

Clase # 12

Análisis de sensibilidad (1)

12-1

En esta clase hablaremos sobre el análisis de sensibilidad, analizando el lado derecho, es decir los recursos o requerimientos.

Primero veremos el enfoque matricial, y luego se explicaran que significan los conceptos y cifras que se hallaron con los cálculos matriciales. Además se ilustrará gráficamente el problema de la Wyndor.

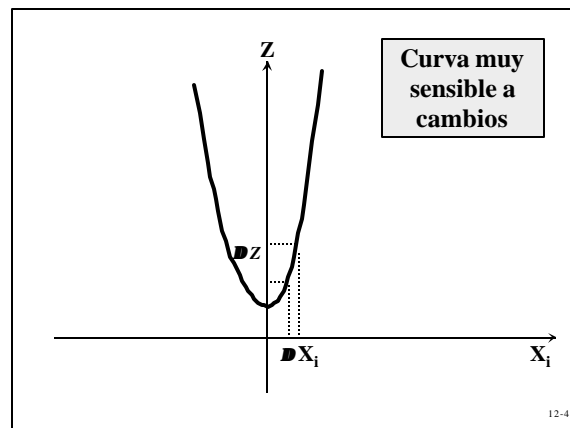
12-2

Suposición de la P.L. \Rightarrow (a_{ij}, b_i, c_j) constantes conocidas.

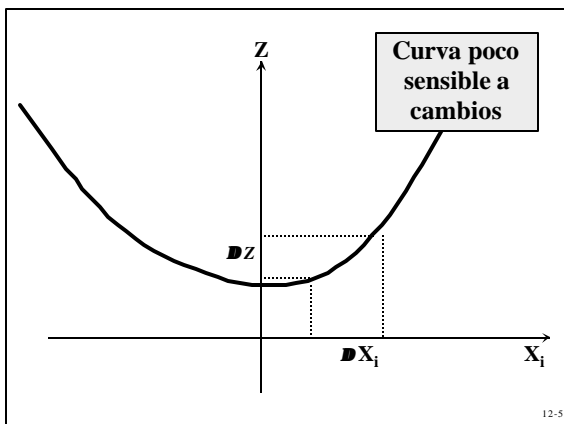
parámetros \Rightarrow estimaciones

Es importante llevar a cabo un análisis de sensibilidad, para investigar el efecto que tendría sobre la solución óptima y la función objetivo el hecho que los parámetros tomaran otros valores posibles.

12-3



12-4



12-5

Cómo cambian la solución y la función objetivo cuando los parámetros varían:

- Resolver de nuevo el problema
- Análisis de sensibilidad.

veamos \rightarrow

12-6

Aplicación del análisis de sensibilidad.

Se pueden producir cambios en:

- b_i : (recursos).
- a_{ij} : (coeficientes tecnológicos).
- c_j : (coeficientes de costos).

12-7

Pero antes de entrar de lleno con el análisis de sensibilidad es importante recordar:



$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B} & \underline{B^{-1}} \\ 0 & & \underline{B^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\underline{c} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{A} & \underline{I} & \underline{b} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B} \underline{B^{-1}} \underline{A} - \underline{c} & \underline{c_B} \underline{B^{-1}} & \underline{c_B} \underline{B^{-1}} \underline{b} \\ 0 & \underline{B^{-1}} \underline{A} & \underline{B^{-1}} & \underline{B^{-1}} \underline{b} \end{bmatrix}$$

12-8

Cualquier tabla del simplex se puede obtener a partir de:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\underline{c} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{A} & \underline{I} & \underline{b} \end{bmatrix} \quad \text{Tabla original}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B} & \underline{B^{-1}} \\ 0 & & \underline{B^{-1}} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz que premultiplica a la tabla original}$$

12-9

1. Cambios en las b_i (recursos).

Los cambios en los recursos se pueden ver claramente en el ejemplo de la Wyndor.

En este caso serían un aumento o disminución en la disponibilidad de horas en las plantas 1,2 y 3.

veamos

12-10

Para $\underline{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Esta es la base óptima

Tenemos

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c_B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

12-11

En este ejemplo podemos aplicar lo visto :

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B} & \underline{B^{-1}} \\ 0 & & \underline{B^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Ya que

$$\underline{c_B} \underline{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

12-12

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array} \right] \\
 \Downarrow \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \text{Tabla óptima}
 \end{array}$$

12-13

Definición.

$$z = \underline{c_B} \underline{B^{-1}} \underline{A}$$

Para el ejemplo

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C_B} \underline{B^{-1}} \underline{A} - \underline{c} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Supongamos que se cambia la disponibilidad de horas en la planta 2 (b_2).

$$\text{Si } \bar{b}_2 = b_2 + D \Rightarrow \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12+D \\ 18 \end{bmatrix}$$

Notemos que sólo cambia

$$\begin{bmatrix} \underline{c_B} \underline{B^{-1}} \underline{b} \\ \underline{B^{-1}} \underline{b} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Debido a que tiene el vector } \underline{b}$$

Si cambian los recursos, varía tanto el valor de las V.B y por tanto el valor de la función objetivo.



