

Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 2. Runde, Aufgabe 2

Es sei k eine positive ganze Zahl. In einem Kreis mit Radius 1 seien endlich viele Sehnen gezogen. Jeder Durchmesser des Kreises habe mit höchstens k dieser Sehnen gemeinsame Punkte.

Man beweise, daß die Summe der Längen aller dieser Sehnen kleiner als $k \cdot \pi$ ist.

Lösung von Darij Grinberg:

Wir bezeichnen unsere endlich vielen Sehnen mit $s_1, s_2, \dots, s_n$ und nennen sie **Startsehnen**. Wir müssen zeigen, daß die Summe der Längen aller Startsehnen kleiner als $k \cdot \pi$ ist.¹

Unser Kreis hat den Radius 1, also den Durchmesser $2 \cdot 1 = 2$ und die Umfangslänge 2π .

Wenn wir im folgenden von **Bögen** sprechen, werden wir Kreisbögen meinen; dabei zählen wir die zwei Endpunkte eines Bogens *nicht* zum Bogen selber, d. h. wir arbeiten mit *offenen Bögen*.

Ist AB eine beliebige Sehne in unserem Kreis, dann bezeichnen wir mit $b(AB)$ den kürzeren der zwei von dieser Sehne aufgespannten Bögen, und mit $|b(AB)|$ die Länge dieses Bogens. Ist die Sehne s ein Durchmesser, dann ist der Bogen $b(AB)$ nicht eindeutig definiert, weil ein Durchmesser den Kreisumfang in zwei Halbkreisbögen zerlegt, die gleich lang sind; dann können wir aber $|b(AB)|$ als die Länge von jedem von diesen zwei gleich langen Halbkreisbögen definieren; dann ist also $|b(AB)| = \pi$.

Jetzt definieren wir den Begriff des **Doppelbogens**:

Sei AB eine beliebige Sehne in unserem Kreis. Ist die Sehne AB ein Durchmesser des Kreises, dann bezeichnen wir den gesamten Kreis ohne die zwei Punkte A und B als **Doppelbogen** zur Sehne AB . Ist die Sehne AB kein Durchmesser von unserem Kreis², dann betrachten wir den Bogen $b(AB)$ und den zu ihm diametral gegenüberliegenden Bogen auf unserem Kreis (also das Spiegelbild des Bogens $b(AB)$ an dem Mittelpunkt des Kreises). Diese zwei Bögen sind offensichtlich disjunkt³, und ihre Vereinigung bezeichnen wir im folgenden als **Doppelbogen** zur Sehne AB . Der Doppelbogen zur Sehne AB ist also immer die Vereinigung zweier Bögen: Ist die Sehne AB ein Durchmesser, dann ist der Doppelbogen zur Sehne AB die Vereinigung der zwei von dem Durchmesser AB abgeschnittenen Kreisbögen; ist die Sehne AB kein Durchmesser, dann ist der Doppelbogen zur Sehne AB die Vereinigung des Bogens $b(AB)$ mit dem zu ihm diametral gegenüberliegenden Bogen.

¹Wir können mit gutem Recht voraussetzen, daß unter den Startsehnen $s_1, s_2, \dots, s_n$ keine entarteten Sehnen der Länge 0 vorkommen: Erstens scheinen solche "Sehnen" nicht in der Intention der Aufgabe zu liegen; außerdem ist klar, daß wenn man unter den Startsehnen solche entarteten Sehnen hat, man sie einfach entfernen kann (die Summe der Längen aller Sehnen ändert sich dadurch nicht, und die Bedingung, daß jeder Kreisdurchmesser höchstens k Startsehnen schneidet, bleibt dabei auch gültig).

²zu diesem Fall siehe Fig. 1

³Hier fließt mit ein, daß wir den Bogen $b(AB)$ als den *kleineren* von den zwei von der Sehne AB aufgespannten Kreisbögen definiert haben!

Für jede Sehne AB in unserem Kreis werden wir den Doppelbogen zur Sehne AB abkürzend mit $d(AB)$ bezeichnen. Die Länge $|d(AB)|$ dieses Doppelbogens wird definiert als die Summe der Längen des Bogens $b(AB)$ und des zu ihm diametral gegenüberliegenden Bogens; natürlich ist diese Länge $|d(AB)|$ dann gleich $2 \cdot |b(AB)|$, weil der Bogen $b(AB)$ und der zu ihm diametral gegenüberliegende Bogen gleich lang sind (aus Symmetriegründen), und daher die Summe der Längen dieser zwei Bögen einfach die doppelte Länge des ersten ist. Für den Fall, daß die Sehne AB ein Durchmesser unseres Kreises ist, definiert man die Länge $|d(AB)|$ des Doppelbogens zur Sehne AB als die Umfangslänge des ganzen Kreises, d. h. es gilt dann $|d(AB)| = 2\pi$. Wegen $|b(AB)| = \pi$ ist also $|d(AB)| = 2 \cdot |b(AB)|$. Somit gilt für jede Sehne AB die Gleichung

