

Clase #7

El Método Simplex en forma tabular.

7-1

Para realizar los cálculos del método simplex, el procedimiento algebraico mostrado en la clase anterior no es el más adecuado

7-2

La forma tabular del método simplex registra:

1. Los coeficientes de las variables.
2. Las constantes del lado derecho de las ecuaciones.
3. La variable básica que aparece en cada ecuación

Veamos una tabla simplex

7-3

Cualquier tabla simplex debe contener los vectores columna de una matriz identidad

Veamos

7-4

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0	
	X ₃	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	X ₄	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	X ₅	(3)	0	3	2	0	0	1	18	

7-5

Prueba de optimalidad.

Actualmente la S.B.F es (0,0,4,12,18) con Z=0

La solución B.F es óptima, si y sólo si todos los coeficientes en el renglón (0) son no negativos.

De lo contrario se debe iterar
Veamos

7-6

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0	
	X ₃	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	X ₄	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	X ₅	(3)	0	3	2	0	0	1	18	

Hay coeficientes negativos

7-7

Iteración paso 1.

Lo primero que se debe hacer es determinar la v.n.b que debe entrar a la base.

Esto se hace mirando la variable que tenga el coeficiente mayor (en valor absoluto) en el renglón (0)

Veamos

7-8

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0	
	X ₃	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	X ₄	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	X ₅	(3)	0	3	2	0	0	1	18	

La variable X₂ entra a la base

7-9

Alrededor de la columna
debajo de este coeficiente se
pone un recuadro y se le da
el nombre de columna
pivote

7-10

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0	
	X ₃	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	X ₄	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	X ₅	(3)	0	3	2	0	0	1	18	

Columna pivote

7-11

Iteración paso 2.

Debemos determinar la variable básica que sale.

Aplicamos la prueba del cociente mínimo

Veamos

7-12

Prueba del cociente mínimo.

1. Elegimos coeficientes de la columna pivote estrictamente positivos.
2. Se divide cada coeficiente entre el elemento del lado derecho en el mismo renglón.
3. Se identifica el renglón que tiene la menor de estas razones.
4. La variable básica para este renglón es la variable básica que sale.

Veamos

7-13

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes							L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅			
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0	■	
	X ₃	(1)	0	1	0	1	0	0	4	—	
	X ₄	(2)	0	0	2	0	1	0	12	6	
	X ₅	(3)	0	3	2	0	0	1	18	9	

Renglón pivote

Mínimo

7-14

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0	■
	X ₃	(1)	0	1	0	1	0	0	4	—
	X ₄	(2)	0	0	2	0	1	0	12	6
	X ₅	(3)	0	3	2	0	0	1	18	9

Número pivote

7-15

Ahora se debe despejar la nueva solución B.F usando O.A.E

X₂ sustituirá a X₄ como V.B

El patrón de coeficientes en la columna de X₂ debe quedar como actualmente está el de la columna de X₄, es decir (0,0,1,0)

7-16

O.A.E. 1

Dividimos el renglón pivote (renglón 2) entre el número pivote (2) y obtenemos el nuevo renglón 2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

2



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Veamos

7-17

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
1										
	X ₂	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6	

Nuevo renglón 2

7-18

O.A.E. 2

Multiplicamos este nuevo renglón 2 por menos el coeficiente de la variable que entra X_2 , en el renglón 0 (*5) y lo sumamos al renglón cero

$$\begin{array}{r} [0 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad 5/2 \quad 0 \quad 30] \\ + [1 \quad -3 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ \hline [1 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 5/2 \quad 0 \quad 30] \end{array}$$

Veamos

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
1	Z	(0)	1	-3	0	0	5/2	0	30	
	X_2	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6	

Nuevo renglón (0)

7-20

O.A.E. 3

Multiplicamos este nuevo renglón 2 por menos el coeficiente de la variable que entra X_2 , en el renglón 3 (*-2) y lo sumamos al renglón 3

$$\begin{array}{r} [0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -12] \\ + [0 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 18] \\ \hline [0 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 6] \end{array}$$

