MÉTODO SIMPLEX

Es un método genérico de solución de problemas lineales, desarrollado por George Dantzig en 1947.

Matricialmente podemos representar un problema de PL en expresado en fomra canónica, de la siguiente manera:

Optimizar:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n + 0H1 + 0H2 + \ldots + 0Hm$$

Sujeta a:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n + 1H1 = b_1$$

$$a_{12}X2 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + 1H2 = b_2$$

.
.
.

$$a_{m1}X_2 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n + 1Hm = b_m$$

con $X_j \geq 0$, para todo j y $Hi \geq 0$, para todo i.

En el modelo podemos definir los siguientes vectores de números:

C: Vector de coeficientes objetivo (vector fila de n + m = k elementos), siendo m el número de restricciones y n el número de variables del problema.

C: ($C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots, C_{n+m}$)

Nótese que los elementos $C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots, C_{n+m}$ valen cero, pues son los coeficientes asociados a las variables de holgura.

X: vector de variables de decisión (vector columna de n + m = k elementos)

X = $(X_1, X_2, \ldots, X_n, H1, H2, \ldots, Hm)^t$

Nótese que las variables H1, H2, … , Hm corresponderían a las variables $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+m}$ respectivamente.

b: Vector de coeficientes recurso (vector columna de m elementos). También se conoce como vector del lado derecho, vector de términos independientes o RHS vector (Righ Hand Side vector).

b = $(b_1, b_2, \ldots, b_m)^t$

A: matriz de coeficientes tecnológicos (matriz de tamaño (m, (m+n)).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & & & & \\ . & . & . & & & & \\ . & . & . & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} & 0 & 0 & 0\ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora es posible expresar el modelo en forma matricial así:

Optimizar: Z = **CX**
Sujeta a: **AX = b**

Con **X ≥ 0**

Recuerde que un problema de minimización se puede convertir en uno de minimización cambiando Z por –Z.

Min Z = CX es equivalente a: Max Z = -CX.

Ejemplo 1:

La Wyndor Glass Co. es una empresa dedicada a la elaboración de artículos de vidrio de alta calidad (puertas y ventanas) los cuales se hacen en 3 plantas diferentes. La gerencia de la empresa está interesada en un programa de cambio de la producción y se propone incursionar con 2 nuevos productos.

Producto 1: Puerta de vidrio con marco en aluminio
Producto 2: Ventana de vidrio con marco en madera

Según el departamento de comercialización toda la producción de éstos puede colocarse en el mercado.

En la planta 1 se producen molduras y marcos de aluminio, en la planta 2 molduras y marcos en madera y en la planta 3 se hace y se ensambla el vidrio. La utilidad de cada puerta es de €3.000 y de cada ventana es de €5.000. El tiempo disponible a la semana en las plantas 1, 2 y 3 respectivamente es de 4 Hr, 12 Hr y 18 Hr por semana. Cada lote de puertas requiere 1 Hr. en la planta 1 y 3 en la planta 3 y cada lote de ventanas requiere 2 Hr. En la planta 2 y 2 Hr. En la planta 3. Se fabrican lotes de 20 productos por semana. La tasa de producción será el número de lotes producidos a la semana.

Se debe determinar la tasa de producción de los 2 productos para maximizar las utilidades sujeto a las limitaciones que tiene la empresa. La siguiente tabla resume los datos del problema:

Planta	**Tiempo de producción por lote (horas)**		**Tiempo de producción disponible a la semana (horas)**
	P1 (puertas)	**P2 (ventanas)**	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia por lote	€3	€5	

Definición de Variables. Sea:

X1: Número de lotes del producto 1 fabricados por semana.
X2: Número de lotes del producto 2 fabricados por semana.

