

Clase # 13

Análisis de sensibilidad (2)

13-1

Ya vimos que ocurría cuando se presentaban variaciones de los recursos b_i .

¿Cómo se afectan la función objetivo y la solución óptima, cuando cambian los coeficientes de las variables de decisión c_j en la función objetivo?

13-2

Los cambios en los coeficientes de costos c_j requieren un análisis según sean:

→ Variables básicas

→ Variables no básicas

13-3

1. Cambios en los coeficientes de una V.N.B

En la tabla óptima:

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B B^{-1} A} & \textcircled{c_j} & \underline{c_B B^{-1}} & \underline{c_B B^{-1} b} \\ 0 & \underline{B^{-1} A} & \downarrow & \underline{B^{-1}} & \underline{B^{-1} b} \end{bmatrix}$$

Único elemento que cambia será c_j (la componente j de \underline{c})

13-4

Intervalo permitido para permanecer óptima.

Cuando se varía sólo un parámetro c_j al tiempo, es posible encontrar un intervalo de valores permitidos para que tanto la solución como la función objetivo permanezcan óptimas.

sigue

13-5

Cuando X_j es una V.N.B, la tabla sigue siendo óptima mientras

$$z_j - c_j \geq 0$$

(z_j es la componente j de $\underline{z} = \underline{c_B B^{-1} A}$)

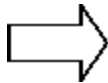
z_j permanece constante aunque c_j cambie.

13-6

Si hacemos $\bar{c}_j = c_j + D$



$$z_j - \bar{c}_j \geq 0 \Rightarrow z_j - (c_j + D) \geq 0$$



$$D \leq z_j - c_j$$

sigue

13-7

• Ya que $D \leq z_j - c_j$, el máximo incremento de valor que puedo subir la utilidad unitaria de la actividad j, será $z_j - c_j$, para que la solución permanezca óptima.

• Si $D > z_j - c_j$, X_j debe entrar a la base (la solución actual dejaría de ser óptima).

13-8

• Se puede hacer un pivote a partir de la tabla óptima para conocer la nueva solución.

• Mientras $D \leq z_j - c_j$, no cambian ni la solución, ni el valor de Z actual (función objetivo actual).

13-9

• $z_j - c_j$ es el valor mínimo en el cual debe aumentarse la utilidad de la actividad j para que se vuelva atractiva, o lo que es lo mismo, el valor mínimo en el que debe reducirse su costo para ser atractiva.

• Por eso $z_j - c_j$ se denomina costo reducido

• Para el problema de la Wyndor ninguna actividad (X_1, X_2) es no básica.

13-10

2. Cambios en los coeficientes de una V.B

En la tabla óptima:

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B B^{-1} A} - \underline{c} & \underline{c_B B^{-1}} & \underline{c_B B^{-1} b} \\ 0 & \underline{B^{-1} A} & \underline{B^{-1}} & \underline{B^{-1} b} \end{bmatrix}$$

Elementos que cambian (aunque se garantiza que $\underline{c_B B^{-1} A} - \underline{c} = 0$, para las V.B). Se requiere que los $z_j - c_j \geq 0$ y los $c_B B^{-1} \geq 0$. La función objetivo $\underline{c_B B^{-1} b}$ puede tomar cualquier valor.

13-11

Hay que tener cuidado porque al cambiar un elemento c_j se pone en riesgo la *optimalidad* del problema (cambia el renglón cero)

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B B^{-1} A} - \underline{c} & \underline{c_B B^{-1}} & \underline{c_B B^{-1} b} \\ 0 & \underline{B^{-1} A} & \underline{B^{-1}} & \underline{B^{-1} b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2 \end{array}$$

13-12

Intervalo permitido para permanecer óptima.

Ilustremos este procedimiento con el ejemplo de la Wyndor.

