

Clase # 17

Programación Entera.

17-1

Programación entera es programación lineal con la restricción adicional de que los valores de las variables de decisión sean enteros.

⊗ P.E pura: Todas las variables de decisión tienen valores enteros.

⊗ P.E mixta (PEM) : Algunas de las variables de decisión tienen valores enteros. Las demás cumplen con la suposición de divisibilidad.

17-2

⊗ P.E. Binaria (PEB) : Utiliza variables binarias

Sólo tiene 2 alternativas posibles

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si la decisión } j \text{ es si.} \\ 0 & \text{si la decisión } j \text{ es no.} \end{cases}$$

Las X_j son variables de decisión restringidas a tomar valores 0,1.

17-3

Ejemplo de formulación.

La CALIFORNIA MANUFACTURING CO. , está analizando la posibilidad de expansión.

Fábrica: Construcción de una fábrica en Los Angeles o en San Francisco, o tal vez en ambas ciudades

Almacén: Construcción de un almacén a lo sumo, pero la decisión está restringida a que si hay almacén en ese sitio tiene que haber fábrica.

Veamos

17-4

# de decisión	Pregunta sí o no	Variable de decisión	VNP Beneficio	Capital requerido
1	¿Construir fábrica en Los Angeles?	X_1	\$9 mill	\$6 mill
2	¿Construir fábrica en San Francisco?	X_2	\$5 mill	\$3 mill
3	¿Construir almacén en Los Angeles?	X_3	\$6 mill	\$5mill
4	¿Construir almacén en San Francisco?	X_4	\$4 mill	\$2mill
Capital disponible : \$10 mill				

17-5

Formulemos entonces el problema:

1. Variables de decisión.

La variable de decisión X_j es tal que:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{se construye.} \\ 0 & \text{no se construye.} \end{cases}$$

$j = 1, 2, 3, 4.$

17-6

2.Función objetivo,

$$\text{Max } Z = 9 X_1 + 5 X_2 + 6 X_3 + 4 X_4$$

Como las variables de decisión son adimensionales, Z tiene unidades de [\$ millones]

17-7

3.Restricciones

$$X_3 + X_4 \leq 1 \quad \text{Alternativas mutuamente excluyente}$$

$$\begin{aligned} X_3 &\leq X_1 \\ X_4 &\leq X_2 \end{aligned} \quad \text{Se construye la fabrica solo si se construye el almacén}$$

$$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 2X_4 \leq 10 \quad \text{Capital disponible}$$

$$X_j \in [0,1] \text{ para } j=1,2,3,4.$$

17-8

El problema completo será:

$$\text{Max } Z = 9 X_1 + 5 X_2 + 6 X_3 + 4 X_4$$

$$X_3 + X_4 \leq 1$$

$$-X_1 + X_3 \leq 0$$

$$-X_2 + X_4 \leq 0$$

$$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 2X_4 \leq 10$$

$$X_j \in [0,1] \text{ para } j=1,2,3,4.$$

17-9

Otras posibilidades de formulación.

Es ocasiones es necesario utilizar variables para expresar relaciones combinatorias dentro de la formulación de los problemas.

Para esto, además de las variables originales X_j , se hace necesario el uso de variables auxiliares y_i del tipo binario, introducidas en la reformulación

17-10

1. Restricciones una u otra.

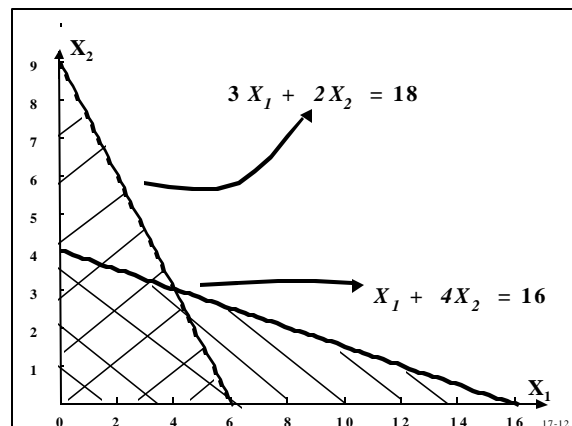
Sólo una (cualquiera de las 2) debe cumplirse, mientras que la otra puede cumplirse, pero no se requiere que lo haga.

Esto tiene una aplicación práctica en los casos en que se tienen 2 tipos de recursos para un cierto propósito.

$$\text{P.ej: o bien } 3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$\text{o } X_1 + 4X_2 \leq 16 \quad \text{Veamos}$$

17-11



17-12

Para lograr lo enunciado anteriormente el problema se formula así:

Una de las dos	O una de las dos
$3 X_1 + 2X_2 \leq 18 + M$ $X_1 + 4X_2 \leq 16$	$3 X_1 + 2X_2 \leq 18$ $X_1 + 4X_2 \leq 16 + M$

Esto se lleva a la forma equivalente

$$\left. \begin{array}{l} 3 X_1 + 2X_2 \leq 18 + My \\ X_1 + 4X_2 \leq 16 + M (1-y) \end{array} \right\} y \in [0,1]$$

17-13

2. Deben cumplirse K de N restricciones.

Considere la situación en la que el modelo completo incluye un conjunto de N restricciones posibles entre las que sólo K de ellas se deben cumplir. (suponga que $K < N$).

Las N-K restricciones que no se eligen quedan eliminadas del problema, aun cuando por coincidencia las soluciones factibles puedan satisfacer algunas de ellas.