Veamos

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
1	Z	(0)	1	-3	0	0	5/2	0	30	
	X_2	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6	
	X_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6	

Nuevo renglón (3)

7-22

O.A.E. 4

Como el coeficiente de la variable que entra X_2 en el renglón 1 es cero este renglón permanece igual

Veamos la tabla completa

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
1	Z	(0)	1	-3	0	0	5/2	0	30	
	X_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	X_2	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6	
	X_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6	

La S.B.F es (0,6,4,0,6) con Z=30

7-24

Se debe hacer exactamente lo mismo en esta nueva tabla simplex, es decir la **Prueba de optimalidad**



Si la solución no es óptima se debe iterar.
En caso contrario nos detenemos

7-25

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
1	Z	(0)	1	-3	0	0	5/2	0	30	
	X ₃	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	X ₂	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6	
	X ₅	(3)	0	3	0	0	-1	1	6	

Hay coeficientes negativos

7-26

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
1	Z	(0)	1	-3	0	0	5/2	0	30	
	X ₃	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	X ₂	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6	
	X ₅	(3)	0	3	0	0	-1	1	6	

Columna pivote

7-27

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
1	Z	(0)	1	-3	0	0	5/2	0	30	■
	X ₃	(1)	0	1	0	1	0	0	4	4
	X ₂	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6	—
	X ₅	(3)	0	3	0	0	-1	1	6	2

Número pivote

Mínimo

7-28

Se realizan las O.A.E necesarias y se obtiene la nueva tabla simplex



7-29

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
2	Z	(0)	1	0	0	3/2	1	36		
	X ₃	(1)	0	0	1	1/3	-1/2	2		
	X ₂	(2)	0	0	1	1/2	0	6		
	X ₁	(3)	0	1	0	-1/3	1/3	2		

No hay coeficientes negativos

7-30

**La nueva S.B.F es (2,6,2,0,0)
con $Z=36$**

**Se concluye que ésta es la
solución óptima**

7-31

Casos especiales

1. Empate para la variable básica entrante.
2. Empate para la variable básica que sale (degeneración).
3. Cuando no hay variable básica que sale. (Z no acotada).
4. Soluciones óptimas múltiples.

7-32

1. Empate para la variable básica entrante.

Suponga que la función objetivo es:



$$Z = 3X_1 + 3X_2$$

Tanto X_1 como X_2 pueden entrar a la base.
La elección de cual variable entra es arbitraria

7-33

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
0	Z	(0)	1	-3	-3	0	0	0	0	
	X_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	X_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	X_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18	

Empate para la variable que entra

7-34

2. Empate para la variable básica que sale.



Problema degenerado.

Esto significa que en algún momento la prueba del cociente mínimo tiene un empate.
A primera vista parecería que no hay problema, pero en realidad al escoger una de las 2 como variable que sale, la otra variable que no se escoge quedará dentro de la base con valor 0



El algoritmo puede entrar en un loop infinito.

7-35

3. Cuando no hay variable básica que sale.



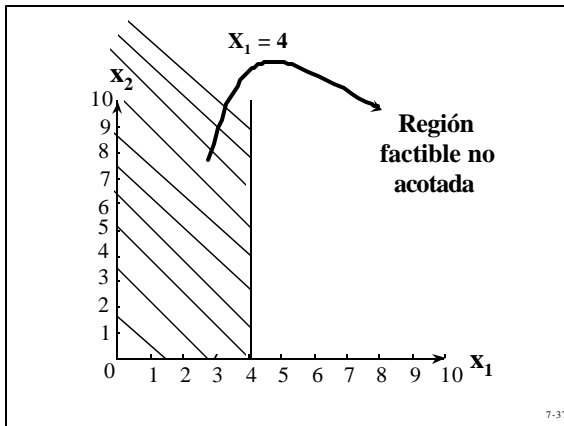
Z no acotada

Veamos el siguiente caso
primero gráficamente y luego
en forma tabular

$$\text{Maximizar } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$\text{Sujeto a } X_1 \leq 4$$