$$|d(AB)| = 2 \cdot |b(AB)|. \quad (1)$$

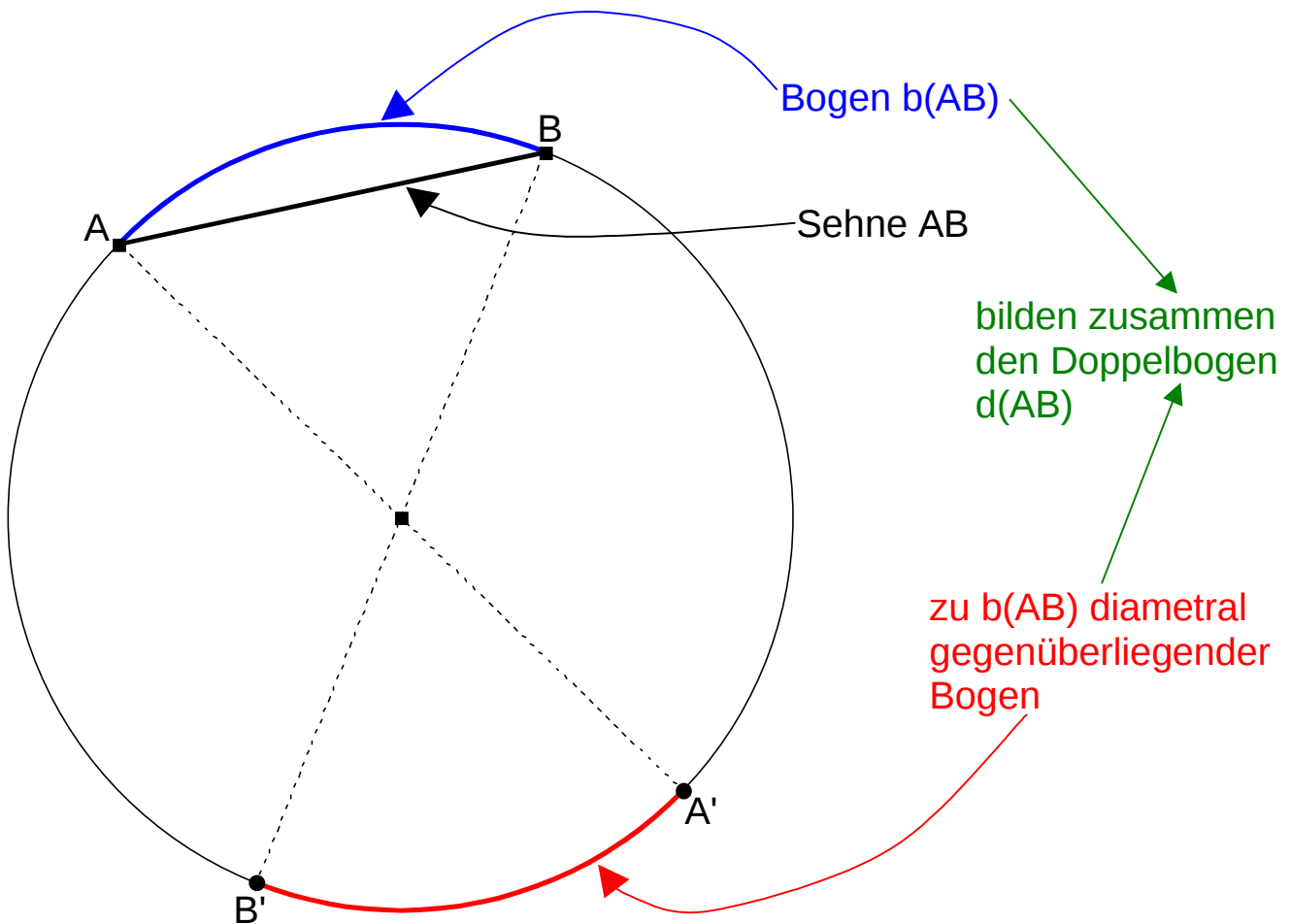


Fig. 1

Schließlich definieren wir die **Endpunkte** eines Doppelbogens: Ist die Sehne AB ein Durchmesser in unserem Kreis, dann hat der Doppelbogen $d(AB)$ zwei Endpunkte (nämlich die Punkte A und B); ist die Sehne AB kein Durchmesser, dann bezeichnen wir die Endpunkte der zwei Bögen, aus denen der Doppelbogen $d(AB)$ zusammengesetzt ist (also die Punkte A und B und die zu diesen Punkten diametral gegenüberliegenden Punkte) als die vier **Endpunkte** des Doppelbogens $d(AB)$.

Bemerkung: Wir haben gerade von den Endpunkten eines Doppelbogens gesprochen; zwar hat jeder Doppelbogen Endpunkte, doch sie werden nicht als Punkte auf dem Doppelbogen angesehen (d. h. unsere Doppelbögen sind Vereinigungen *offener* Bögen).

Wir zeigen zuerst:

Hilfssatz 1: Ist AB eine Sehne in unserem Kreis, und liegt ein Punkt P auf dem Doppelbogen $d(AB)$, dann schneidet der durch den Punkt P gehende Kreisdurchmesser die Sehne AB .

Beweis: Ist die Sehne AB ein Durchmesser, dann bleibt nichts zu beweisen, weil jeder Kreisdurchmesser jeden Kreisdurchmesser schneidet (und zwar im Mittelpunkt des Kreises). Also brauchen wir im folgenden nur den Fall zu betrachten, wenn die Sehne AB kein Durchmesser ist. Dann ist der Doppelbogen $d(AB)$ die Vereinigung des Bogens $b(AB)$ mit dem zu diesem Bogen diametral gegenüberliegenden Bogen. Demzufolge haben wir bezüglich der Lage des Punktes P auf diesem Doppelbogen zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Der Punkt P liegt auf dem Bogen $b(AB)$.

