4. ECUACIONES DIFERENCIALES

Cuando se estudian sistemas dinámicos, pequeños cambios en una variable inducen cambios en las demás; analizar este comportamiento cambiante implica resolver ecuaciones que involucran derivadas. Ejemplos de ello son los sistemas masa-resorte, análisis de circuitos eléctricos, flujos de materiales, etc. Como definición, podemos decir que aquellas expresiones matemáticas que involucran funciones y sus derivadas se denominan ecuaciones diferenciales (ED).

La solución a una ED lo conforman un conjunto de funciones, por lo tanto para poder dar una solución particular a un problema se debe disponer de unas ciertas condiciones iniciales.

CLASIFICACIÓN:

- ***Por el número de variables:*** Si la ecuación involucra una sola variable se denomina EDO (Ecuación Diferencial Ordinaria) y si involucra varias variables se denomina Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales (EDP).
- ***Por el orden de derivación:*** Si la ecuación incluye sólo primeras derivadas se denomina De primer Orden. Si involucra segundas derivadas se denomina de segundo orden y así sucesivamente. Las ecuaciones de segundo orden se pueden transformar en de primer orden haciendo sustitución de variables definiendo $y=dx/dy$ y reemplazando en la ecuación original.
- ***Por el tipo de función:*** dependiendo de la función involucrada en la ecuación, pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias LINEALES o NO LINEALES, la mayoría de estas últimas carecen de solución analítica y esta es una de las razones por la que los métodos numéricos son importantes en su resolución.

EJEMPLOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejemplo1: un cuerpo en caída libre. Según la ley de Newton a = F/m donde (m= masa, a=Aceleración y F es la fuerza a la que se somete el cuerpo que cae). Sabemos que la derivada de la aceleración es la velocidad, por lo tanto: $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{Fg - Fr}{m} = \frac{m * g - cv}{m}$, donde *Fr* es la fuerza debida al rozamiento y *Fg* es la fuerza debida a la aceleración de la gravedad.

A la variable ***v*** se le llama variable dependiente y a la variable ***t*** se le denomina variable independiente.

Analíticamente podemos resolver esta ecuación, pues se trata de una ecuación homogénea, cuya solución es entonces:

Ejemplo2: El carbono 11 es un radioisótopo tiene una constante de desintegración $\lambda = 0.0346 \text{ min}^{-1}$, (equivalente a $\lambda = 0.02067 \text{ S}^{-1}$). La densidad de número atómico inicial en t=0 es *No* átomos/cm³. Plantee la EDO para la densidad de número atómico (*N(t)*).

Sea *N(t)* la densidad de número atómico en el tiempo *t* segundos. Una fracción de tiempo posterior denotada por *dt* la densidad sería $\boldsymbol{N(t + dt) = N(t) - \lambda N(t)dt}$. (lo que había menos lo que se desintegró en el instante *dt*). Esto puede rescribirse como: $\boldsymbol{N(t + dt) - N(t) = - \lambda N(t)dt}$. El término de la izquierda es la variación en el número atómico que se puede representar como dN por lo tanto:

$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$ con la condición inicial $N(0) = No$, densidad de número atómico en t=0.
Esta ecuación se puede resolver analíticamente, reagrupando términos y luego integrando, se obtiene: $\frac{dN(t)}{N(t)} = -\lambda dt$ integrando este resultado con respecto a N(t) y a t obtenemos: $\int_{No}^{N(t)} \frac{dN(t)}{N(t)} = \int_0^t -\lambda dt \Rightarrow Ln(N(t))\Big|_{No}^{N(t)} = -\lambda t\Big|_0^t \Rightarrow Ln(N(t)) - Ln(No) = -\lambda t$ usando propiedades de los logaritmos podemos llegar a: $Ln(\frac{N(t)}{No}) = -\lambda t$ para poder despejar N(t) aplicamos la función exponencial a ambos lados y obtenemos: $e^{Ln(\frac{N(t)}{No})} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N(t)}{No} = e^{-\lambda t}$ de donde despejamos N(t) para obtener: $N(t) = e^{-\lambda t} No$.

Ejemplo 3: un paracaidista de masa M salta desde un avión. Suponga que la velocidad inicial del paracaidista es cero en el instante inicial y que la caída es vertical y que la resistencia del aire se calcula como $\mathbf{C}\boldsymbol{v}^2$ donde $\boldsymbol{v}$ es la velocidad de caída (positiva hacia abajo).