En síntesis, el problema formulado como un modelo de P. L. sería:

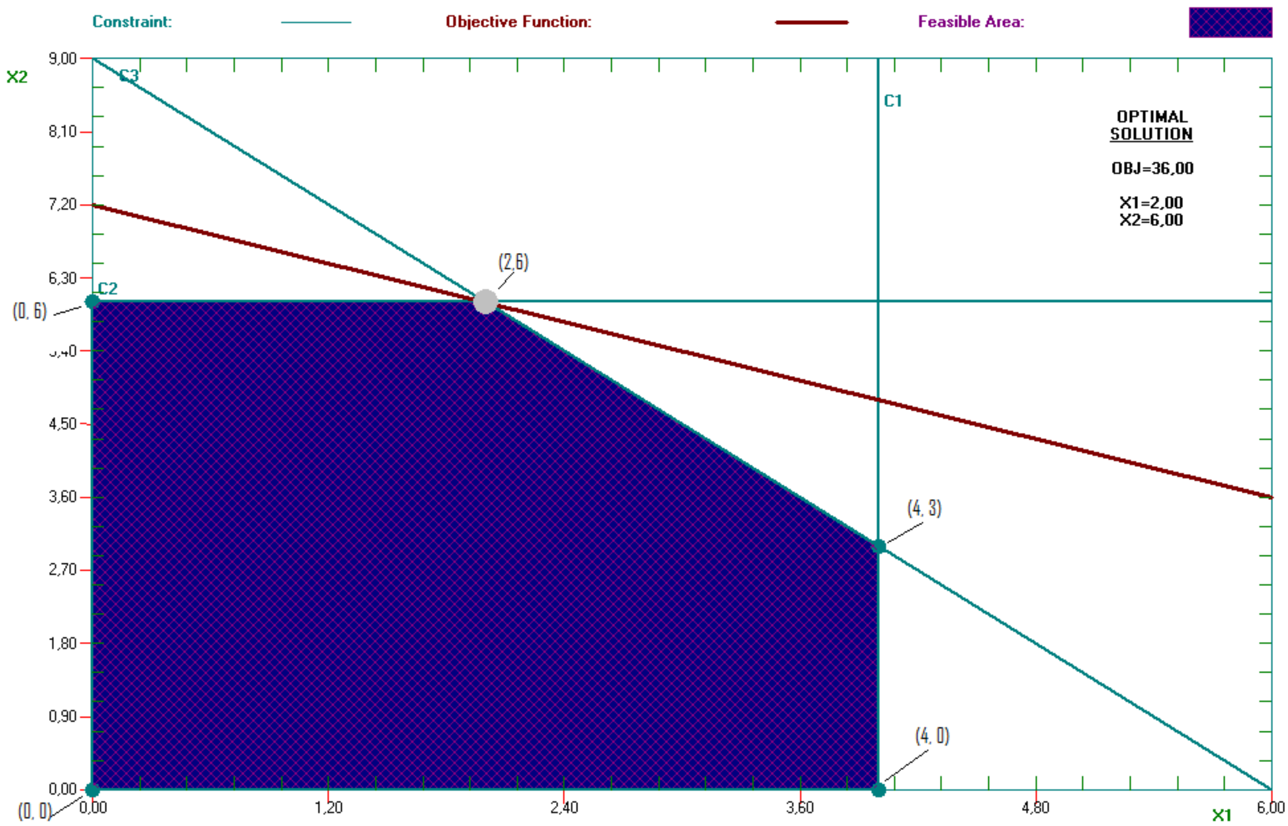
Maximizar Z = 3X 1 + 5X 2

Sujeto a

$X1 \leq 4$ (Horas disponibles en la planta 1)
$2X2 \leq 12$ (Horas disponibles en la planta 2)
$3X1 + 2X2 \leq 18$ (Horas disponibles en la planta 3)
$X1, X2 \geq 0$ (Restricción de no negatividad)

Solución.

Utilizando el método gráfico podemos analizar la solución al problema: (Programa usado WinQSB 2.0)



Sabemos que las soluciones factibles están en los vértices de la región factible. Se llaman Soluciones Factibles en un vértice (FEV). En el ejemplo serían (0,0), (4, 0), (4, 3), (2, 6) o (6,0). Recuerde que cada solución es un punto en el plano cartesiano formado por los ejes X1 y X2, de modo que el primer valor corresponde a X1 y el segundo a X2. Por ejemplo en el punto (4, 3) X1 vale 4 y X2 vale 3.

