

Clase # 6

## ALGEBRA DEL MÉTODO SIMPLEX

6-1

Con propósitos ilustrativos, se seguirá usando el ejemplo prototipo de la Wyndor Glass c.o para observar los conceptos algebraicos del método simplex

Veamos cuales son los pasos →

6-2

### Pasos.

1. Paso inicial.
2. Prueba de optimalidad (iteraciones).
  - ♦ Determinación de la dirección de movimiento.
  - ♦ Determinación de donde detenerse.
  - ♦ Determinación de una nueva solución en el vértice (BF).

Miremos detalladamente →

6-3

### Estrategia de solución.

Expresar  $Z$  y las variables básicas como función (en términos) de las variables no básicas. Recordar que en toda solución básica a un sistema de  $m$  ecuaciones en  $n$  variables hay  $(n-m)$  variables  $= 0$  (no básicas) y  $m$  variables  $\geq 0$  (básicas) y ésto es un vértice.

6-4

### 1.Paso inicial.

Seleccionar las v.n.b y asignarle el valor de cero. En este caso lo más práctico es elegir a  $X_1$  y  $X_2$  como v.n.b, es decir  $X_1 = 0$  y  $X_2 = 0$ .

Veamos las ecuaciones →

6-5

Este sistema de ecuaciones está en la *forma apropiada de la eliminación Gaussiana*

$$(1) \quad X_1 + X_3 = 4$$

$$(2) \quad 2X_2 + X_4 = 12$$

$$(3) \quad 3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18$$

Notemos que las v.b están en azul.

Como  $X_1 = 0$  y  $X_2 = 0$ , entonces  $X_3 = 4$ ,  $X_4 = 12$  y  $X_5 = 18$

La solución B.F. Inicial es  $(0,0,4,12,18)$

6-6

## 2. Prueba de optimalidad.

La función objetivo es  
 $Z = 3X_1 + 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$

La pregunta entonces es: ¿Existen tasas de mejoramiento positivas?  
 Si en la función objetivo hay coeficientes positivos sí existen estas tasas.  
 Esto es equivalente a que haya coeficientes negativos en el renglón (0).

En este caso  $Z=0$ , y sí hay forma de mejorar

Iteraciones →

6-7

## Determinación dirección de movimiento

$$Z = 3X_1 + 5X_2$$

¿Aumenta  $X_1$ ? → Tasa de mejoramiento en  $Z=3$

¿Aumenta  $X_2$ ? → Tasa de mejoramiento en  $Z=5$

$5 > 3$ , se elige  $X_2$  para aumentar su valor

En este momento  $X_2$  es una v.n.b y se selecciona como la **variable que entra a la base**.  
 Para ello se deben ajustar los valores de las demás variables.

6-8

## Determinar donde detenerse.

¿Cuánto aumentar el valor de la v.b entrante  $X_2$ , antes de detenerse?



Puedo aumentar  $X_2$  siempre y cuando las variables permanezcan positivas

- (1)  $X_3 = 4 - X_2 \geq 0 \rightarrow$  No hay cota superior sobre  $X_2$
- (2)  $X_4 = 12 - 2X_2 \geq 0 \rightarrow X_2 \leq 6$
- (3)  $X_5 = 18 - 3X_1 - 2X_2 \geq 0 \rightarrow X_2 \leq 9$

6-9

Entonces  $X_2$  puede crecer justo hasta 6, punto en el que  $X_4$  ha llegado a 0.

## PRUEBA DEL COCIENTE MÍNIMO

Dividimos el lado derecho entre el coeficiente de la variable que entra

(1)  $X_1 + X_3 = 4 \rightarrow \infty$

(2)  $2X_2 + X_4 = 12 \rightarrow 12/2 = 6$

(3)  $3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18 \rightarrow 18/2 = 9$

MINIMO

6-10

El mínimo valor que obtengamos al realizar esta prueba determina la variable básica que sale.

En este caso sale  $X_4$ .

La columna donde está la variable que entra se denomina columna pivote y el renglón (fila) donde está la variable que sale se denomina renglón pivote. El elemento en su intersección se denomina elemento pivote.

6-11

## Determinar la nueva S.B.F.

Cuando aumento  $X_2$ , la S.B.F inicial cambia.



S.B.F inicial

Nueva S.B.F

V.N.B:

$$X_1 = 0 \quad X_2 = 0$$

$$X_1 = 0 \quad X_4 = 0$$

V.B:

$$X_3 = 4 \quad X_4 = 12 \quad X_5 = 18$$

$$X_3 = ? \quad X_2 = 6 \quad X_5 = ?$$

6-12

Para hallar la solución a  $X_3$  y  $X_5$  lo más conveniente es llevar el sistema a la forma apropiada para la eliminación Gaussiana.

