

Clase # 11

Interpretación económica de dualidad.

Para el problema primal se tiene:

- Z = Ganancia total debida a todas las actividades.
- x_j = Nivel de la actividad j (para $j = 1, 2, \dots, n$).
- c_j = Ganancia unitaria debida a la actividad j .
- b_i = Cantidad del recurso i disponible para asignar a las actividades (para $i = 1, 2, \dots, m$).
- a_{ij} = Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j .

El problema dual:

$$y_0 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

y_i → Contribución a la ganancia por cada unidad del recurso i .

$b_i y_i$ → Aporte a la ganancia por disponer de b_i unidades del recurso i (en el primal).

y_0 → Ganancia total en la iteración actual.

y_i en el tablero simplex final es y_i^*



Precios sombra o precios duales.

Iter	V.B	Ec #	Coeficiente de								L.D
			Z	x_1	x_2	\dots	x_n	x_{n+1}	\dots	x_{n+m}	
Cualquiera	Z	0	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	\dots	$z_n - c_n$	y_1	y_m	y_0	

donde $z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$

El problema dual es:

$$\text{Min } y_0 = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

[horas/semana] * [US\$/hora] = [US\$/semana]

S.a (restricción para hacer puertas)

$$1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \leq 3$$

[horas/puerta] * [US\$/hora] = [US\$/puerta]

(restricción para hacer ventanas)

$$0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 5$$

[horas/ventana] * [US\$/hora] = [US\$/ventana]

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

¿Qué significa $z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$?



Es la contribución actual a la ganancia por utilizar la combinación de recursos necesarios para producir una unidad de la actividad j .

Los a_{ij} expresan la cantidad del recurso i que se usa para realizar una unidad de la actividad j .

Como ejemplo veamos el problema dual de la Wyndor:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Puertas} \\ \text{Ventanas} \end{array}$$

Significa que 1 y 3 horas, en las plantas 1 y 3 respectivamente, los puedo combinar para hacer una puerta y me gano cierta cantidad de dinero. Igualmente sucede con las ventanas, ya que si utilizo 2 horas en las plantas 2 y 3 puedo hacer una unidad y recibir un monto de dinero.

11-7

¿Qué significa $z_i - c_j \geq 0$ o equivalente/.

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad ?$$

Esto es que la contribución a la ganancia por usar esta combinación de recursos necesarios para producir 1 unidad de la actividad j, debe rentar como mínimo, la ganancia unitaria de la actividad j.

Es decir, si yo tengo 1 hora en la planta 1 y 3 horas en la planta 3 podría hacer una puerta. Si quiero utilizar esas horas en otra cosa, la ganancia debe ser como mínimo 3, pues de lo contrario es mejor hacer la puerta.

11-8

¿Qué significa $y_i \geq 0$?



La ganancia por cada unidad del recurso i, debe ser no negativa, de lo contrario sería mejor no utilizar este recurso en absoluto.

11-9

¿Qué significa $\text{Min } y_0 = \sum_{i=1}^m b_i y_i$?



Es la minimización total del valor implícito de los recursos consumidos por las actividades.

11-10

Comparemos los problemas.

$$\begin{array}{l} \text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 \\ [\text{US\$ / art}] * [\text{art / sem}] = [\text{US\$ / semana}] \end{array}$$

Maximizando la ganancia por hacer estas actividades

$$\begin{array}{l} \text{Min } y_0 = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ [\text{Horas / sem}] * [\text{US\$ / hora}] = [\text{US\$ / semana}] \end{array}$$

Minimizando los costos por hacer uso de estos recursos

11-11

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ [\text{horas / art}] * [\text{art / sem}] = [\text{horas / sem}] \end{array}$$

Restricción de horas

$$\begin{array}{l} 1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \leq 3 \\ [\text{Horas / sem}] * [\text{US\$ / hora}] = [\text{US\$ / semana}] \end{array}$$

