jednadžba stanja mogu se napisati i ekvivalentne međuovisnosti

$$\frac{T^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{p} = \text{const} \quad (1\$6.8)$$

i

$$T \cdot v^{(\kappa-1)} = \text{const} \quad (1\$6.9)$$

Promjena entropije mase fluida kod promjene stanja od 1 do 2 može se izračunati prema (1\$.6.3)

$$s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln \left\{ \left[\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{\kappa-1} \right] \cdot \frac{T_2}{T_1} \right\} \quad (1\$6.10)$$

ili na ekvivalentan način

$$s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln \left\{ \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\kappa \right] \cdot \frac{p_2}{p_1} \right\} \quad (1\$6.11)$$

Ako se drugi zakon termodinamike primjeni na masu fluida unutar granične površine S dobiva se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V s \cdot \rho \cdot dV + \int_S s \cdot \rho \cdot \vec{V} \cdot d\vec{S} \geq \int_S \frac{1}{T} \cdot \frac{Q}{S} \cdot dS \quad (1\$6.12)$$

Da se provjeri valjanost integralne jednadžbe mora se poznavati vrijednost toplotnog fluksa ($J/(m^2 \cdot s)$) na svakoj točki površine S kao i lokalna temperatura T .

Za reverzibilni, stacionarni i adijabatski proces unutar strujne cijevi konačne zapremine jednadžba (1\$.6.12) daje

$$s_1 \cdot [-\rho_1 \cdot V_1 \cdot S_1] + s_2 \cdot [\rho_2 \cdot V_2 \cdot S_2] = 0 \quad (1\$6.13)$$

Zato što je maseni protok prema jednadžbi kontinuiteta konstantan $\rho_1 \cdot V_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot S_2$, slijedi

$$s_1 = s_2.$$

Entropija za izentropski proces ostaje konstantna. U slučaju neizentropskog procesa kao što je strujanje kroz udarni val $s_2 > s_1$.

prof. dr. sc. Petar Kesić
mr. sc. Davor Franjković