6-13

Veamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} (0) & Z - 3X_1 - 5X_2 & = 0 \\ (1) & X_1 & + X_3 = 4 \\ (2) & 2X_2 & + X_4 = 12 \\ (3) & 3X_1 + 2X_2 & + X_5 = 18 \end{array}$$

Las variables básicas se muestran en azul. Para llevar el sistema a la forma apropiada de la E.G debemos realizar algunas operaciones algebraicas elementales (O.A.E).

6-14

$$\begin{array}{rcl} (0) & Z - 3X_1 - 5X_2 & = 0 \\ (1) & X_1 & + X_3 = 4 \\ (2) & 2X_2 & + X_4 = 12 \\ (3) & 3X_1 + 2X_2 & + X_5 = 18 \end{array}$$

Notemos que el patrón de coeficientes de la variable  $X_4$  es  $(0,0,1,0)$

La variable  $X_2$  debe quedar con este patrón de coeficientes.

6-15

### O.A.E 1

En la ecuación de la variable que sale, divido por el coeficiente de la variable que entra.



En este caso

$$(2) \frac{2X_2 + X_4}{2} = \frac{12}{2}$$

$$(2') X_2 + 0.5X_4 = 6$$

Nuevo renglón pivote

$$X_2 = 6 - 0.5X_4$$

6-16

### O.A.E 2.

Multiplicar el nuevo renglón pivote, por menos el coeficiente de la variable que entra en el renglón (0) y el resultado lo sumo con el renglón (0)

En este caso



$$(0) Z - 3X_1 - 5X_2 = 0$$

Coefficiente de la variable que entra

sigue

6-17

Así entonces:

$$5X_2 + 2.5X_4 = 30$$

$$+ \quad Z - 3X_1 - 5X_2 = 0$$

$$Z - 3X_1 + 2.5X_4 = 30$$

$$Z = 30 + 3X_1 - 2.5X_4$$

Se hace lo mismo para cada renglón del resto del problema

6-18

### O.A.E 3.

Para el renglón (1) no es necesario porque no hay variable  $X_2$

6-19

### O.A.E 4.

Multiplicar el nuevo renglón pivote, por menos el coeficiente de la variable que entra en el renglón (3) y el resultado lo sumo con el renglón (3)

En este caso

$$\begin{array}{r} \boxed{\phantom{0}} \\ (3) \quad 3X_1 + 2X_2 \qquad + X_5 = 18 \\ \downarrow \\ \text{Coeficiente de la variable que entra} \end{array}$$

sigue

6-20

Así entonces:

$$\begin{array}{r} \text{Nuevo renglón pivote (* -2)} \\ -2X_2 - X_4 = -12 \\ + \quad 3X_1 + 2X_2 \qquad + X_5 = 18 \\ \hline 3X_1 \qquad -X_4 + X_5 = 6 \\ \\ X_5 = 6 - 3X_1 + X_4 \end{array}$$

6-21

El nuevo sistema de ecuaciones sería:

$$\begin{array}{llll} (0) & Z - 3X_1 & + 5/2X_4 & = 30 \\ (1) & X_1 & + X_3 & = 4 \\ (2) & & X_2 & + 1/2X_4 = 6 \\ (3) & 3X_1 & & - X_4 + X_5 = 6 \end{array}$$

Como  $X_1 = 0$  y  $X_4 = 0$  obtenemos la solución B.F (0,6,4,0,6)

$$\Rightarrow \boxed{Z=30}$$

6-22

**Debemos realizarle la prueba de optimalidad a esta nueva solución B.F**

6-23

## 2. Prueba de optimalidad.

La función objetivo es  
 $Z = 30 + 3X_1 - 5/2X_4$

**En la función objetivo hay coeficientes positivos.**

En este caso  $Z=30$ , y si hay forma de mejorar

Iteraciones  $\rightarrow$

6-24

### Determinación dirección de movimiento

$$Z = 30 + 3X_1 - 5/2X_4$$

¿Aumenta  $X_1$ ?  $\longrightarrow$  Tasa de mejoramiento en  $Z=3$

¿Aumenta  $X_2$ ?  $\longrightarrow$  Tasa de mejoramiento en  $Z=-5/2$

**Se elige  $X_1$  para aumentar su valor  
pues en  $X_2$  disminuye**

En este momento  $X_1$  es una v.n.b y se selecciona como la variable que entra a la base.  
Para ello se deben ajustar los valores de las demás variables.

6-25

### Determinar donde detenerse.

¿Cuánto aumentar el valor de la v.b entrante  $X_1$ , antes de detenerse?