Se está poniendo en riesgo la factibilidad.

$$\begin{bmatrix} 1 & \underline{c_B} \underline{B^{-1}} \underline{A} - \underline{c} & \underline{c_B} \underline{B^{-1}} & \underline{c_B} \underline{B^{-1}} \underline{b} \\ 0 & \underline{B^{-1}} \underline{A} & \underline{B^{-1}} & \underline{B^{-1}} \underline{b} \end{bmatrix}$$

Resolvamos este problema con b_2 (sólo se varía un recurso al tiempo).

$$\underline{C_B} \underline{B^{-1}} \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12+D \\ 18 \end{bmatrix} = 18 + (3/2)D + 18 = 36 + (3/2)D$$

Precio sombra

$$\underline{B^{-1}} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12+D \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 1/3 D \\ 6 + 1/2 D \\ 2 - 1/3 D \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Acá podemos ver los rangos de variación permitidos para b_2

Recuerde que el problema es factible si $b_i \geq 0$



$$2 + 1/3 D \geq 0 \longrightarrow D \geq -6$$

$$6 + 1/2 D \geq 0 \longrightarrow D \geq -12$$

$$2 - 1/3 D \geq 0 \longrightarrow D \leq 6$$

$$-6 \leq D \leq 6$$

$$6 \leq 12 + D \leq 18$$

$$6 \leq \bar{b}_2 \leq 18$$

La disponibilidad de horas en la planta 2 puede variar entre 6 y 18 sin que se afecte la factibilidad del problema.

2. Ahora supongamos que se cambia la disponibilidad de horas en la planta 3 (b_3).

$$\text{Si } \bar{b}_3 = b_3 + D \Rightarrow \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 + D \end{bmatrix}$$

Notemos que sólo cambia

$$\begin{bmatrix} c_B & B^{-1} \underline{b} \\ & B^{-1} \underline{b} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Debido a que tiene el vector } \underline{b}$$

12-19

Resolvamos este problema (sólo se varía un recurso al tiempo).

$$\underline{C}_B \underline{B}^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 + D \end{bmatrix} = 18 + 18 + D = 36 + D$$

Precio sombra

$$\underline{B}^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 + D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1/3 D \\ 6 \\ 2 + 1/3 D \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Acá podemos ver los rangos de variación permitidos para b_3

12-20

Recuerde otra vez que el problema es factible si $b_i \geq 0$



$$2 - 1/3 D \geq 0 \longrightarrow D \leq 6$$

$$2 + 1/3 D \geq 0 \longrightarrow D \geq -6$$

$$-6 \leq D \leq 6$$

$$12 \leq 18 + D \leq 24$$

$$12 \leq \bar{b}_3 \leq 24$$

La disponibilidad de horas en la planta 3 puede variar entre 12 y 24 sin que se afecte la factibilidad del problema.

12-21

3. Ahora supongamos que se cambia la disponibilidad de horas en la planta 1 (b_1).

Si aplicamos el procedimiento utilizado en las plantas 2 y 3 obtenemos que:

$$4 \leq b_1 \leq 14$$

12-22

Este análisis de sensibilidad es válido mientras se permanezca en el rango calculado



Si se sale del rango se puede aplicar el método simplex dual.

12-23

Veamos ahora que significado tienen los precios sombra y cómo se ve esto gráficamente.

12-24

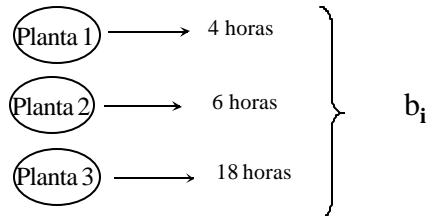
Precios sombra.

Se les denomina también costo marginal o precios duales.

Siempre dan la interpretación económica del modelo.

12-25

Retomando el ej. de Wyndor, suponga la decisión inicial tentativa de las disponibilidades de recursos son:



12-26

¿Hasta cuánto se puede pagar por una hora adicional del recurso?



Se utiliza un criterio que determina la contribución económica de cada recurso, a la medida del desempeño Z .

El simplex nos da esta información a través de los precios sombra.

12-27

Los precios sombra del recurso i (denotado por Y_i^*), miden el *valor marginal del recurso*



La tasa en la que puedo variar Z , al variar (una unidad) la cantidad que se proporciona del recurso b_i .

Y_i^* → Coeficiente de la variable de holgura en el renglón (0) de la tabla simplex final.