Recordemos que $\underline{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

sigue 13-13

Por ejemplo si variamos $\bar{c}_2 = c_2 + D$

$$\underline{c}_B \underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ 0 & 5+D & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2+D/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \underline{c}_B \underline{B}^{-1} \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2+D/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5+D \end{bmatrix}$$

sigue 13-14

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5+D \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_B \underline{B}^{-1} \underline{A} - \bar{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5+D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5+D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{c}_B \underline{B}^{-1} \underline{A} - \bar{c} & \underline{c}_B \underline{B}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3/2+D/2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ z_1-c_1 & z_2-c_2 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

La solución sigue siendo óptima si $3/2+D/2 \geq 0$

13-15

$$\text{Si } 3/2+D/2 \geq 0 \longrightarrow D \geq -3 \longrightarrow 5+D \geq 2$$

En este caso $c_2 \geq 2$

Calculemos Z

$$Z = \underline{c}_B \underline{B}^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2+D/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 36 + 6D$$

13-16

Ahora bien si variamos $\bar{c}_1 = c_1 + D$

$$\underline{c}_B \underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x_1 \\ 0 & 5 & 3+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2-D/3 & 1+D/3 \end{bmatrix}$$

Similantemente como se procedió con c_2

$$\underline{c}_B \underline{B}^{-1} \underline{A} - \bar{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sigue 13-17

$$\underline{c}_B \underline{B}^{-1} \geq 0 \longrightarrow 3/2-D/3 \geq 0 \longrightarrow D \leq 4.5 \longrightarrow 3+D \leq 7.5$$

$$1+D/3 \geq 0 \longrightarrow D \geq -3 \longrightarrow 3+D \geq 0$$

En este caso $0 \leq c_2 \leq 7.5$

Calculemos Z

$$Z = \underline{c}_B \underline{B}^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2-D/3 & 1+D/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 36 + 2D$$

13-18

Si se permanece dentro de los límites del análisis de sensibilidad



Cambio en	Base	Solución	Fn objetivo
Coef V.N.B en Z	Permanece	Permanece	Permanece
Coef V.B en Z	Permanece	Permanece	Cambia
Recurso	Permanece	Cambia	Cambia

13-19

Cuando el problema tiene sólo 2 variables este análisis también se puede hacer gráficamente.



¿Entre que valores puede cambiar el coeficiente de costo de alguna variable sin que se modifique el valor de las variables de decisión actuales?

13-20

Análisis para C_1

Sea la F.O

$$Z = c_1 X_1 + 5X_2$$

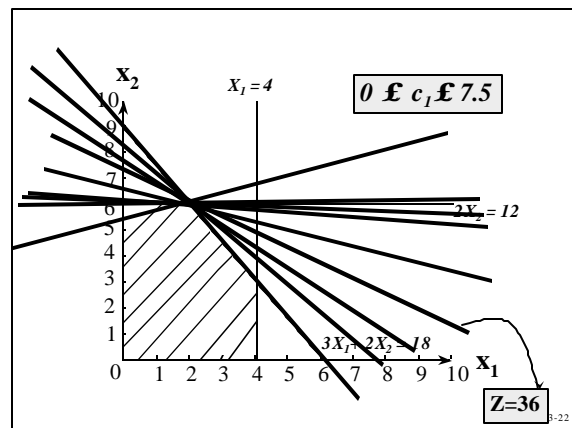


$$X_2 = \frac{c_1}{5} X_1 + \frac{Z}{5}$$

Si aumento o disminuyo C_1 estoy cambiando la pendiente de la recta. El aumento o disminución está permitido sólo hasta cierto punto

Veamos gráficamente

13-21



13-22

Este intervalo se obtuvo

$$\frac{-c_1}{5} \geq \frac{-3}{2} \longrightarrow C_1 \leq 7.5$$

$$\frac{-c_1}{5} \leq 0 \longrightarrow C_1 \geq 0$$

13-23

Análisis para C_2

Sea la F.O

$$Z = 3X_1 + c_2 X_2$$



$$X_2 = \frac{3}{C_2} X_1 + \frac{Z}{C_2}$$

Si aumento o disminuyo C_2 estoy cambiando la pendiente de la recta. El aumento o disminución está permitido sólo hasta cierto punto

13-24

Se obtiene entonces

$$\frac{3}{C_2} \geq \frac{3}{2} \longrightarrow \boxed{C_2 \geq 2}$$

$$\frac{3}{C_2} \geq 0 \longrightarrow \boxed{\text{No hay restricción}}$$

13-25