Fall 2: Der Punkt P liegt auf dem zu dem Bogen $b(AB)$ diametral gegenüberliegenden Bogen.

Im Fall 1 können wir wie folgt argumentieren (Fig. 2): Der durch P gehende Kreisdurchmesser ist die Strecke PP' , wobei P' der zu P diametral gegenüberliegende Punkt auf unserem Kreis ist. Wir müssen also zeigen, daß die Strecke PP' die Sehne AB schneidet. Doch die Strecke PP' enthält die Strecke OP in sich, wobei O der Mittelpunkt unseres Kreises ist. Somit reicht es aus zu zeigen, daß die Strecke OP die Sehne AB schneidet.

Da der Punkt P auf dem Bogen $b(AB)$ liegt, verläuft die Halbgerade OP innerhalb des Winkelfeldes des Winkels AOB . Folglich schneidet diese Halbgerade OP die Sehne AB . Der Schnittpunkt muß dabei innerhalb oder auf der Peripherie von unserem Kreis liegen (weil er ja auf der Sehne AB liegt!); also muß er auf der Strecke OP liegen⁴. Unser Schnittpunkt liegt also auf der Sehne AB und auf der Strecke OP . Daraus folgt, daß die Strecke OP die Sehne AB schneidet, womit der Beweis von Hilfssatz 1 für den Fall 1 fertig ist.

⁴Denn von allen Punkten auf der *Halbgeraden* OP liegen nur diejenigen innerhalb oder auf der Peripherie des Kreises, die auch auf der *Strecke* OP liegen.

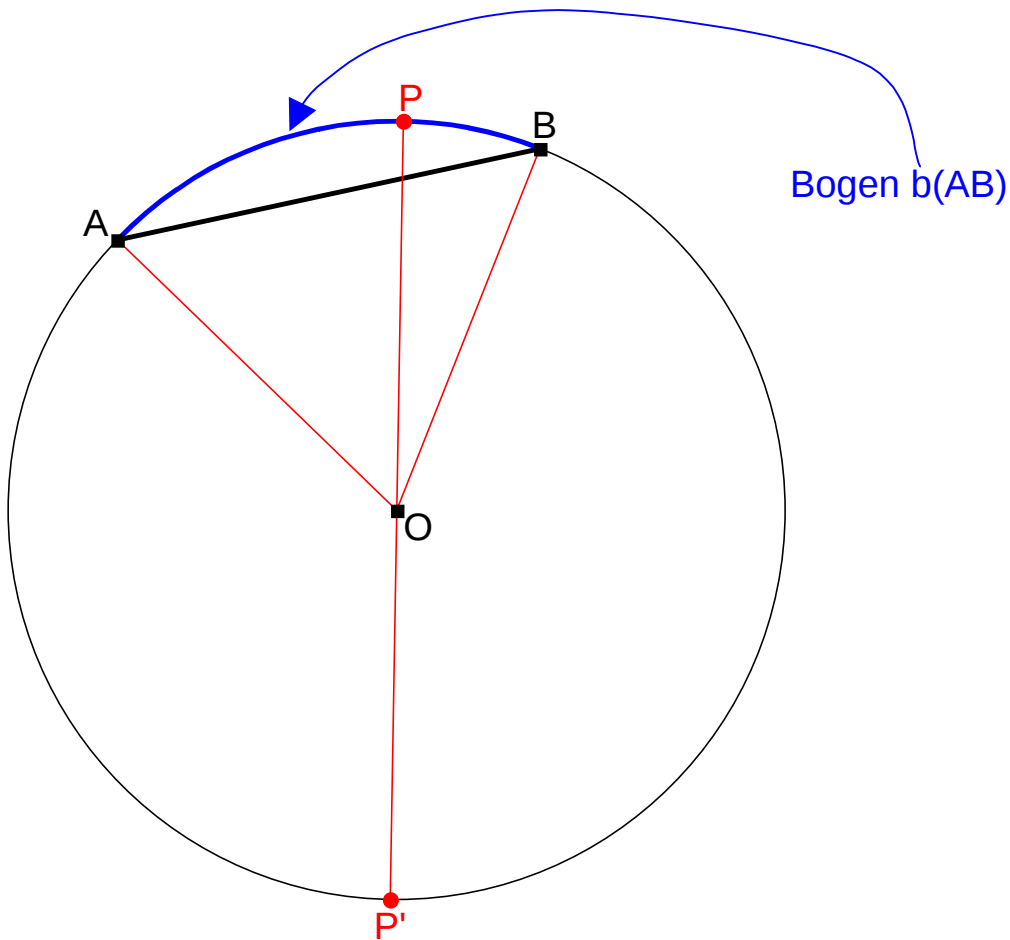


Fig. 2

Jetzt werden wir den Fall 2 auf den Fall 1 zurückführen (Fig. 3): Da der Punkt P auf dem zu dem Bogen $b(AB)$ diametral gegenüberliegenden Bogen liegt, liegt der zu P diametral gegenüberliegende Punkt P' auf unserem Kreis auf dem Bogen $b(AB)$ selber. Daher können wir unsere Überlegungen von Fall 1 auf den Punkt P' anwenden und erhalten, daß der durch den Punkt P' gehende Kreisdurchmesser die Sehne AB schneidet. Doch der durch den Punkt P' gehende Kreisdurchmesser ist nichts anderes als der durch den Punkt P gehende Kreisdurchmesser (da die Punkte P und P' einander auf dem Kreis diametral gegenüberliegen). Also schneidet der durch den Punkt P gehende Kreisdurchmesser die Sehne AB . Damit ist auch der Fall 2 abgehandelt und Hilfssatz 1 bewiesen.