Veamos

17-14

Se tienen N restricciones del tipo

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_2$$

⋮

$$f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_N$$

17-15

La formulación equivalente del requerimiento de que K de estas restricciones se deban cumplir será:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_1 + M y_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_2 + M y_2$$

⋮

$$f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq d_N + M y_N$$

$$\sum_{i=1}^N y_i = N - K \longrightarrow y_i = 0 \text{ indica que la restricción se cumple}$$

$$y_i \in [0,1] \text{ para } i=1,2,\dots,N.$$

17-16

3. Funciones con N valores posibles.

Considere la situación en la que una función dada tome cualquiera de N valores dados.

Denotemos este requisito así:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1, \text{ o } d_2, \dots, \text{ o } d_N$$

O un caso especial en que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

sigue

17-17

La formulación equivalente de este requerimiento será:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^N d_j y_j$$

$$\sum_{i=1}^N y_i = 1$$

$$y_i \in [0,1] \text{ para } i=1,2,\dots,N.$$

17-18

4. Problema de costo fijo.

Es bastante común incurrir en un costo fijo cuando se emprende una actividad. Por ejemplo, cuando se inicia una corrida de un lote pequeño de producción existen algunos costos fijos y otros variables.

En general el costo total de la actividad (por ejemplo j) puede representarse por una función de la forma:

$$f_j(X_j) = \begin{cases} k_j + c_j X_j & \text{si } X_j > 0 \\ 0 & \text{si } X_j = 0 \end{cases}$$

sigue → 17-19

Se quiere minimizar

$$Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

s.a

$$f_j(X_j) = \begin{cases} k_j + c_j X_j & \text{si } X_j > 0 \\ 0 & \text{si } X_j = 0 \end{cases}$$

Donde puede haber otras restricciones adicionales.

Veamos la formulación equivalente

sigue → 17-20

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n (c_j X_j + k_j Y_j)$$

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } X_j > 0 \\ 0 & \text{si } X_j = 0 \end{cases}$$

Definiendo:

$$X_j \text{ £ } M Y_j$$

17-21

Otros ejemplos de P.E.M

Se presentará un ej de programación entera, donde las variables de decisión son continuas (PEM).

La división de investigación y desarrollo de una compañía manufacturera ha desarrollado 3 nuevos productos y se dispone de 2 plantas para fabricarlos.

Se quiere evitar la diversificación excesiva de la línea de productos de la compañía y por ello solo se fabricarán 2 de los 3 productos que han sido desarrollados, y sólo una de las plantas se utilizará para fabricarlos.

sigue → 17-22

		Horas por unidad de Producto			Horas disponibles por semana
		1	2	3	
Planta	1	3	4	2	30
	2	4	6	2	40
Ganancia unitaria		5	7	3	Miles de US\$
Ventas potenciales		7	5	9	Unidades por semana

Pasemos ahora a formular el problema

17-23

1. Variables de decisión.

X_j : Tasa de producción del producto j
j=1,2,3

2. Función objetivo.

$$\text{Max } Z = 5 X_1 + 7 X_2 + 3 X_3$$

17-24

3. Restricciones

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 30$$

$$4X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 40$$

$$X_1 \leq 7$$

$$X_2 \leq 5$$

$$X_3 \leq 9$$

$$X_j \geq 0 \text{ para } j=1,2,3.$$

17-25

¿Notó UD algo raro
en la formulación del
modelo?

Debemos hacer uso de variables binarias para formular adecuadamente algunas de las restricciones del problema.

Veamos

17-26

Nos dicen que sólo se pueden fabricar 2 de 3 productos.

Introducimos 3 variables binarias y_1, y_2, y_3 tales que:

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } X_j > 0 \text{ se puede cumplir} \\ & \text{(se puede producir } j) \\ 0 & \text{si } X_j = 0 \text{ se debe cumplir} \\ & \text{(no se puede producir } j) \end{cases}$$

para $j=1,2,3$.

sigue

17-27

Con la ayuda de la M grande obtenemos:

$$X_1 \leq My_1$$

$$X_2 \leq My_2$$

$$X_3 \leq My_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

y_i es binaria para $i=1,2,3$

17-28

Nos dicen que sólo se puede utilizar una de las 2 fábricas.

Introducimos la variable binaria y_4 tal que:

$$Y_4 = \begin{cases} 1 & \text{si } 4X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 40 \\ & \text{Debe cumplirse (se elige la planta 2)} \\ 0 & \text{si } 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 30 \\ & \text{Debe cumplirse (se elige la planta 1)} \end{cases}$$

sigue

17-29

Con la ayuda de la M grande obtenemos:

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 30 + My_4$$

$$4X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 40 + M(1 - y_4)$$

y_i es binaria para $i=1,2,3,4$

La formulación del modelo completo será:

17-30

Max $Z = 5 X_1 + 7 X_2 + 3 X_3$			
s.a			
	X_1		£ 7
		X_2	£ 5
		X_3	£ 9
	X_1	$- My$	£ 0
	X_2	$- My_2$	£ 0
		$X_3 - My_3$	£ 0
		$y_1 + y_2 + y_3$	£ 2
	$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 - My_4$		£ 30
	$4X_1 + 6X_2 + 2X_3 - M (1 - y_4)$		£ 40
y_i es binaria para $j=1,2,3,4$ $X_j \geq 0$ para todo j			

17-31