12-28



Sol (2,6,2,0,0) Z=36

12-29

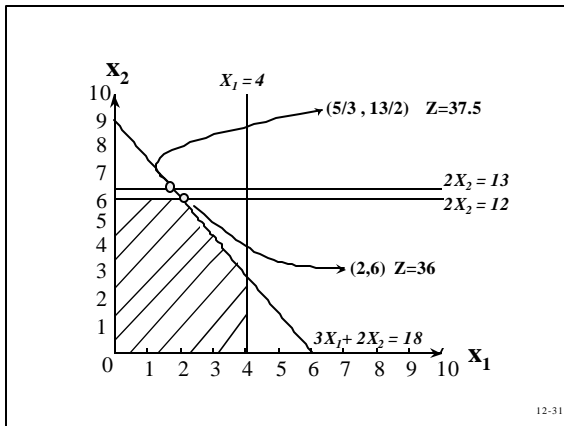
Los precios sombra son los siguientes:

Y_1^* → 0 Precio sombra P1

Y_2^* → 3/2 Precio sombra P2

Y_3^* → 1 Precio sombra P3

Veamos gráficamente → 12-30



Podemos ver que un incremento de b_2 en una unidad, aumenta el valor de la función objetivo en $3/2$.

$$Y_2^* = \Delta Z = 37.5 - 36 = 3/2$$

Si b_2 se incrementa en una unidad, el valor de Z se incrementa en Y_2^*

Si aumento en 1 hora el tiempo de producción a la semana de la planta 2, mi ganancia semanal se aumenta en US\$1500.

¿Debo hacer esto?



Depende de la ganancia marginal de otros productos que por el momento usan ese tiempo de producción

Si existe un producto actual que contribuye con menos de US\$1500 de ganancia semanal por una hora de producción, deberían reasignarse los tiempos de producción

¿Que significa $Y_1^* = 0$?

Si varía (una unidad) la disponibilidad de las horas de trabajo en la planta 3, la función objetivo no se aumenta.

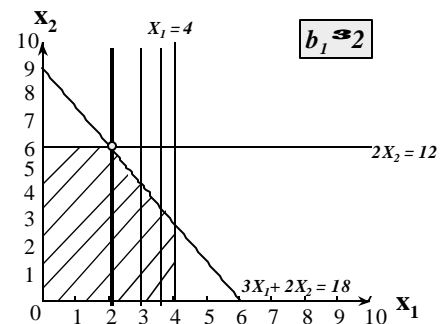
¿Que significa $Y_3^* = 1$?

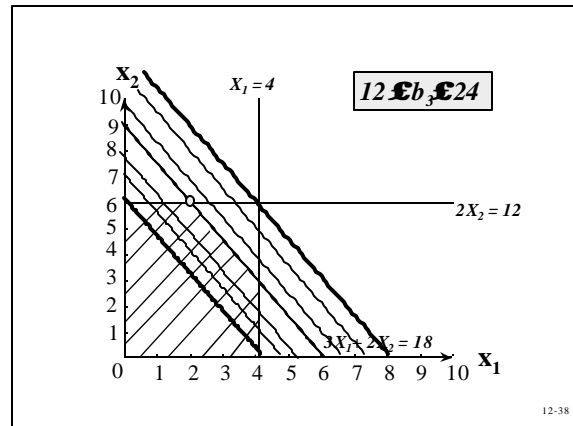
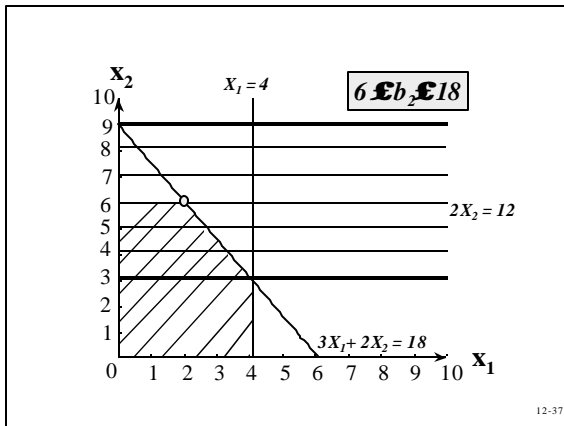
Si varía (una unidad) la disponibilidad de las horas de trabajo en la planta 3, la función objetivo varía en 1.

¿ Pero hasta donde puedo aumentar o disminuir estos b_i ?



Veámoslo gráficamente



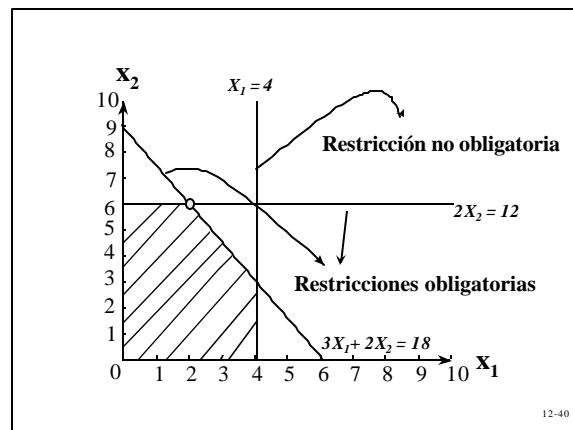


Todas las restricciones con precio dual mayor que cero son parámetros sensibles.

↓

Esto se relaciona con el concepto de restricciones de atadura (obligatorias).

Veamos gráficamente → 39



Restricciones obligatorias

Su precio dual generalmente es positivo , y no tienen ni excedencia ni holgura

↙ ↘

Restricciones no obligatorias

Su precio dual siempre es cero , y tienen excedencias u holguras. 12-41