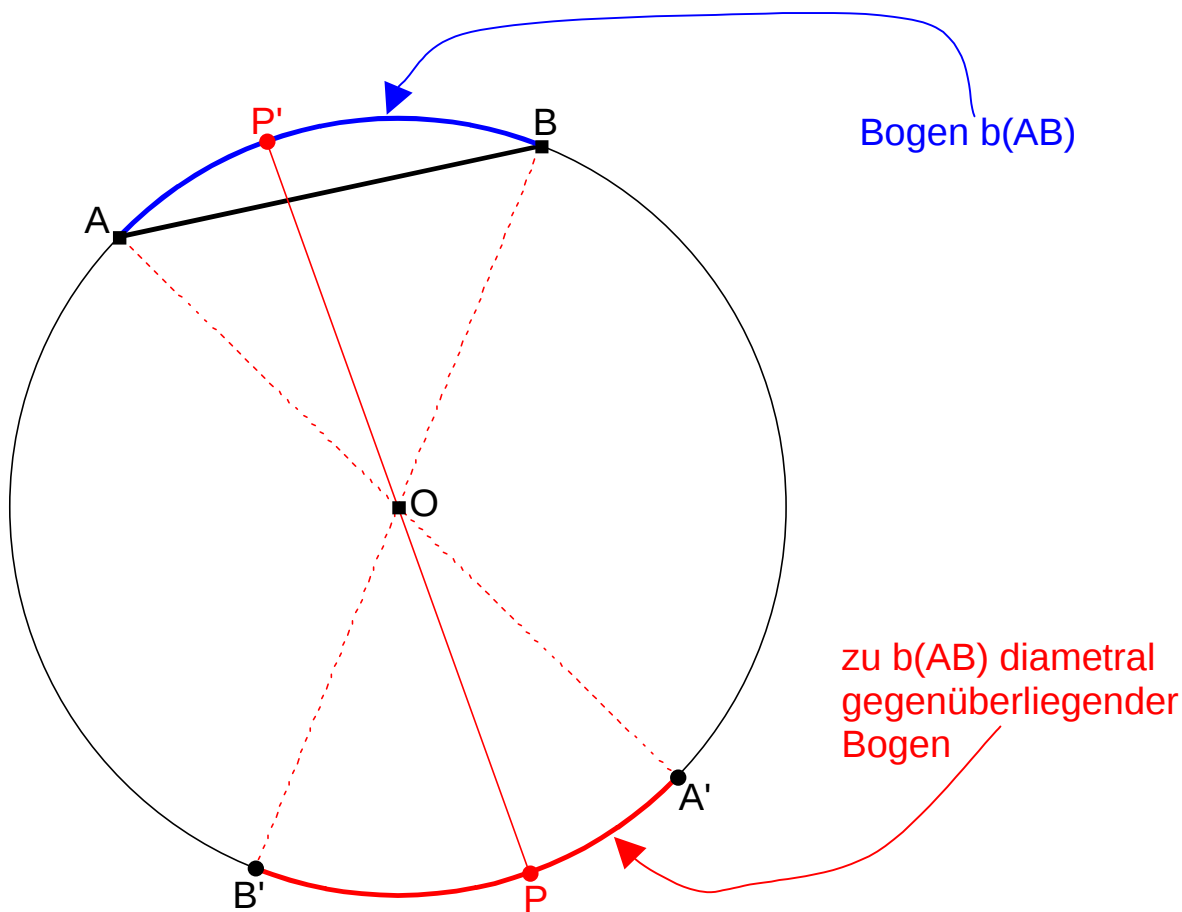


Fig. 3

Jetzt betrachten wir unsere n Startsehn $s_1, s_2, \dots, s_n$, und die Doppelbögen $d(s_1), d(s_2), \dots, d(s_n)$ zu diesen Sehnen. Diese n Doppelbögen bezeichnen wir als **Startdoppelbögen**.

Hilfssatz 2: Sei P ein Punkt auf dem Kreisumfang. Dann liegt der Punkt P auf höchstens k verschiedenen Startdoppelbögen.

