

Clase # 5

## SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE P.L. EL MÉTODO SIMPLEX

5-1

### El método simplex.

Es un método genérico de solución de problemas lineales, desarrollado por George Dantzig en 1947

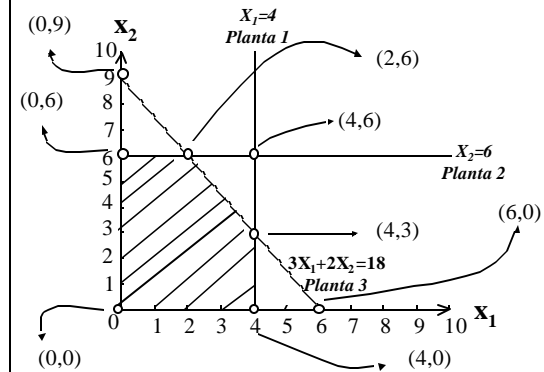
5-2

Como tal, el método simplex es un procedimiento algebraico, pero puede entenderse más fácilmente como un método geométrico.

Para ilustrar esto, veamos nuevamente el ejemplo de la Wyndor Glass co.



5-3



5-4

### Definición

**Restricción frontera:**

Es una recta que marca el límite de lo que permite la restricción correspondiente.

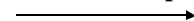
5-5

### Definición

**Soluciones en el vértice :**

Todos los puntos donde se interceptan las restricciones frontera.

Se clasifican en dos tipos



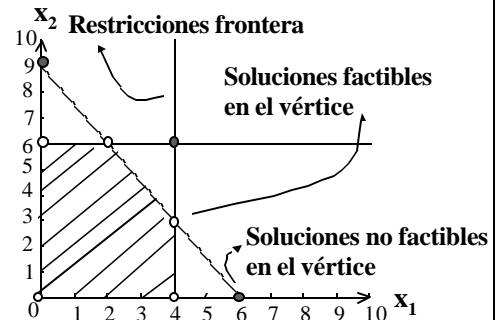
5-6

**Soluciones factibles en el vértice (FEV):**  
Puntos que se encuentran en los vértices de la región factible. En este caso son: (0,6) ; (0,0) ; (4,0) ; (4,3) ; (2,6)

**Soluciones no factibles en el vértice :**  
Los otros puntos que se encuentran en los vértices que no corresponden a la región factible. Estos son (0,9) ; (4,6) ; (6,0)

5-7

**Veámoslo de nuevo gráficamente**



5-8

En este problema se tienen dos variables de decisión ( $X_1, X_2$ ), pero en general en un problema con  $n$  variables de decisión, se puede decir que:

Dos soluciones factibles son  
adyacentes entre sí:



Si comparten por lo menos  $n - 1$  restricciones

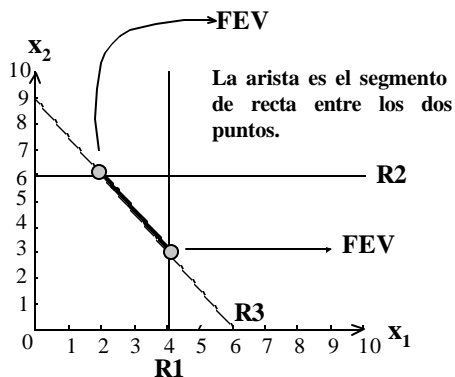
5-9

### Definición

**Arista:**

**Segmento de recta que conecta 2 soluciones FEV.**

5-10



5-11

En el ejemplo, por cada solución FEV, se tienen 2 soluciones adyacentes, correspondientes a 2 aristas.

Solución FEV	Soluciones FEV adyacentes	
(0,0)	(0,6)	(4,0)
(0,6)	(0,0)	(2,6)
(2,6)	(0,6)	(4,3)
(4,3)	(2,6)	(4,0)
(4,0)	(4,3)	(0,0)

5-12


**Si la región factible es acotada y no vacía existe una solución óptima.**



**Por lo tanto se puede asegurar que una de las soluciones FEV es la solución óptima.**

5-13

**Para saber cuantas soluciones en el vértice existen podemos utilizar la fórmula**



$$\frac{(n+m)!}{n! m!}$$

**Así entonces en el ejemplo de Wyndor donde  $n=2$  y  $m=3$  existirán:**

$$\frac{5!}{2! 3!} = 10 \text{ soluciones en el vértice}$$

5-14

#### **Cuatro Teoremas claves de P.L.**

1. Cuando hay solución óptima, siempre existe una en un vértice.
2. Si una solución en un vértice, no tiene soluciones adyacentes mejores, esa es la solución óptima (óptimo local es global).
3. Solución básica (en un vértice aumentada) es equivalente a hacer  $(n-m)$  variables iguales a cero y resolver para las restantes.
4. Soluciones adyacentes tienen iguales todas las variables básicas menos una (y por supuesto las no básicas).

