ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD USANDO WINQSB

Un modelo de programación lineal de un problema es una abstracción de las condiciones reales de este, simplificadas al obtener el problema asumido. Cuando escribimos un modelo, damos por aceptado que los valores de los parámetros se conocen con certidumbre; pero en la realidad no siempre se cumple que los valores sean verídicos, ya que por ejemplo las variaciones en los costos de los materiales, en la mano de obra o en el precio de un producto, ocasionan cambios en los coeficientes de la función objetivo. Así mismo las demoras en los envíos de los proveedores, las huelgas, los deterioros no previstos y otros factores imponderables generarán cambios en la disponibilidad de los recursos.

Por otra parte, en la mayoría de los problemas reales es necesario estimar parámetros tales como los coeficientes objetivo, los coeficientes del lado derecho y los coeficientes tecnológicos, con base en datos que no siempre son confiables, o hacerlo sobre "meras conjeturas".

Por todo lo anterior es necesario que una vez obtenida la solución optima del modelo, evaluemos la incidencia, en ella, de posibles cambios en los parámetros o en la estructura del problema.

Tomemos como ejemplo el problema de producción de Windor Glass Co., expuesto en el ejemplo 1 del documento método Simplex:

Maximizar Z = 3X1 + 5X2
Sujeto a

$$X1 \leq 4 \quad \text{(Horas disponibles en la planta 1)}$$
$$2X2 \leq 12 \quad \text{(Horas disponibles en la planta 2)}$$
$$3X1 + 2X2 \leq 18 \quad \text{(Horas disponibles en la planta 3)}$$
$$X1,\ X2 \geq 0 \quad \text{(Restricción de no negatividad)}$$

La solución final ysando WinQSB es:

	16:51:19		Sunday	August	31	2008		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	2,0000	3,0000	6,0000	0	basic	0	7,5000
2	X2	6,0000	5,0000	30,0000	0	basic	2,0000	M
	Objective	Function	(Max.) =	36,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	2,0000	<=	4,0000	2,0000	0	2,0000	M
2	C2	12,0000	<=	12,0000	0	1,5000	6,0000	18,0000
3	C3	18,0000	<=	18,0000	0	1,0000	12,0000	24,0000

La sensibilidad se pueda analizar verificando los cambios en:

1. **Cambios en los coeficientes de la Función Objetivo (FO)**. Al revisar la tabla final del método simplex, encontramos las columnas:
   - ✓ Allowable Min C(j) (mínimo permitido)
   - ✓ Allowable Max. C(j) (máximo permitido)

Frente a cada variable de decisión (Variables básicas) encontramos en dichas columnas el rango en el cual pueden variar los coeficientes de dichas variables. Para el ejemplo, X1 puede variar entre 0 y 7,5 sin que la optimalidad de la solución cambie. Igualmente, X2 puede variar entre 2 y M (M es un valor numérico muy grande). Para el ejemplo, la utilidad por cada unidad de producto 1 puede variar entre 0 y 7,5 sin que el valor de la solución cambie (Use WinQSB para probar con algunos de esos valores). Igualmente, para el producto 2, cualquier ingreso por encima de 2 no cambiará el valor de la solución óptima.

2. **Cambios en el coeficiente de una variable no básica (V.N.B) en la Función Objetivo**. Un cambio en un coeficiente de una V.N.B en la F.O puede cambiar la solución óptima. Si se mejora el coeficiente en la FO de una V.N.B, X_k, en su costo reducido (columna Reduced Cost), al menos una solución óptima tendrá a X_k como V.B.

   Si se mejora el coeficiente en la FO de una V.N.B X_k, en más de su costo reducido, cualquier solución óptima tendrá a X_k como VB (excepto en el caso de degeneración de la solución).

   Recuerde que solo las variables no básicas tienen costo reducido mayor o igual a cero.

3. **Precios sombra**. También llamados precios duales. Son un indicador de cuando conviene aumentar el lado derecho de las restricciones. En general para las restricciones podemos considerar:
   - ✓ Si la restricción es >= entonces un precio sombra no positivo aumenta los costos.
   - ✓ Si la restricción es <= Precio sombra no negativo aumenta las ganancias. Para el ejemplo, las restricciones 2 y 3 tienen precios sombra positivos, lo que nos indica cuanto incrementa la FO por cada unidad de recurso adicional.
   - ✓ Si la restricción de igualdad, Precio sombra puede ser: Positivo, negativo, o cero.

4. **Variables de holgura o exceso.** En la tabla del final del método simplex, obtenida con WinQSB hay una columna rotulada: Slack o Surplus (Defecto o Exceso), un valor frente a cada restricción.
   - ✓ Cualquier restricción con precio sombra no cero, debe ser una restricción obligatoria (es decir, tener una holgura, o exceso igual a cero). En el ejemplo anterior las restricciones 2 y 3 son obligatorias.
   - ✓ Cualquier restricción con una holgura o exceso diferente de cero, tiene precio sombra igual a cero. En el ejemplo, la restricción 1 (C1) tiene una holgura de 2 unidades, por lo tanto incrementar ese recurso solo aumentará los costos.
   - ✓ Si tanto el precio sombra como la holgura (o exceso) son cero, significa que en un vértice están convergiendo más de dos restricciones.