Beweis: Angenommen, der Punkt P würde auf mehr als k Startdoppelbögen liegen. Seien $d(s_{p_1}), d(s_{p_2}), \dots, d(s_{p_u})$ diese Startdoppelbögen, wobei $u > k$ ist. Nach Hilfssatz 1 wissen wir nun, daß wenn der Punkt P innerhalb des Doppelbogens $d(AB)$ zu einer Sehne AB liegt, dann der durch P gehende Kreisdurchmesser die Sehne AB schneidet. Folglich gilt für jedes natürliche t mit $1 \leq t \leq u$, daß der durch P gehende Kreisdurchmesser die Startsehne s_{p_t} schneidet (denn der Punkt P liegt auf dem Doppelbogen $d(s_{p_t})$). Wegen $u > k$ schneidet also der durch P gehende Kreisdurchmesser mehr als k Startsehn. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß jeder Kreisdurchmesser höchstens k Startsehn schneidet. Damit haben einen Widerspruch erhalten. Folglich kann der Punkt P nicht auf mehr als k Startdoppelbögen liegen; also liegt er auf höchstens k Startdoppelbögen, und damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Wir führen nun weitere Begriffe ein:

Sind A und B zwei Punkte auf unserem Kreis, dann bezeichnen wir mit $g(AB)$ denjenigen Kreisbogen, den man überstreicht, wenn man von dem Punkt A aus gegen den Uhrzeigersinn den Kreis entlangläuft, bis man an dem Punkt B angekommen ist.

⁵ Dieser Kreisbogen ist nicht immer derselbe wie $b(AB)$; der Kreisbogen $b(AB)$ ist immer der kürzere von den zwei von der Sehne AB aufgespannten Kreisbögen, während der Kreisbogen $g(AB)$ manchmal der kürzere, manchmal aber auch der längere von diesen Kreisbögen sein kann (in Abhängigkeit von der Lage der Punkte A und B). Die Länge des Kreisbogens $g(AB)$ bezeichnen wir mit $|g(AB)|$.

Betrachten wir nun alle Startdoppelbögen $d(s_1), d(s_2), \dots, d(s_n)$ und ihre Endpunkte. Sei E_1 einer von diesen Endpunkten; die anderen Endpunkte seien mit $E_2, E_3, \dots, E_x$ bezeichnet, und zwar nicht in der Reihenfolge der Doppelbögen, zu denen sie gehören, sondern in der Reihenfolge, in denen man sie passiert, wenn man von dem Punkt E_1 ausgehend gegen den Uhrzeigersinn die Kreisperipherie entlangwandert. Falls dabei zwei Endpunkte von verschiedenen Startdoppelbögen zusammenfallen, dann werden sie nur als ein E_j gezählt (d. h. unter den Endpunkten $E_1, E_2, \dots, E_x$ kommen keine zwei gleichen vor!).⁶

Dann unterteilen die Endpunkte $E_1, E_2, \dots, E_x$ den Kreis in x verschiedene paarweise disjunkte Kreisbögen $g(E_1E_2), g(E_2E_3), \dots, g(E_{x-1}E_x), g(E_xE_1)$. Diese Kreisbögen nennen wir **Bruchkreisbögen**. Seien $\Delta_1 = |g(E_1E_2)|, \Delta_2 = |g(E_2E_3)|, \dots, \Delta_{x-1} = |g(E_{x-1}E_x)|, \Delta_x = |g(E_xE_1)|$ die Längen dieser Bruchkreisbögen. Die Summe dieser Längen ist dann gleich dem Umfang des ganzen Kreises, d. h. gleich 2π . Wir halten also fest:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{x-1} + \Delta_x = 2\pi. \quad (2)$$

Wir setzen $E_{x+1} = E_1$, sodaß der Kreisbogen $g(E_xE_1)$ als Kreisbogen $g(E_xE_{x+1})$ aufgefasst werden kann. Dann können wir jeden von den x Bruchkreisbögen $g(E_1E_2), g(E_2E_3), \dots, g(E_{x-1}E_x), g(E_xE_1)$ als $g(E_iE_{i+1})$ für ein natürliches i mit $1 \leq i \leq x$ schreiben (dies soll der Vereinheitlichung dienen). Wir werden nun zeigen:

Hilfssatz 3: Für jedes natürliche i mit $1 \leq i \leq x$, und für jedes natürliche j mit $1 \leq j \leq n$ gilt: Entweder überdeckt der Startdoppelbogen $d(s_j)$ den Bruchkreisbogen $g(E_iE_{i+1})$ vollständig, oder der Startdoppelbogen $d(s_j)$ ist zu dem Bruchkreisbogen $g(E_iE_{i+1})$ disjunkt.

Beweis: Angenommen, dies wäre nicht so, d. h. angenommen, es gäbe natürliche Zahlen i und j mit $1 \leq i \leq x$ und $1 \leq j \leq n$, für die gilt, daß der Startdoppelbogen $d(s_j)$ den Bruchkreisbogen $g(E_iE_{i+1})$ weder vollständig überdeckt, noch aber mit ihm disjunkt ist. Der Startdoppelbogen $d(s_j)$ muß dann den Bruchkreisbogen $g(E_iE_{i+1})$ *nur teilweise überdecken*. Das heißt aber, daß irgendwo innerhalb des Bruchkreisbogens $g(E_iE_{i+1})$ ein Endpunkt des Startdoppelbogens $d(s_j)$ liegt.⁷ Dies ist aber unmöglich,

⁵Natürlich ist der Kreisbogen $g(AB)$ auch offen, d. h. die Punkte A und B zählen nicht zum Kreisbogen $g(AB)$.