5-15

#### **Prueba de optimalidad**

**Seleccíonese un punto de las FEV**

**Verifíquese los resultados de las soluciones FEV adyacentes**

El óptimo se encuentra cuando ninguna de las soluciones FEV adyacentes produce un mejor valor de la solución óptima (medida por la función objetivo)

5-16

**De esta misma manera opera el algoritmo simplex**

5-17

#### **Comprobación intuitiva del algoritmo simplex**

1. Inicialización
2. Prueba de optimalidad

5-18

### 1. Inicialización.

**Propóngase una solución FEV.**

**Por lo general se propone la solución (0,0) .**

5-19

### 2. Prueba de optimalidad.

**Conclúyase que (0,0) no es óptimo (existen soluciones FEV adyacentes mejores).**

**sigue** →

5-20

### Iteración 1

(muévase a una solución FEV adyacente mejor)

1. Entre las 2 aristas de la región factible, elija moverse a lo largo de la arista que aumente el valor de  $X_2$ . (con una función objetivo  $Z=3X_1+5X_2$ , el valor de  $Z$  crece más rápido que aumentando el valor de  $X_1$ ).
2. Deténgase al llegar a la primera frontera de la restricción:  $2X_2 = 12$ . (si se mueve más lejos en la dirección seleccionada en el paso 1, se saldrá de la región factible).
3. Obtenga la intersección del nuevo conjunto de fronteras restricción: (0,6) → Las ecuaciones para estas fronteras de restricción  $X_1=0$  y  $2X_2=12$ , llevan de inmediato a esta solución.

5-21

**Concluya que (0,6) no es una solución óptima. Existe una solución FEV adyacente mejor.**

5-22

### Iteración 2

(Muévase a una mejor solución FEV)

1. Entre las 2 aristas de la región factible que salen de (0,6), elija moverse a lo largo de la que va a la derecha (al moverse a lo largo de esta arista aumenta el valor de  $Z$ , mientras que al ir para atrás hacia abajo del eje  $X_2$  lo disminuye).
2. Deténgase al encontrar la primera frontera de restricción en esa dirección:  $3X_1+2X_2 = 18$ . (si se mueve más lejos en la dirección seleccionada en el paso 1, se saldrá de la región factible).
3. Obtenga la intersección del nuevo conjunto de fronteras restricción: (2,6) → Las ecuaciones para estas fronteras de restricción  $3X_1+2X_2=18$  y  $2X_2=12$ , llevan de inmediato a esta solución.

5-23

**Concluya que (2,6) es una solución óptima y deténgase. No existe una solución FEV adyacente mejor.**

5-24

#### Conceptos de solución importantes.

A continuación veamos algunos conceptos de solución importantes.

sigue →

5-25

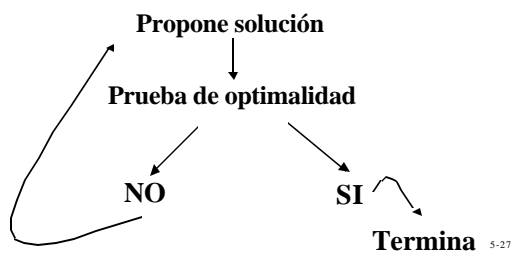
#### Concepto de solución 1.

El método simplex sólo revisa las soluciones FEV. Una de éstas soluciones FEV debe ser la óptima.

5-26

#### Concepto de solución 2.

El método simplex es un algoritmo iterativo.



5-27

#### Concepto de solución 3.

Siempre que es posible, el método simplex elige el origen (todas las variables de decisión iguales a cero) como la solución FEV inicial.

Si no es posible se requieren procedimientos especiales

5-28

#### Concepto de solución 4.

Dada una solución FEV, es computacionalmente más rápido reunir información sobre sus soluciones FEV adyacentes que sobre otras soluciones FEV.

Por tanto, siempre el algoritmo recorre las aristas de la región factible

5-29

#### Concepto de solución 5.

Después de identificar la FEV actual, el algoritmo simplex identifica todas las aristas de la región factible que salen de esa solución.

Estas aristas llevan a una solución FEV adyacente en el otro punto terminal, pero el algoritmo ni siquiera se toma la molestia de obtener la solución FEV adyacente.

sigue →

5-30

Solamente identifica la tasa de mejoramiento en  $Z$  que se obtendría al moverse por dicha arista. Entre las aristas con una tasa de mejoramiento en  $Z$  positiva, selecciona moverse por aquella con una tasa de mejoramiento en  $Z$  más grande.