Según la segunda ley de Newton se satisface el equilibrio de fuerzas, por lo tanto: $F = m\cdot a$. Las fuerzas que intervienen son la fuerza debida a la resistencia del aire ($\mathbf{C}\boldsymbol{v}^2$) y la fuerza debida a la gravedad (***mg***). Considerando la aceleración como la derivada de la velocidad podemos plantear: $m\frac{dv(t)}{dt} = -Cv^2 + mg$, reagrupando términos y despejando se tiene: $\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{C}{m}v^2 + g$, con $v(0)=0$ como condición inicial.

E.D.O. DE PRIMER ORDEN

Su forma general es:

$$\boxed{y'(t) = f(y,t);\quad \textit{Sujeta a:}\ y(Xo) = Yo;\ y(X_1) = ?}$$

Donde $f(y,t)$ es función de $\boldsymbol{y}$ y de $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{y(0)}$ es el valor de la condición inicial, el cual se conoce. La Solución de esta ecuación es una función que pasa por el punto (Xo, Yo), que si la conociéramos la podríamos usar para evaluarla en el punto X_1, pero lo cual por lo general no es factible y se debe usar algún método numérico para aproximar su solución a partir de la condición inicial.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

La solución de una EDO es una función específica de una variable independiente y de parámetros que satisfacen la ecuación diferencial original. Se tienen, básicamente, dos tipos de problemas:

Problemas de valor inicial: conocemos las condiciones en el punto de partida.

Problemas de valor en la frontera: las condiciones se extienden ente los puntos inicial y final.

Cuando se analizan EDO en el dominio del tiempo son todos problemas de valor inicial ya que las condiciones se dan en el instante t=0.

Método analítico:

Integral indefinida, donde aparece la constante de integración C que nos indica que la solución no es única. Por lo tanto toda EDO está acompañada de condiciones auxiliares (valor inicial) usadas para determinar el valor de C y así asegurar una solución única.

Hay dos tipos de problemas a resolver por medio de EDO, dependiendo de cómo se especifican las condiciones en los puntos extremos del intervalo de análisis (dominio):
Métodos numéricos:

Entre los más comunes están los **Métodos de un paso**, entre ellos el de Euler (hacia delante, Modificado y hacia atrás) y los métodos de Runge – Kutta. Los dos primeros son sencillos de aplicar pero su exactitud no es muy buena.

MÉTODOS DE EULER:

El nuevo valor se calcula como:

Nuevo valor = Valor anterior + pendiente (ϕ) * tamaño del paso (h), donde la pendiente (ϕ) se aproxima como el valor de la ecuación diferencial en el paso anterior.

$$\boxed{Y_{i+1} = Y_i + \phi h = Y_i + f(x_i, y_i) * h}$$

El valor de ***h*** se calcula así: $h = \dfrac{X1 - X0}{N}$,

METODO DE EULER HACIA DELANTE:

Usa la aproximación de diferencia así: $\dfrac{(y_{n+1} - y_n)}{h} = y'_n$ de donde $y_{n+1} = y_n + hy'_n$ pudiendo expresar $y'_n = f(y,t)$. Por lo tanto repetitivamente se puede calcular y_{n+1}.

$y_1 = y_0 + h\, y'_0 = y_0 + hf(y_0, t_0)$
$y_2 = y_1 + h\, y'_1 = y_1 + hf(y_1, t_1)$ y en general:

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + h\, y'_{n-1} = y_{n-1} + h\, f(y_{n-1}, t_{n-1})}$$

El proceso se repite para diferentes valores de h hasta que se logre obtener el nivel de tolerancia de error definido. El criterio de convergencia (CC) a utilizar es:

$CC = \left| \dfrac{Y_N - Y_{N-1}}{Y_N} \right| \leq Tol$ **,** siendo Y_N el valor obtenido para ***h*** cuando se cambia el valor de N y ***Tol*** el valor máximo de error basado en el concepto de cifras significativas (ND) o decimales significativos (CS), siendo ***Tol = 5*10^-(CS+1)*** ó ***Tol = 5*10^-(ND+1).***

Ejemplo: Resolvamos la ecuación del *ejemplo 3* por este método, suponiendo que el paracaidista tiene masa M = 70 Kg, l el coeficiente de rozamiento del aire (C) es de 0.27 Kg/m. Use un incremento h = 0.1. Halle la velocidad para tiempos menores a 20 segundos. Usando MatLab:

La siguiente función escrita en MatLab resuelve problemas de EDO por medio del método de Euler.

```
function Euler
clc;
clear all;
fprintf('E. D. O. USANDO EL METODO DE EULER\n\n');
Xo=input('Límite inferior del intervalo a evaluar    : ');
X1=input('Límite superior del intervalo a evaluar    : ');
Yo=input('Valor en el limite inferior (y(xo))        : ');
ND=input('Cuantos decimales o cifras significativas : ');
Tol=5*10^(-(ND+1))
N=2;
sol(1)=Yo;
while 1
  h=(X1 - Xo)/N;
  X = Xo:h:X1;
  Y(1)=Yo;
  for i=2:length(X)
    Y(i)=Y(i-1)+h*funcion(X(i-1),Y(i-1));
  end
  sol(N)=Y(length(X));
  error = abs((sol(N)-sol(N-1))/sol(N));
  if error <= Tol
    fprintf('\nSolucion hallada: %15.7f\n',sol(N));
    fprintf('Con              : %5.0f, iteraciones.\n',N);
    fprintf('Error máximo de : %10.2e.\n',Tol);
    break;
  end
  N=N+1;
end
plot(sol);

function dxdy=funcion(x,y);
dxdy = x.*(1+2.*y);
```

MEJORAS AL MÉTODO DE EULER:

Tiene la ventaje de ser más exacto y más estable que el anterior. Se deduce aplicando la regla del trapecio para resolver *y' = f(y,x)*. Por lo tanto:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(y_{n+1}, t_{n+1}) + f(y_n, t_n)\right]$$

Cuando f es función lineal de y se resuelve para y_{n+1} en forma cerrada. Si f es una función no lineal de y la ecuación anterior se convierte en una función no lineal de y_{n+1} por lo que debemos aplicar algún algoritmo para resolver la ecuación no lineal. Se usa mucho el método de sustituciones sucesivas que se escribe así:

$$y_{n+1}{}^{k} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(y_{n+1}{}^{(k-1)}, t_{n+1}) + f(y_n, t_n)\right]$$

Donde $y_{n+1}{}^{(k)}$ es la k-ésima aproximación iteractiva para y_{n+1} y $y_{n+1}{}^{(0)}$ es la estimación inicial.

MÉTODOS DE RUNGE KUTA:

Estos Métodos logran mejor exactitud que los métodos anteriores. En forma general se expresan como:

$$\boxed{y_{i+1} = yi + \phi(xi, yi, h)h \text{ , } (4.1)}$$

donde $\phi(xi, yi, h)h$ es la *función incremento*, que se interpreta como la pendiente sobre el intervalo en donde se va a analizar la función, la cual se puede expresar en forma general como:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + ... + a_nk_n$$

Siendo a_i valores constantes y k_i calculada así:

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}K_1h)$$

$$K_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}K_1h + q_{22}K_2h)$$

.

.

.

$$K_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}K_1h + q_{n-1,2}K_2h + ... + q_{n-1,n-1}K_{n-1}h)$$

MÉTODOS DE RUNGE KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

Se obtiene cuando n=2 en la ecuación (4.1), por lo tanto:

$$\boxed{y_{i+1} = yi + (a_1k_1 + a_2k_2)h \text{ , donde } K_1 = f(x_i, y_i) \text{ y } K_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}K_1h) \;\; \mathbf{(4.2)}}$$

Expandiendo las anteriores ecuaciones por series de Taylor se logra determinar los valores de a_1, p_1 y q_{11}. Con ello se logra obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_1 + a_2 = 1 & \\ a_1p_1 = \frac{1}{2} & \\ a_2q_{11} = \frac{1}{2} & \qquad \mathbf{(4.3)} \end{array}}$$

Este sistema tiene más incógnitas que ecuaciones por lo tanto tiene múltiples soluciones. Si suponemos un valor particular para alguna de estas variables, podemos resolver el sistema. Tomando $a_2 = \frac{1}{2}$, se obtienen tres de las variantes más conocidas del método de Runge Kutta de segundo orden: el método de ***Heun***, el método del ***punto medio*** y el método de ***Ralston***.

MÉTODO DE HEUN:

Si tomamos a_2= ½ y resolvemos el sistema de ecuaciones (4.3) obtenemos: a_1 = ½, p_1=q_{11} = 1, con lo cual se obtiene:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = f(xi, yi) \text{ y } K_2 = f(xi + h, yi + K_1 h) \qquad \textbf{(4.4)}$$

El término K_1 predice un valor y el término K_2 lo corrige. A estos métodos se les denomina también: *métodos Predictor – Corrector*.

