

Clase # 23

Análisis de redes (2) Modelo de las tres estimaciones

23-1

Las estimaciones de tiempo hasta ahora se han supuesto exactas.



En realidad la duración de una actividad puede ser una variable aleatoria con alguna distribución de probabilidad.

PERT utiliza tres estimaciones para la duración de una actividad, lo que le permite calcular la probabilidad de terminar a tiempo

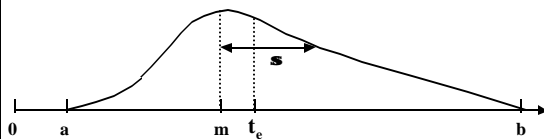
23-2

Distribución Beta

Tiempo más probable $\rightarrow m$

Tiempo optimista $\rightarrow a$

Tiempo pesimista $\rightarrow b$



23-3

Se hacen dos suposiciones para convertir m , a y b , en estimaciones del valor esperado t_e y la varianza s^2 del tiempo que requiere la actividad.

Suposición 1.

La dispersión entre a y b es 6 desviaciones estándar, es decir $6s = a - b$



$$s^2 = [1/6 (b - a)]^2$$

23-4

Suposición 2.

La distribución de probabilidad del tiempo de cada actividad es (al menos aproximadamente) una distribución beta



$$t_e = 1/3 [2m + 1/2 (a + b)]$$

Si aplicamos este enfoque al ejemplo que hemos tratado, se obtienen t_e y s^2 para cada actividad como se muestra en la siguiente tabla.

23-5

Actividad	a	m	b	t_e	s^2
(1,2)	1	2	3	2	1/9
(2,3)	2	3 1/2	8	4	1
(3,4)	6	9	18	10	4
(4,5)	1	4 1/2	5	4	4/9
(4,6)	4	5 1/2	10	6	1
(4,7)	3	7 1/2	9	7	1
(5,7)	4	4	10	5	1
(6,8)	5	6 1/2	11	7	1
(7,9)	3	9	9	8	1
(8,10)	5	8	17	9	4
(9,11)	4	4	4	4	0
(9,12)	1	5 1/2	7	5	1
(10,13)	1	2	3	2	1/9
(12,13)	5	5 1/2	9	6	4/9

23-6

Observe que los valores esperados t_e son los mismos tiempos usados en la clase anterior para el tiempo de duración de cada actividad y los tiempos sobre esa trayectoria siguen sumando 44.



Sin embargo el tiempo real requerido sobre esa ruta crítica puede ser diferente de 44.

¿De qué manera puede usarse la información de la tabla anterior para determinar la probabilidad de cumplir con determinada fecha?

23-7

Suposición 3.

Los tiempos de las actividades son variables aleatorias estadísticamente independientes.

Suposición 4.

Como una aproximación, suponga que la ruta crítica (en término de los tiempos esperados) siempre requiere un tiempo total mayor que cualquier otra trayectoria.

23-8

Estas dos suposiciones nos dan información acerca de la media y la varianza de la tiempo de un proyecto.

Tiempo de un proyecto

El tiempo del proyecto es la suma de los tiempos para las actividades sobre la ruta crítica (suposición 4).

El tiempo esperado y la varianza del proyecto, son la suma de los tiempos esperados de las actividades, y la suma de sus varianzas, en la ruta crítica respectivamente.

23-9

Actividad	t_e	s^2
(1,2)	2	1/9
(2,3)	4	1
(3,4)	10	4
(4,5)	4	4/9
(5,7)	5	1
(7,9)	8	1
(9,12)	5	1
(12,13)	6	1/9
Tiempo del proyecto	44	9

Ya tenemos el valor esperado y la varianza del tiempo del proyecto



Sólo nos falta conocer la distribución de probabilidad del tiempo del proyecto

23-10

Suposición 5.

La distribución de probabilidad del tiempo del proyecto es (al menos aproximadamente) una distribución normal).



Recuerde el Teorema del límite central

23-11

¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto se termine antes de 44 días?

Sea X : Tiempo del proyecto $\rightarrow P[X \leq 47]$

$$P[X \leq 47] = 1 - P[Z^s(X - t_e)/s]$$

Estandarizamos la variable $\rightarrow P[Z^s(X - t_e)/s]$
 $P[Z^s(47 - 44)/3]$

Esta probabilidad se busca en una tabla de la distribución normal y obtenemos que es 0.1587, entonces

$$P[X \leq 44] = 0.8413$$

23-12

Método CPM para trueques entre tiempo y costo

PERT

Los tiempos son estocásticos

No se concentra tanto en el tiempo y el costo

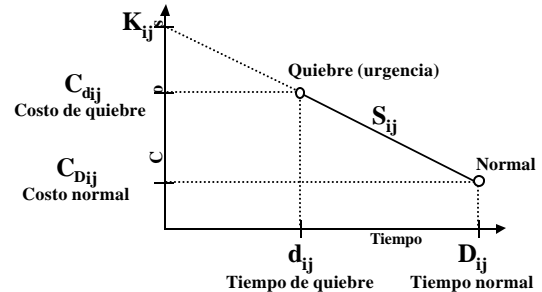
CPM

Los tiempos son determinísticos

Le da gran importancia al tiempo y al costo

23-13

El CPM construye una curva de *tiempo-costo* para cada actividad.



23-14

Las variables de decisión para el problema son las x_{ij} , es decir el tiempo de duración de la actividad (i,j) .



Existe una variable de decisión x_{ij} para cada actividad, pero no la hay para los valores i e j que no tienen.

23-15

Definamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos normal y de quiebre la actividad (i,j)

$$S_{ij} = \frac{C_{Dij} - C_{dij}}{D_{ij} - d_{ij}}$$

Como K_{ij} es la intersección de esa recta con el eje de costo directo



Costo directo de la actividad $(i,j) = K_{ij} + S_{ij} x_{ij}$

Costo directo total del proyecto = $\sum_{(i,j)} (K_{ij} + S_{ij} x_{ij})$

23-16

Formulación de P.L

Definamos una variable más:

y_k = Tiempo más próximo (desconocido), para el evento k , el cual es una función determinística de x_{ij}

La variable x_{ij} aparecerá en exactamente una restricción del tipo $y_i + x_{ij} \leq y_j$

23-17

Además definimos:

Evento 1 = inicio del proyecto

Evento n = terminación del proyecto

$$y_1 = 0 \quad y_n = \text{desconocido}$$

El problema será entonces



23-18

$$\begin{array}{l}
 \text{MAX } Z = \sum_{(i,j)} (-S_{ij})x_{ij} \\
 \left. \begin{array}{l}
 x_{ij} \leq d_{ij} \\
 x_{ij} \leq D_{ij} \\
 y_i + x_{ij} - y_j \leq 0 \\
 y_n \leq T \\
 y_k \leq 0 \quad x_{ij} \leq 0
 \end{array} \right\} \text{Para todas las actividades (i,j)}
 \end{array}$$

7.3-19