Restricción de dinero

11-12

Si X_i es V.B

Iter	V.B	Ec	#	Coeficiente de						L.D
				Z	X_1	X_2	\dots	X_n	X_{n+1}	
Cualquiera	Z	0	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	\dots	$z_n - c_n$	y_1	y_m	y_0

Si $z_1 - c_1 = 0$ o equivalente $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$

Para las variables de decisión:

Si $(x_j > 0) \longrightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$

\downarrow

$z_j = c_j \quad z_j - c_j = 0$

Siempre que una actividad j opere a un nivel estrictamente positivo ($x_j > 0$), el valor marginal de los recursos que consume debe ser igual a la ganancia unitaria de esa actividad

Para las variables de holgura:

Si $(x_{n+i} > 0) \longrightarrow y_i = 0$
 En este caso sobran recursos y x_{n+i} es V.B

Si $y_i > 0 \longrightarrow$ En este caso no sobran recursos y x_{n+i} es V.N.B.

El valor marginal del recurso i es cero ($y_i = 0$), siempre que las actividades ($x_{n+i} > 0$) no se acaben la reserva de este recurso.

Variable	Renglon 0	
x_i	$z_i - c_i$	Para variables de decisión $i = 1, \dots, n$
x_{n+i}	y_i	Para variables de holgura $i = n+1, \dots, n+m$

En resumen el producto de una variable por su renglon 0 es 0.
 Un bien abundante es gratis (ley de oferta y de demanda)

Adaptación a otras formas del primal.

Forma no estándar	Forma no estándar equivalente
• Minimizar Z	• Maximizar (-Z)
• $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j \leq b_i$	• $-\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j \leq -b_i$
• $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j = b_i$	• $-\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j \leq -b_i$, $\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j \leq b_i$
• x_j n.r.s	• $x_j^+ - x_j^- \quad x_j^+, x_j^- \geq 0$

Problema dual

S. a $\text{Min } y_0 = \underline{y} \underline{b}$

$\underline{y} \underline{A} \leq \underline{c}$
 $\underline{y} \geq \underline{0}$

Convertido en la forma estándar

S. a $\text{Max } (-y_0) = -\underline{y} \underline{b}$

$-\underline{y} \underline{A} \leq -\underline{c}$
 $\underline{y} \geq \underline{0}$

Convertido en la forma estándar

S. a $\text{Max } \underline{Z} = \underline{c} \underline{x}$

$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$
 $\underline{x} \geq \underline{0}$

Su problema dual

S. a $\text{Min } -\underline{Z} = -\underline{c} \underline{x}$

$-\underline{A} \underline{x} \leq -\underline{b}$
 $\underline{x} \geq \underline{0}$

Una característica importante, es que cualquier problema puede ser primal o dual

Maximización Problema primal	Minimización Problema dual
•Restricción i \leq $=$ \geq	•Variable y_i $y_i \geq 0$ n.r.s $y_i \leq 0$
•Variable x_j $x_j \geq 0$ n.r.s $x_j \leq 0$	•Restricción j \geq $=$ \leq

11-19

Veamos como aplicar esta tabla para convertir primales en duales y viceversa.

1. Hallar el problema dual de este primal.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Max-Z} = -0.4 x_1 - 0.5x_2 & \longrightarrow & \text{Min } y_0 = 2.7y_1 + 6y_2 + 6y_3 \\
 \text{S.a} & & \text{S.a} \\
 0.3x_1 + 0.1 x_2 \leq 2.7 & \longrightarrow & y_1 \geq 0 \\
 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 & \longrightarrow & y_2 \text{ n.r.s} \\
 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 & \longrightarrow & y_3 \leq 0 \\
 x_1 \geq 0 & \longrightarrow & 0.3y_1 + 0.5 y_2 + 0.6 y_3 \geq -0.4 \\
 x_2 \geq 0 & \longrightarrow & 0.1y_1 + 0.5 y_2 + 0.4 y_3 \geq -0.5
 \end{array}$$

11-20