Ejemplo 4: Evaluar la ecuación diferencial: y'(x) = $-2X^3 + 12X^2 -20X + 8{,}5$, en el intervalo [0, 4], con la condición inicial *y(0) = 2*. Con un valor de h = 0.5.

Usando la hoja electrónica obtenemos los siguientes resultados:

i	Xi	Yi	Yi+1	K1	K2
0	0	1	3.4375	8.5	1.25
1	0.5	3.4375	3.375	1.25	-1.5
2	1	3.375	2.6875	-1.5	-1.25
3	1.5	2.6875	2.5	-1.25	0.5
4	2	2.5	3.1875	0.5	2.25
5	2.5	3.1875	4.375	2.25	2.5
6	3	4.375	4.9375	2.5	-0.25
7	3.5	4.9375	3	-0.25	-7.5
8	4	**3**	-4.0625	-7.5	-20.75

Ejemplo 5: Evaluar la ecuación diferencial:

Y = 4*exp(0.8X) - 0.5 Y; Y(0)=2; Y(4) = ?

h= 1

i	Xi	Yi	Yi+1	K1	K2
0	0	1	6.07608186	3.5	6.65216371
1	1	6.07608186	15.9291569	5.86412279	13.8420274
2	2	15.9291569	36.9551083	11.8475512	30.2043514
3	3	36.9551083	83.1851794	25.6151514	66.844991
4	4	**83.1851794**	185.719567	56.5375311	148.531245

METODO DEL PUNTO MEDIO:

Si tomamos a_2= 1 y resolvemos el sistema de ecuaciones (4.3) obtenemos: a_1 = 0, p_1=q_{11} = 1/2, y al resolver el sistema (4.3) se obtiene:

$$y_{n+1} = y_n + hK_2 \,,$$

$$K_1 = f(xi, yi) \text{ y } K_2 = f(xi + \frac{1}{2}h, yi + \frac{1}{2}K_1 h) \qquad \textbf{(4.5)}$$

Se le denomina también método del polígono mejorado. Es también un método predictor - corrector. En este caso se usa el método de Euler para predecir el valor en la mitad del intervalo y con base en él se halla el valor de la pendiente en la mitad del intervalo.

Ejemplo 6: Evaluar la ecuación diferencial: $y'(x) = -2X^3 + 12X^2 - 20X + 8{,}5$, en el intervalo [0, 4], con la condición inicial *y(0) = 2*. Con un valor de h = 0.5.

Usando la hoja electrónica obtenemos los siguientes resultados:

i	Xi	Yi	Yi+1	K1	K2
0	0	**1.000000**	3.109375	8.5	4.21875
1	0.5	**3.109375**	2.8125	1.25	-0.59375
2	1	**2.812500**	1.984375	-1.5	-1.65625
3	1.5	**1.984375**	1.75	-1.25	-0.46875
4	2	**1.750000**	2.484375	0.5	1.46875
5	2.5	**2.484375**	3.8125	2.25	2.65625
6	3	**3.812500**	4.609375	2.5	1.59375
7	3.5	**4.609375**	3	-0.25	-3.21875
8	4	**3.000000**	-3.640625	-7.5	-13.28125

Ejemplo 7: Evaluar la ecuación diferencial: **Y = 4*exp(0.8X) - 0.5Y**; sujeta a: **Y(0)=1** para hallar el valor: Y(4) = ? Con un valor de **h=1**, usando la hoja electrónica obtenemos:

i	Xi	Yi	Yi+1	K1	K2
0	0	**1.000000**	5.59229879	3.5	4.59229879
1	1	**5.592299**	14.5501135	6.10601432	8.95781472
2	2	**14.550114**	33.6970129	12.5370729	19.1468994
3	3	**33.697013**	75.8160438	27.2441991	42.1190309
4	4	**75.816044**	169.245435	60.2220989	93.4293912

METODO DE RALSTON

Tomando a_2= 2/3, Ralston y Rabinowits lograron obtener un límite mínimo en el error de truncamiento en los algoritmos de RK de orden 2. Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.3) se obtiene: a_1 = 1/3, $p_1 = q_{11}$ = 3/4, valores que al ser reemplazados en (4.2) permiten obtener:

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{3}K_1 + \frac{2}{3}K_2),$$

$$K_1 = f(xi, yi) \text{ y } K_2 = f(xi + \frac{3}{4}h, yi + \frac{3}{4}K_1 h) \qquad \textbf{(4.5)}$$