   Se tienen además dos columnas: Allowable Min. RHS (Mínimo recurso del lado derecho) y Allowable Max. RHS (Máximo recurso del lado derecho) que nos indican el rango en el cual se puede variar el lado derecho de cada restricción sin que la optimalidad se afecte.

5. **Adición de una nueva restricción al modelo.** Muchas veces es necesario analizar la sensibilidad de la solución óptima, cuando se agrega al modelo una restricción que no se considero inicialmente, ya sea por olvido o por decisión de quien planteó el modelo.

   El primer paso en el análisis de los cambios que sufre la solución óptima actual al considerar una nueva restricción, es determinar si esta se cumple para la solución óptima. Para ello deben reemplazarse los valores óptimos de las variables en la nueva restricción y determinar si se cumple la condición expresada. En caso afirmativo concluimos que la solución actual no se altera, pues la nueva restricción también se cumple para ella. Tal caso ocurre en situaciones como la que podemos observar en la Figura 1, en donde la nueva restricción A no altera la región de factibilidad. Otra situación del mismo caso es la que se muestra en la Figura 2 para la nueva restricción B, que sí altera la región de factibilidad, pero sin modificar el punto óptimo.

Pero cuando los valores óptimos no satisfacen la nueva restricción, concluimos que la solución óptima actual es infactible. La Figura 3 nos permite entender como lo que ocurrió fue que la nueva restricción afectó la región de factibilidad del problema, eliminando de ella el sector que incluye la solución óptima actual. Debemos entonces encontrar la nueva solución óptima que corresponda a la nueva región factible.

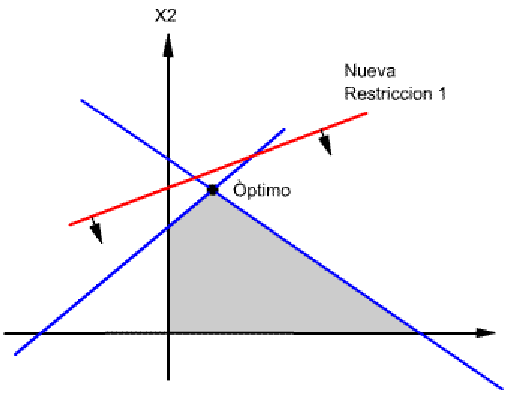

Figura 1

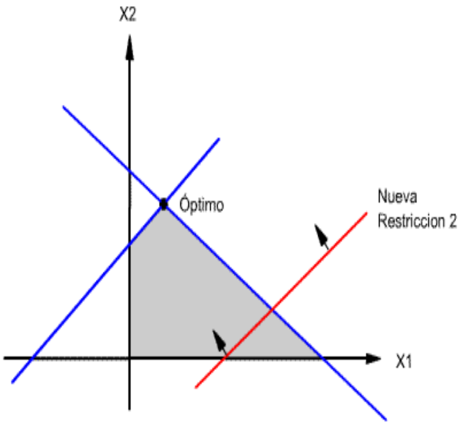

Figura 2

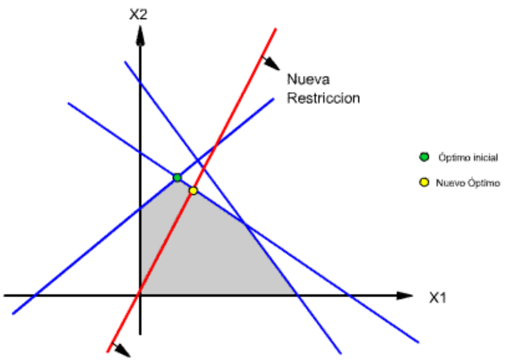

Figura 3

EJERCICIO: Considérese el siguiente problema

Maximizar: $Z = 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + X_4$

sujeta a:
$$
\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 - X_3 &\leq 4 \\
2X_1 + 3X_3 + X_4 &\leq 6 \\
4X_1 - X_2 + X_3 + 2X_4 &\leq 12 \\
X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

¿Qué sucede con dicha solución al realizar, independientemente, los siguientes cambios?

a) Si se intercambia C_1 por $C_1' = 7$.

b) Si se intercambia C_1 por $C_1' = 1$.

c) Si se intercambia C_2 por $C_2' = 6$

d) Si se intercambia simultáneamente C_1 y C_3 por $C_1' = 2$ y $C_3' = 7$.

e) Si el vector de recursos cambia a $b' = (2,8,10)^T$

f) Si el vector de recursos cambia a $b' = (3, 6,12)^T$

g) Si se adiciona al modelo original la siguiente restricción: $X_1 + X_3 \geq 4$

h) Si se adiciona al modelo original la siguiente restricción: $5X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 12$

i) Si se intercambia a a_4 por $a_4' = (1, 2, 1)^T$