Se escoge luego esta solución factible como la nueva solución actual.

5-31

#### Concepto de solución 6.

Cuando ninguna de las tasas de ganancia le aporta a la función objetivo, significa que esa FEV es la solución óptima.

5-32

#### Del procedimiento geométrico al algebraico.

El método simplex es un método algebraico. Por lo tanto las soluciones del método se derivan al resolver un sistema de ecuaciones.



*El sistema aumentado se obtiene al convertir el sistema de desigualdades de la forma original, en un sistema de igualdades equivalentes para las restricciones funcionales*

5-33

#### Variables de holgura.

Es el procedimiento que se utiliza para convertir una restricción funcional de desigualdad, en una restricción de igualdad equivalente.

Veamos un ejemplo

5-34

#### Ejemplo.

Retomemos la primera restricción del problema de Wyndor  $X_1 \leq 4$ .

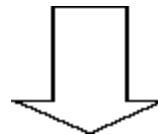
Sea  $X_3 = 4 - X_1 \rightarrow$  (lo que le falta a  $X_1$  para ser igual a 4)

Notemos que:

$$X_3 \geq 0$$

5-35

De ahí que  $X_1 \leq 4$  es equivalente a



$$X_1 + X_3 = 4$$

$$X_3 \geq 0$$

5-36

Para el problema de Wyndor tenemos.

Forma original del modelo	Forma aumentada del modelo
Max $Z = 3X_1 + 5X_2$	Max $Z = 3X_1 + 5X_2$
Sujeto a	Sujeto a
$X_1 \leq 4$	(1) $X_1 + X_3 = 4$
$2X_2 \leq 12$	(2) $2X_2 + X_4 = 12$
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	(3) $3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18$
$X_1, X_2 \geq 0$	$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

5-37

Las variables de holgura no se ven en la función objetivo porque su coeficiente es cero.

*Veamos ahora algunas definiciones.*

5-38

### Solución aumentada.

Es una solución para las variables originales (variables de decisión), que se ha aumentado con los valores correspondientes de las variables de holgura

#### Ejemplo

Solución sistema original

(3,2)

Solución aumentada

(3,2,1,8,5)

5-39

### Solución básica.

Es una solución en un vértice aumentada.

#### Ejemplo

Solución en el vértice sistema original

(4,6)

Solución Básica

(4,6,0,0,-6)

5-40

### Solución básica factible.

Es una solución factible en un vértice aumentada.

#### Ejemplo

Solución en el vértice sistema original

(4,3)

Solución Básica

(4,3,0,6,0)

5-41

Así tenemos un sistema que posee  $m=3$  ecuaciones con  $n=5$  variables de decisión

*Se tiene 2 grados de libertad*

Se llaman 2 grados de libertad porque se pueden dar valores a 2 de las variables y así hallar la solución de las otras 3.

5-42

Recordar que dos grados de libertad implica



*Se tienen 2 variables arbitrarias*

El simplex siempre les da el valor de cero. Por tanto siempre se tendrá la solución al sistema y a estas variables se les denominará variables básicas.

5-43

### Propiedades de las soluciones BF.

1. Cada variable de decisión puede clasificarse en básica o no básica (incluyendo las holuras).
2. Habrá tantas variables básicas como restricciones funcionales.
3. En un problema con  $n$  variables y  $m$  restricciones habrá  $n-m$  variables no básicas. Siempre se hacen iguales a cero

sigue →

5-44

4. Las variables básicas obtienen su valor al solucionar el sistema de ecuaciones.

5. Si los valores de las variables satisfacen condición de no negatividad se les denomina soluciones básicas factibles.

veamos →

5-45

### **Ejemplo**

Solución sistema original

↓  
(0,6)

Solución aumentada

↓  
(0,6,4,0,6)

Variables no básicas (v.n.b)

Variables básicas (v.b)

5-46

### Teorema

Dos soluciones básicas factibles son adyacentes entre sí, si tienen todas las V.B menos 1 comunes.

### **Ejemplo**

(0,0)	(0,6)
(0,0,4,12,18)	(0,6,4,0,6)

*Comparten todas las variables básicas menos una*

5-47

Para trabajar la forma algebraica el problema se expresa.

Max  $Z$

Sujeto a

$$(0) \quad Z - 3X_1 - 5X_2 = 0$$

$$(1) \quad X_1 + X_3 = 4$$

$$(2) \quad 2X_2 + X_4 = 12$$

$$(3) \quad 3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

5-48