Ejemplo 8: Evaluar la ecuación diferencial: y'(x) = $-2X^3 + 12X^2 - 20X + 8{,}5$, en el intervalo [0, 4], con la condición inicial *y(0) = 2*. Con un valor de h = 0.5. usando la Hoja electrónica se obtuvieron los siguientes resultados.

i	Xi	Yi	Yi+1	K1	K2
0	0	**1**	3,27734375	8,5	2,58203125
1	0,5	**3,27734375**	3,1015625	1,25	-1,15234375
2	1	**3,1015625**	2,34765625	-1,5	-1,51171875
3	1,5	**2,34765625**	2,140625	-1,25	0,00390625
4	2	**2,140625**	2,85546875	0,5	1,89453125
5	2,5	**2,85546875**	4,1171875	2,25	2,66015625
6	3	**4,1171875**	4,80078125	2,5	0,80078125
7	3,5	**4,80078125**	3,03125	-0,25	-5,18359375
8	4	**3,03125**	-3,81640625	-7,5	-16,7929688

Ejemplo 8: Evaluar la ecuación diferencial: **Y = 4*exp(0.8X) - 0.5Y**; sujeta a: **Y(0)=2** para hallar el valor: Y(4) = ? Con un valor de **h=1**, usando la hoja electrónica obtenemos:

i	Xi	Yi	Yi+1	K1	K2
0	0	**1**	5,817316801	3,5	5,475975202
1	1	**5,817316801**	15,19153656	5,993505313	11,06457697
2	2	**15,19153656**	35,21242382	12,21636142	23,92315019
3	3	**35,21242382**	79,24358881	26,48649361	52,80350068
4	4	**79,24358881**	176,9079117	58,50832638	117,2423212

MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE CUARTO ORDEN

Es el más utilizado. Al igual que el método de segundo orden, hay múltiples versiones dependiendo del valor elegido para las constantes. La forma más usada es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)\,, \quad \textbf{(4.6)}$$

$$K_1 = f(xi, yi)$$

$$K_2 = f(xi + \frac{1}{2}h, yi + \frac{1}{2}K_1 h)$$

$$K_3 = f(xi + \frac{1}{2}h, yi + \frac{1}{2}K_2 h)$$

$$K_4 = f(xi + h, yi + K_3 h)$$

Si la EDO a resolver el sólo función de x, el método de RK clásico de cuarto orden es similar a la regla de Simpson 1/3 para integración. Cada una de las Ki representa una pendiente, de modo que la ecuación (4.6) representa el promedio ponderado de las pendientes.

Ejemplo 9: Evaluar la ecuación diferencial: $y'(x) = -2X^3 + 12X^2 - 20X + 8,5$, en el intervalo [0, 4], con la condición inicial $y(0) = 2$. Con un valor de h = 0.5.

Usando la hoja electrónica obtenemos los siguientes resultados:

i	Xi	Yi	Yi+1	K1	K2	K3	K4
0	0	**1**	3,21875	8,5	4,21875	4,21875	1,25
1	0,5	**3,21875**	3	1,25	-0,59375	-0,59375	-1,5
2	1	**3**	2,21875	-1,5	-1,65625	-1,65625	-1,25
3	1,5	**2,21875**	2	-1,25	-0,46875	-0,46875	0,5
4	2	**2**	2,71875	0,5	1,46875	1,46875	2,25
5	2,5	**2,71875**	4	2,25	2,65625	2,65625	2,5
6	3	**4**	4,71875	2,5	1,59375	1,59375	-0,25
7	3,5	**4,71875**	3	-0,25	-3,21875	-3,21875	-7,5
8	4	**3**	-3,78125	-7,5	-13,28125	-13,28125	-20,75

Ejemplo 10: Evaluar la ecuación diferencial: **Y = 4*exp(0.8X) - 0.5Y**; sujeta a: **Y(0)=2** para hallar el valor: Y(4) = ? Con un valor de **h=1**, usando la hoja electrónica obtenemos:

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En muchos problemas de ingeniería es necesario resolver no una sino varias ecuaciones a la vez. En forma general estos sistemas se pueden representar como:

$y'_1 = f(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$y'_2 = f(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n)$
.
.
.
$y'_n = f(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Para poder hallar una solución se requiere que se conozca la condición inicial para cada una de las ***n*** ecuaciones.

MÉTODO DE EULER:

El procedimiento a seguir es evaluar cada ecuación según el método de Euler normal para cada ecuación.