⁶Zwei Bemerkungen vorneweg:

1. Stets gilt $x \leq 4n$, weil jeder Doppelbogen höchstens 4 Endpunkte haben kann; es muß aber nicht unbedingt immer $x = 4n$ sein, denn einige der Startsehnen $s_1, s_2, \dots, s_n$ können Durchmesser sein (und Doppelbögen zu Durchmessern haben keine Endpunkte); außerdem können einige Endpunkte verschiedener Startdoppelbögen übereinstimmen (in diesem Fall werden sie ja nicht doppelt gezählt).

2. Der Fall $x = 0$, also wenn überhaupt keine Endpunkte von Startdoppelbögen vorliegen, ist nicht möglich, denn jeder Doppelbogen hat mindestens 2 Endpunkte.

⁷Hier haben wir folgende Eigenschaft von Doppelbögen benutzt:

Wenn ein Doppelbogen d einen Kreisbogen b nur teilweise überdeckt, dann muß der Kreisbogen b einen Endpunkt des Doppelbogens d enthalten.

Beweis: Der Doppelbogen d ist die Vereinigung zweier Kreisbögen b_1 und b_2 . Keiner von den zwei

da, gemäß unserer Definition der Punkte $E_1, E_2, \dots, E_x$, bei einem Umlauf des Kreises gegen den Uhrzeigersinn der Endpunkt E_{i+1} *direkt* nach dem Endpunkt E_i kommt (d. h. es liegt kein weiterer Endpunkt eines Startdoppelbogens dazwischen). Somit war unsere Annahme falsch, und Hilfssatz 3 muß wahr sein.

Für jeden Startdoppelbogen $d(s_j)$ können wir also alle Bruchkreisbögen einteilen in zwei Typen: Die einen werden von dem Startdoppelbogen $d(s_j)$ vollständig überdeckt, während die anderen mit $d(s_j)$ disjunkt sind. Wir definieren dementsprechend für jedes natürliche i mit $1 \leq i \leq x$ die Zahl $Z(j; i)$ nach der folgenden Regel: Wir setzen $Z(j; i) = 1$, wenn der Startdoppelbogen $d(s_j)$ den Bruchkreisbogen $g(E_i E_{i+1})$ vollständig überdeckt, und $Z(j; i) = 0$, wenn der Startdoppelbogen $d(s_j)$ und der Bruchkreisbogen $g(E_i E_{i+1})$ zueinander disjunkt sind. In Formeln:

$$Z(j; i) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } d(s_j) \supseteq g(E_i E_{i+1}); \\ 0, & \text{wenn } d(s_j) \cap g(E_i E_{i+1}) = \emptyset. \end{cases} \quad (3)$$

Da verschiedene Bruchkreisbögen $g(E_i E_{i+1})$ paarweise disjunkt sind, ist nun die Länge $|d(s_j)|$ des Startdoppelbogens $d(s_j)$ gleich der Summe der Längen $\Delta_i = |g(E_i E_{i+1})|$ aller derjenigen Bruchkreisbögen $g(E_i E_{i+1})$, die der Startdoppelbogen $d(s_j)$ vollständig überdeckt. Anders gesprochen, ist $|d(s_j)|$ gleich der Summe der Längen Δ_i für alle natürlichen i mit $1 \leq i \leq x$, die die Eigenschaft $Z(j; i) = 1$ haben. Wir können dies durch die Formel

$$|d(s_j)| = Z(j; 1) \cdot \Delta_1 + Z(j; 2) \cdot \Delta_2 + \dots + Z(j; x-1) \cdot \Delta_{x-1} + Z(j; x) \cdot \Delta_x \quad (4)$$

ausdrücken, weil in der Summe

$$Z(j; 1) \cdot \Delta_1 + Z(j; 2) \cdot \Delta_2 + \dots + Z(j; x-1) \cdot \Delta_{x-1} + Z(j; x) \cdot \Delta_x$$

jeder Summand, der einem i mit $Z(j; i) = 0$ entspricht, gleich 0 ist, und jeder Summand, der einem i mit $Z(j; i) = 1$ entspricht, gleich Δ_i ist, sodaß diese Summe gleich der Summe der Längen Δ_i für alle i mit $Z(j; i) = 1$ ist.

Schreiben wir nun die Formel (4) für alle j mit $1 \leq j \leq n$ auf:

$$\begin{aligned} |d(s_1)| &= Z(1; 1) \cdot \Delta_1 + Z(1; 2) \cdot \Delta_2 + \dots + Z(1; x-1) \cdot \Delta_{x-1} + Z(1; x) \cdot \Delta_x; \\ |d(s_2)| &= Z(2; 1) \cdot \Delta_1 + Z(2; 2) \cdot \Delta_2 + \dots + Z(2; x-1) \cdot \Delta_{x-1} + Z(2; x) \cdot \Delta_x; \\ &\dots; \\ |d(s_n)| &= Z(n; 1) \cdot \Delta_1 + Z(n; 2) \cdot \Delta_2 + \dots + Z(n; x-1) \cdot \Delta_{x-1} + Z(n; x) \cdot \Delta_x. \end{aligned}$$