Método simplex:

1. Pasamos el problema a forma canónica:

Maximizar Z = 3X1 + 5X2 + 0H1 + 0H2 + 0H3

Sujeto a:

$$\begin{array}{ccccccccccc} X1 & + & X2 & + & H1 & + & & + & & = & 4 \\ & + & 2X2 & + & & + & H2 & + & & = & 12 \\ 3X1 & + & 2X2 & + & & + & & + & H3 & = & 18 \end{array}$$

$$X1,\ X2,\ H1,\ H2,\ H3 >= 0$$

Este problema es similar al anterior solo que su forma se ha aumentado con las variables de holgura. Las soluciones posibles para el problema aumentado se denominan **Soluciones básicas factibles** s.b.f y se obtienen de las soluciones FEV aumentada con los respectivos valores de las variables de holgura. Por ejemplo en el punto (0, 0) la solución básica factible sería (0, 0, 4, 12, 18). Los valores 4, 12 y 18, corresponde a H1, H2 y H3 (*variables básicas*) que se obtienen de reemplazar los valores de X1 y X2 (*Variables no básicas*) en cada una de las restricciones.

2. **Algebra del método Simplex.**
1. **Paso inicial.** Se selecciona una solución básica factible cualquiera. Por facilidad se toman como variables no básicas y las variables de holgura como variables básicas. Para el caso del ejemplo se toma X1=0 y X2=0, de ahí la solución inicial es (0, 0, 4, 8, 12).
2. **Paso iterativo.** Se busca la solución factible en un vértice adyacente (Solución básica factible adyacente)[1]. Para ello se selecciona una variable no básica para que entre a formar parte de las variables básicas y una variable básica se convierte en no básica (variable básica saliente). La variable entrante es aquella que contribuya a aumentar en la mayor medida a la función objetivo (la que tenga mayor coeficiente positivo). En el ejemplo sería X2 ya que tiene el mayor coeficiente (5). Para identificar la variable básica que sale debe ser aquella que incremente en menor medida el valor de la variable básica entrante (en cada restricción se divide el lado derecho por el coeficiente de la variable básica entrante y se toma la de menor valor). Para hallar el resto de la solución factible se transforma el sistema de ecuaciones para dejarlo de manera similar al paso inicial (método de Gauss Jordan).
3. **Prueba de optimalidad.** Se analiza la función objetivo en términos de las variables no básicas, si todas tienen coeficientes negativos o cero la solución es óptima y el proceso termina, de lo contrario se vuelve al paso 2.

Existen varias maneras de resolver problemas de PL usando el método simplex, veremos la forma tabular que es más intuitiva.

Lo primero adecuar el sistema de ecuaciones así:

Ec (0)	Z	-3X1	-	5X2	+	0H1	+	0H2	+	0H3	=	0
Ec (1)		X1	+	X2	+	H1	+		+		=	4
Ec (2)			+	2X2	+		+	H2	+		=	12
Ec (3)		3X1	+	2X2	+		+		+	H3	=	18

Construimos entonces la tabla inicial así: Iteración 0.

Variable Básica	Ecu. Núm.	Coeficientes de						RHS[2]	Razón
		Z	X1	X2	H1	H2	H3		
Z	0	1	-3	**-5**	0	0	0	0	
H1	1	0	1	0	1	0	0	4	4/0=∞
H2	2	0	0	2	0	1	0	12	12/2=6 Sale
H3	3	0	3	2	0	0	1	18	18/2=9

⇧ Entra X2

Transformamos la tabla anterior, de manera que en la columna de la variable entrante tenga el valor 1 en el coeficiente de la variable saliente y 0 en todos los demás. Así:

[1] *Dos soluciones básicas factibles son adyacentes si toda menos una de sus variables no básicas son las mismas, e igualmente si todas menos una de sus variables básicas son iguales.*
[2] *RHS: Right Hand Size (Lado derecho de cada ecuación).*

- Para lograr un 1 en el coeficiente de X2 en la ecuación 2 (Variable saliente) dividimos toda la ecuación por 2.
- Para lograr un 0 en el coeficiente de X2 en la ecuación 3 Multiplicamos la nueva ecuación 2 por -2 y la sumamos a la ecuación 3.
- Para lograr un cero en el coeficiente de X2 en la ecuación 0 multiplicamos la ecuación 2 por 5 y la sumamos a la ecuación 0.