Puedo aumentar  $X_1$  siempre y cuando las variables permanezcan positivas

$$(1) X_3 = 4 - X_1 \geq 0 \longrightarrow X_1 \leq 4$$

$$(2) X_2 = 6 - 1/2X_1 \geq 0 \longrightarrow \text{No hay cota superior sobre } X_1$$

$$(3) X_5 = 6 - 3X_1 + X_4 \geq 0 \longrightarrow X_1 \leq 2$$

6-26

### PRUEBA DEL COCIENTE MÍNIMO

Dividimos el lado derecho entre el coeficiente de la variable que entra

$$(1) X_1 + X_3 = 4 \longrightarrow 4/1 = 4$$

$$(2) X_2 + 1/2X_4 = 6 \longrightarrow \mu$$

$$(3) 3X_1 - X_4 + X_5 = 6 \longrightarrow 6/3 = 2 \quad \boxed{\text{MINIMO}}$$

6-27

**La variable  $X_5$  debe salir de la base**

**Las variables básicas anteriores  
eran  $X_2, X_3, X_5$   
y pasan a ser  $X_1, X_2, X_3$**

6-28

$$(0) Z - 3X_1 + 5/2X_4 = 30$$

$$(1) X_1 + X_3 = 4$$

$$(2) X_2 + 1/2X_4 = 6$$

$$(3) 3X_1 - X_4 + X_5 = 6$$

*Recordemos que éste es el actual  
sistema de ecuaciones*

6-29

**Realizando operaciones  
algebraicas elementales  
obtenemos el nuevo sistema  
de ecuaciones donde  
expresamos  $Z, X_2, X_3, X_1$  en  
términos de  $X_4$  y  $X_5$**



6-30

**O.A.E 1**

En la ecuación de la variable que sale, divido por el coeficiente de la variable que entra.



En este caso

$$(3) \frac{3X_1 - X_4 + X_5}{3} = \frac{6}{3}$$

$$(3) X_1 - 1/3 X_4 + 1/3 X_5 = 2$$

$$X_1 = 2 + 1/3 X_4 - 1/3 X_5$$

Nuevo renglón pivote

6-31

**O.A.E 2.**

Multiplicar el nuevo renglón pivote, por menos el coeficiente de la variable que entra en el renglón (0) y el resultado lo sumo con el renglón (0)



En este caso

$$(0) Z - 3X_1 + 5/2 X_4 = 30$$

Coeficiente de la variable que entra

sigue

6-32

Así entonces:

$$\begin{array}{rcl} 3X_1 - & -X_4 + X_5 & = 6 \\ + & Z - 3X_1 & + 5/2 X_4 = 30 \\ \hline & Z & + 3/2 X_4 + X_5 = 36 \\ & Z = 36 - 3/2 X_4 - X_5 & \end{array}$$

Se hace lo mismo para cada renglón del resto del problema

6-33

**O.A.E 3.**

Multiplicar el nuevo renglón pivote, por menos el coeficiente de la variable que entra en el renglón (1) y el resultado lo sumo con el renglón (1)

Así entonces:

$$\begin{array}{rcl} -X_1 & +1/3 X_4 - 1/3 X_5 & = -2 \\ + & X_1 + X_3 & = 4 \\ \hline & X_3 + 1/3 X_4 - 1/3 X_5 & = 2 \\ X_3 = 2 - 1/3 X_4 + 1/3 X_5 & & \end{array}$$

6-34

**O.A.E 4.**

Multiplicar el nuevo renglón pivote, por menos el coeficiente de la variable que entra en el renglón (3) y el resultado lo sumo con el renglón (3)

En este caso



Nuevo renglón pivote (\* 0)

$$\begin{array}{rcl} X_2 & + & 1/2 X_4 = 6 \\ + & X_2 & + 1/2 X_4 = 6 \\ \hline X_2 = 6 - 1/2 X_4 & & \end{array}$$

6-35

El nuevo sistema de ecuaciones sería:

$$\begin{array}{lcl} (0) & Z & + 3/2 X_4 + X_5 = 36 \\ (1) & & X_3 + 1/3 X_4 - 1/3 X_5 = 2 \\ (2) & X_2 & + 1/2 X_4 = 6 \\ (3) & X_1 & - 1/3 X_4 + 1/3 X_5 = 2 \end{array}$$

Como  $X_4 = 0$  y  $X_5 = 0$  obtenemos la solución B.F (2,6,2,0,0)

$$\Rightarrow \boxed{Z=36}$$

6-36

$$Z + 3/2 X_4 + X_5 = 36$$

**En el renglón (0) no  
hay ya coeficientes  
negativos.**

**Concluimos que esta  
es la solución óptima**

6-37