Kreisbögen b_1 und b_2 kann den Kreisbogen b vollständig überdecken, weil sonst der Doppelbogen d als Vereinigung von b_1 und b_2 den Kreisbogen b vollständig überdecken würde. Also muß jeder von den zwei Kreisbögen b_1 und b_2 den Kreisbogen b entweder teilweise überdecken, oder mit b disjunkt sein. Jedoch können auch nicht beide Kreisbögen b_1 und b_2 mit b disjunkt sein, weil sonst auch die Vereinigung d von b_1 und b_2 mit b disjunkt wäre; also muß mindestens einer von den zwei Kreisbögen b_1 und b_2 den Kreisbogen b teilweise überdecken. Nun ist es klar, daß ein Endpunkt von diesem Kreisbogen innerhalb des Kreisbogens b liegt. Doch ein Endpunkt von einem der zwei Kreisbögen, aus denen ein Doppelbogen zusammengesetzt ist, ist nach Definition auch ein Endpunkt des Doppelbogens. Damit sehen wir, daß ein Endpunkt von dem Doppelbogen d innerhalb des Kreisbogens b liegt, was zu beweisen war.

Nun summieren wir diese Gleichungen und erhalten:

$$\begin{aligned}
& |d(s_1)| + |d(s_2)| + \dots + |d(s_n)| \\
= & (Z(1; 1) + Z(2; 1) + \dots + Z(n; 1)) \cdot \Delta_1 \\
& + (Z(1; 2) + Z(2; 2) + \dots + Z(n; 2)) \cdot \Delta_2 \\
& + \dots \\
& + (Z(1; x) + Z(2; x) + \dots + Z(n; x)) \cdot \Delta_x.
\end{aligned} \tag{5}$$

Betrachten wir nun für ein beliebiges i mit $1 \leq i \leq x$ die Summe $Z(1; i) + Z(2; i) + \dots + Z(n; i)$. Diese Summe besteht aus lauter Summanden, die 0 oder 1 sind; und zwar ist ein Summand $Z(j; i)$ gleich 0, wenn der Startdoppelbogen $d(s_j)$ mit dem Bruchkreisbogen $g(E_i E_{i+1})$ disjunkt ist, und gleich 1, wenn der Startdoppelbogen $d(s_j)$ den Bruchkreisbogen $g(E_i E_{i+1})$ vollständig überdeckt. In dieser Summe treten deshalb genau so viele Einsen auf, wie es Startdoppelbögen gibt, die den Bruchkreisbogen $g(E_i E_{i+1})$ vollständig überdecken⁸, und alle anderen Summanden sind Nullen. Folglich ist diese Summe $Z(1; i) + Z(2; i) + \dots + Z(n; i)$ einfach gleich der Anzahl derjenigen Startdoppelbögen, die den Bruchkreisbogen $g(E_i E_{i+1})$ vollständig überdecken. Diese Anzahl ist aber stets $\leq k$, denn wäre sie $> k$, dann würden mehr als k verschiedene Startdoppelbögen den Bruchkreisbogen $g(E_i E_{i+1})$ vollständig überdecken, was aber bedeuten würde, daß ein beliebiger Punkt auf diesem Bruchkreisbogen auf mehr als k Startdoppelbögen liegen würde, was nach Hilfssatz 2 unmöglich ist.

Wir haben damit gezeigt, daß für jedes natürliche i mit $1 \leq i \leq x$ die Ungleichung $Z(1; i) + Z(2; i) + \dots + Z(n; i) \leq k$ gilt. Nach (5) ist somit

$$\begin{aligned}
& |d(s_1)| + |d(s_2)| + \dots + |d(s_n)| \\
= & (Z(1; 1) + Z(2; 1) + \dots + Z(n; 1)) \cdot \Delta_1 \\
& + (Z(1; 2) + Z(2; 2) + \dots + Z(n; 2)) \cdot \Delta_2 \\
& + \dots \\
& + (Z(1; x) + Z(2; x) + \dots + Z(n; x)) \cdot \Delta_x \\
\leq & k \cdot \Delta_1 + k \cdot \Delta_2 + \dots + k \cdot \Delta_x = k \cdot (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_x) = k \cdot 2\pi
\end{aligned}$$

(nach (2)). Doch nach (1) ist $|d(s_1)| = 2 \cdot |b(s_1)|$, $|d(s_2)| = 2 \cdot |b(s_2)|$, ..., $|d(s_n)| = 2 \cdot |b(s_n)|$, also

$$2 \cdot |b(s_1)| + 2 \cdot |b(s_2)| + \dots + 2 \cdot |b(s_n)| \leq k \cdot 2\pi.$$

Division durch 2 ergibt

$$|b(s_1)| + |b(s_2)| + \dots + |b(s_n)| \leq k \cdot \pi.$$

Doch da eine gerade Strecke die (einzige) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, ist die Länge jeder Kreissehne kürzer als die Länge des von dieser Sehne abgeschnittenen Kreisbogens. Mithin ist $|s_1| < |b(s_1)|$, $|s_2| < |b(s_2)|$, ..., $|s_n| < |b(s_n)|$, also

$$|s_1| + |s_2| + \dots + |s_n| < |b(s_1)| + |b(s_2)| + \dots + |b(s_n)| \leq k \cdot \pi.$$

⁸**Achtung:** Hier und im folgenden bedeutet die Sprechweise "Mehrere Startdoppelbögen überdecken einen Bruchkreisbogen vollständig", daß *jeder einzelne* von diesen Startdoppelbögen den Bruchkreisbogen vollständig überdeckt (und nicht nur, daß die Vereinigung dieser Startdoppelbögen den Bruchkreisbogen vollständig überdeckt).