La nueva tabla del método simplex queda entonces así:

Iteración 1:

Variable Básica	Ecu. Núm.	Coeficientes de						RHS
		Z	X1	X2	H1	H2	H3	
Z	0	1	-3	0	0	5/2	0	30
H1	1	0	1	0	1	0	0	4
X2	2	0	0	**1**	0	1/2	0	6
H3	3	0	3	0	0	-1	1	6

Prueba de Optimalidad:

Vemos que en la ecuación 0 hay coeficientes negativos, lo que indica que hay otra posible mejor solución, por lo tanto se continua con otra iteración.

Iteración 2:

Variable Básica	Ecu. Núm.	Coeficientes de						RHS	Razón
		Z	X1	X2	H1	H2	H3		
Z	0	1	-3	**0**	0	5/2	0	30	
H1	1	0	1	0	1	0	0	4	4/1=4
X2	2	0	0	1	0	1/2	0	6	6/0= ∞
H3	3	0	3	0	0	-1	1	6	6/3=2 Sale

Entra X2

Ahora es necesario transformar nuevamente la tabla anterior para lograr que la columna de la variable entrante tenga cero en todos los coeficientes excepto para el de la variable entrante (X1) que debe ser 1. Usando transformaciones de Gauss podemos obtener la siguiente tabla:

Variable Básica	Ecu. Núm.	Coeficientes de						RHS
		Z	X1	X2	H1	H2	H3	
Z	0	1	0	0	0	3/2	1	36
H1	1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
X2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
X1	3	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

Prueba de Optimalidad:

Vemos que en la ecuación 0 no hay valores negativos, por lo tanto la solución actual es óptima. Esta se obtiene de los valores que resultan en la columna RHS, por lo tanto: X1=2, X2=6 y esto produce un valor para Z de 36.

Como respuesta a nuestro problema ejemplo entonces se deben producir 2 lotes del producto 1 y 6 lotes del producto 2.

Algunos casos especiales:

1. **Empate en la variable básica entrante**: en este caso se elije una cualquiera de las variables.
2. **Empate en la variable que sale**: es posible que se entre en un ciclo infinito al elegir cualquiera de las variables empatadas, si esto sucede, es necesario intentar con la otra variable.
3. **No hay variable básica que sale**: esto se reconoce si todos los coeficientes de la columna de la variable que entra son negativos o cero (excluyendo la ecuación 0). En este caso el método se detiene y se emite el mensaje de que *Z no es acotada*. En problemas reales es posible que esté mal formulado, pudiendo faltar una restricción relevante.
4. **Soluciones óptimas múltiples**: Si una variable no básica tiene coeficiente 0 en la ecuación 0 final, de manera que al aumentar su valor la función objetivo no cambia de valor. Para hallarlas se continua haciendo iteraciones eligiendo como variable básica entrante la la variable no básica con coeficiente 0.

Solución de problemas de PL usando WinQSB.

Ejemplo 2.

La empresa **AXUS S.A.** desea conocer la cantidad de productos A, B y C a producir para maximizar el beneficio, si cada unidad vendida genera en utilidad $150, $210 y $130 por unidad respectivamente. Cada producto pasa por 3 mesas de trabajo, restringiendo la cantidad de unidades producidas debido al tiempo disponible en cada una de ellas. La siguiente tabla muestra el tiempo requerido por unidad de cada producto en cada mesa y el tiempo total disponible semanalmente (tiempo dado en minutos):

	Tiempo requerido Mesa 1	**Tiempo requerido Mesa 2**	**Tiempo requerido Mesa 3**
Producto 1	10	12	8
Producto 2	15	17	9
Producto 3	7	**7**	**8**
Tiempo total disponible por mesa	3.300	3.500	2.900

Se supone que cada unidad producida es vendida automáticamente. Determinar la combinación de productos que maximicen la utilidad para la compañía.