7-36



Iter	V.B	Ec #	Coeficientes				L.D	
			Z	x_1	x_2	x_3		
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	Columna pivote
	x_3	(1)	0	1	0	1	4	

En estos casos, en la columna pivote todos los coeficientes son negativos o cero

Error

7-38

4. Soluciones óptimas múltiples.

Cualquier problema de programación lineal con soluciones óptimas múltiples (y una región factible acotada) , tiene al menos 2 soluciones FEV que son óptimas.

Cuando esto ocurre, al menos una V.N.B tiene coeficiente cero en la ecuación (0) final, de manera que si aumenta su valor, el valor de la función Z no cambia

7-39

Miremos el ejemplo de Wyndor estudiado en la clase 4.

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeto a

$x_1 \leq 4$

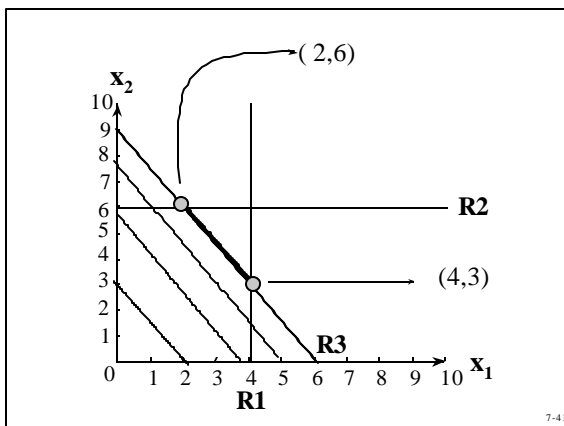
$2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

Veamos

7-40



Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	Z	(0)	1	-3	-2	0	0	0	0	■
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	+
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	6	6

¿Solución óptima? No

Mínimo

7-42

2

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
1	Z	(0)	1	0	-2	3	0	0	12	■
	X ₁	(1)	0	1	0	1	0	0	4	—
	X ₄	(2)	0	0	2	0	1	0	12	6
	X ₅	(3)	0	0	2	-3	0	1	6	3

¿Solución óptima? → No Mínimo₇₋₄₃

3

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
2	Z	(0)	1	0	0	0	0	1	18	■
	X ₁	(1)	0	1	0	1	0	0	4	4
	X ₄	(2)	0	0	0	3	1	-1	6	2
	X ₂	(3)	0	0	1	-3/2	0	1/2	3	—

¿Solución óptima? → Si Mínimo₇₋₄₄

Se ve que esta solución es óptima, pero como existe una V.N.B con coeficiente cero en el renglón (0) (en este caso X₃), existe al menos otra solución FEV óptima, y por tanto infinitas.

Veamos



7-45

4

Iter	V.B	Ec #	Coeficientes						L.D	Razón
			Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅		
4	Z	(0)	1	0	0	0	0	1	18	■
	X ₁	(1)	0	1	0	0	-1/3	1/3	2	
	X ₃	(2)	0	0	0	1	1/3	-1/3	2	
	X ₂	(3)	0	0	1	0	1/2	0	6	

¿Solución óptima? → Si 7-46

Resumen del algoritmo simplex

- 1 Encontrar solución inicial
- 2 Repetir iterativamente:
 - 2.1 Verificar optimalidad (renglón Z): si no hay coef. neg. terminar
 - 2.2 Escoger el más negativo como variable que entra
 - 2.3 Por relación de cociente mínimo escoger variable que sale
 - 2.4 Transformar fila que sale dividiendo por elemento pivote
 - 2.5 Transformar las demás filas restando de c/u la fila que sale transformada del paso 2.4 multiplicada por -(elemento en intersección de fila en transformación con columna pivote).
- 2.6 Volver al paso 2.1

7-47