Damit ist gezeigt, daß die Summe der Längen aller Startsehnen kleiner als $k \cdot \pi$ ist. Hiermit ist die Aufgabe gelöst.

Anhang:

1. Ich entschuldige mich für die obige, wohl um einiges zu breite Ausführung; ich weiß nicht genau, wie ausführlich und axiomatisch eine BWM-Lösung sein muß, und habe versucht, sie so ausführlich wie möglich zu gestalten.

2. Die Überlegungen am Ende der Lösung könnten wir etwas kürzer mithilfe der Summenschreibweise dargestellt haben: So läßt sich die Gleichung (4) in der Form

$$|d(s_j)| = \sum_{i=1}^x (Z(j; i) \cdot \Delta_i)$$

ausdrücken. Die Ungleichung $Z(1; i) + Z(2; i) + \dots + Z(n; i) \leq k$ schreibt sich kurz als $\sum_{j=1}^n Z(j; i) \leq k$, und daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |d(s_j)| &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^x (Z(j; i) \cdot \Delta_i) \right) = \sum_{i=1}^x \left(\sum_{j=1}^n (Z(j; i) \cdot \Delta_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^x \left(\left(\sum_{j=1}^n Z(j; i) \right) \cdot \Delta_i \right) \leq \sum_{i=1}^x (k \cdot \Delta_i) = k \cdot \sum_{i=1}^x \Delta_i = k \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

wobei wir die Vertauschbarkeit der Summenzeichen in einer endlichen Doppelsumme benutzt haben:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^x a_{i;j} \right) = \sum_{i=1}^x \left(\sum_{j=1}^n a_{i;j} \right) \quad \text{für beliebige reelle } a_{i;j}.$$

3. Meine Lösung der Aufgabe ist elementar in dem Sinne, daß sie keine Analysis benutzt. Im folgenden skizziere ich eine kürzere, aber nicht mehr elementare **Variante dieser Lösung**:

Bis einschließlich den Beweis von Hilfssatz 2 argumentieren wir genauso wie in der obigen Lösung. Jetzt nehmen wir einen beliebigen Punkt S auf unserem Kreis und bezeichnen den Mittelpunkt des Kreises mit O . Für jeden Winkel φ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ gibt es genau einen Punkt P auf unserem Kreis, für den der *gegen den Uhrzeigersinn* gemessene Winkel $\angle SOP$ gleich φ ist. Bezeichnen wir diesen Punkt mit $P(\varphi)$. Umgekehrt gehört zu jedem Punkt P auf dem Kreis ein Winkel φ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$, sodaß $P = P(\varphi)$ ist. Also ist durch den Winkel φ eine Parametrisierung von unserem Kreis gegeben.

Jetzt führen wir einige Funktionen von dem Winkel φ ein: Ist j eine natürliche Zahl mit $1 \leq j \leq n$, dann führen wir die folgende charakteristische Funktion $I_j(\varphi)$ ein:

$$I_j(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{wenn der Punkt } P(\varphi) \text{ auf dem Startdoppelbogen } d(s_j) \text{ liegt;} \\ 0, & \text{wenn der Punkt } P(\varphi) \text{ nicht auf dem Startdoppelbogen } d(s_j) \text{ liegt.} \end{cases}$$

Dann besteht für jedes φ die Summe $I_1(\varphi) + I_2(\varphi) + \dots + I_n(\varphi)$ aus lauter Einsen und Nullen, und zwar sind genau so viele Einsen in der Summe, wie es Startdoppelbögen

gibt, auf denen der Punkt $P(\varphi)$ liegt. Die Summe $I_1(\varphi) + I_2(\varphi) + \dots + I_n(\varphi)$ ist also gleich der Anzahl aller Startdoppelbögen, auf denen der Punkt $P(\varphi)$ liegt. Nach Hilfssatz 2 ist diese Anzahl $\leq k$. Somit ist $I_1(\varphi) + I_2(\varphi) + \dots + I_n(\varphi) \leq k$. Damit ist auch

$$\int_0^{2\pi} (I_1(\varphi) + I_2(\varphi) + \dots + I_n(\varphi)) d\varphi \leq \int_0^{2\pi} k d\varphi = k \cdot 2\pi.$$

Doch andererseits ist für jedes natürliche j mit $1 \leq j \leq n$ das Integral $\int_0^{2\pi} I_j(\varphi) d\varphi$ gleich der Länge des Startdoppelbogens $d(s_j)$. Wir haben also $\int_0^{2\pi} I_j(\varphi) d\varphi = |d(s_j)|$, und damit

$$\begin{aligned} |d(s_1)| + |d(s_2)| + \dots + |d(s_n)| &= \int_0^{2\pi} I_1(\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} I_2(\varphi) d\varphi + \dots + \int_0^{2\pi} I_n(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (I_1(\varphi) + I_2(\varphi) + \dots + I_n(\varphi)) d\varphi \leq k \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

Jetzt können wir, genauso wie am Ende der obigen Lösung, daraus folgern, daß die Summe der Längen aller Startsehn kleiner als $k \cdot \pi$ ist.