El modelo matemático es:

Max. Z = $\$150X_1 + \$210X_2 + \$130X_3$

Sujeto a:

$10X_1 + 15X_2 + 7X_3 \leq 3300$

$12X_1 + 17X_2 + 7X_3 \leq 3500$

$8X_1 + 9X_2 + 8X_3 \leq 2900$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Usando WinQSB se obtiene la siguiente solución:

	17:50:47		Thursday	February	10	2005		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	150.0000	0	-14.9315	at bound	-M	164.9315
2	X2	105.4795	210.0000	22,150.6900	0	basic	182.7500	315.7143
3	X3	243.8356	130.0000	31,698.6300	0	basic	91.0714	186.6667
	Objective	Function	(Max.) =	53,849.3200				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	3,289.0410	<=	3,300.0000	10.9589	0	3,289.0410	M
2	C2	3,500.0000	<=	3,500.0000	0	6.9863	2,537.5000	3,514.0350
3	C3	2,900.0000	<=	2,900.0000	0	10.1370	1,852.9410	2,957.1430

ENTENDIENDO LA MATRIZ FINAL DEL MÉTODO SIMPLEX

Esta matriz presenta suficiente información sobre el modelo resuelto. La primera parte (***Solution Summary***) corresponde al análisis de las variables definidas (X1, X2 y X3).

	17:50:47		Thursday	February	10	2005		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	150.0000	0	-14.9315	at bound	-M	164.9315
2	X2	105.4795	210.0000	22,150.6900	0	basic	182.7500	315.7143
3	X3	243.8356	130.0000	31,698.6300	0	basic	91.0714	186.6667
	Objective	Function	(Max.) =	53,849.3200				

La columna ***Valores de la solución*** (***Solution Value***) presenta los valores óptimos encontrados. En este ejemplo se tiene que X1 es 0 unidades, X2 es 105,4795 unidades y X3 es 243,8356 unidades.

La columna ***Costo o Utilidad Unitaria*** (***Unit Cost or Profit***) muestra los coeficientes de la función objetivo para cada variable.

La columna ***Contribución Total*** (***Total Contribution***) representa el costo o utilidad generado por cada variable. Por ejemplo, si el valor de la variable X2 es 105,4795 unidades y la utilidad unitaria es $210, el beneficio total resultará de la multiplicación de ambos valores dando como resultado $22.150,69. Justo debajo de la última contribución aparece el valor de Z óptimo ($53.849,32).

La columna ***Costo Reducido*** (***Reduced Cost***) identifica el costo que genera incrementar una unidad para cada variable no básica. La siguiente columna llamada ***Estatus de la Variable*** (***Basis Status***) muestra si una variable es básica (***Basic***) o no (***at bound***).

La siguiente parte de la matriz final (***Constraint Summary***), presenta las variablesde holgura del sistema (C1, C2, C3).

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	3,289.0410	<=	3,300.0000	10.9589	0	3,289.0410	M
2	C2	3,500.0000	<=	3,500.0000	0	6.9863	2,537.5000	3,514.0350
3	C3	2,900.0000	<=	2,900.0000	0	10.1370	1,852.9410	2,957.1430

La columna ***Lado de la mano derecha*** (***Left Hand Side***) muestra el valor alcanzado al reemplazar los valores de X1, X2 y X3 en cada restricción (recuerde que cada restricción se identifica con su variable de holgura).

Las dos columnas siguientes (***Direction*** y ***Right Hand Side***) muestran las especificaciones dadas a las restricciones en cuanto al operador de relación (≤) y los valores originales de las restricciones (3.300, 3.500 y 2.900 minutos).

La columna ***Déficit o Superávit*** (***Slack or Surplus***) muestran los valores de las variables de holgura y la columna ***Precios Sombras*** (***Shadow Price***) corresponde a los precios sombras; cuánto se estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional de cada recurso.

BIBLIOGRAFIA

Hiller y Lieberman, Capítulo 4.