

Bundeswettbewerb Mathematik 2004, 2. Runde, Aufgabe 1

Es sei k eine positive ganze Zahl. Eine natürliche Zahl heiße **k -typisch**, wenn jeder ihrer Teiler bei Division durch k den Rest 1 läßt.

Man beweise:

a) Wenn die Anzahl der Teiler einer positiven ganzen Zahl n (einschließlich der Teiler 1 und n) k -typisch ist, dann ist n die k -te Potenz einer ganzen Zahl.

b) Die Umkehrung der Aussage a) ist falsch, wenn k größer als 2 ist.

Lösung von Darij Grinberg:

Wir beginnen mit dem folgenden Satz:

Satz 1: Ist $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$ die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl n (wobei $p_1, p_2, \dots, p_t$ Primzahlen sind, und $a_1, a_2, \dots, a_t$ natürliche Exponenten), dann ist die Anzahl aller Teiler der Zahl n (einschließlich der Teiler 1 und n) gleich

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1).$$

Beweis: Ist k ein Teiler von n , dann kann k nicht durch eine Primzahl teilbar sein, die nicht in der Menge $\{p_1; p_2; \dots; p_t\}$ enthalten ist.¹ Also gehören alle Primteiler der Zahl k zu der Menge $\{p_1; p_2; \dots; p_t\}$. Damit kann man die Primfaktorzerlegung der Zahl k in der Form $k = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$ schreiben, wobei auch einige der Exponenten $b_1, b_2, \dots, b_t$ Null sein können. Man sieht leicht, daß für jedes natürliche i mit $1 \leq i \leq t$ stets $0 \leq b_i \leq a_i$ gelten mu.² Damit kann man jeden Teiler der Zahl $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$ in der Form $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$ schreiben mit ganzen b_i , die die Ungleichung $0 \leq b_i \leq a_i$ für jedes i erfüllen. Umgekehrt gilt: Ist s eine Zahl der Form $s = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$, wobei die Zahlen b_i

¹*Beweis:* Wäre k durch eine Primzahl p' teilbar, die nicht in der Menge $\{p_1; p_2; \dots; p_t\}$ enthalten ist, müßte, da k ein Teiler von n ist, die Zahl n auch durch diese Primzahl p' teilbar sein; würde man jetzt die Zahl $\frac{n}{p'}$ in Primfaktoren zerlegen, und die entstandene Primfaktorzerlegung mit p' multiplizieren, erhielte man eine Primfaktorzerlegung für n , in der die Primzahl p' vorkommt. Aber wir haben bereits eine Primfaktorzerlegung für n , in der die Primzahl p' nicht vorkommt (und zwar die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$). Damit hat die Zahl n zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen; dies ist ein Widerspruch. Also kann die Zahl k nicht durch eine Primzahl teilbar sein, die nicht in der Menge $\{p_1; p_2; \dots; p_t\}$ enthalten ist.

²*Beweis:* Da die Zahl k ein Teiler von n ist, ist die Zahl $\frac{n}{k}$ natürlich und ebenfalls ein Teiler von n . Nach dem vorhergesagten müssen die Primfaktorzerlegungen der Zahlen k und $\frac{n}{k}$ sich als $k = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$ bzw. $\frac{n}{k} = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_t^{c_t}$ schreiben lassen. Damit ist

$$n = k \cdot \frac{n}{k} = \left(p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t} \right) \cdot \left(p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_t^{c_t} \right) = p_1^{b_1+c_1} p_2^{b_2+c_2} \dots p_t^{b_t+c_t}.$$

Damit haben wir eine Primfaktorzerlegung für die Zahl n gefunden. Wir kennen aber bereits die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$. Da die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl eindeutig ist, müssen die beiden Primfaktorzerlegungen $n = p_1^{b_1+c_1} p_2^{b_2+c_2} \dots p_t^{b_t+c_t}$ und $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$ völlig übereinstimmen, d. h. es mu $b_i + c_i = a_i$ für jedes i sein. Da nun $c_i \geq 0$ ist, ist $b_i + c_i \geq b_i$, also $a_i \geq b_i$, und damit $b_i \leq a_i$. Daß $0 \leq b_i$ ist, ist trivial (Primfaktorzerlegungen enthalten keine negativen Potenzen).

ganz sind und die Ungleichung $0 \leq b_i \leq a_i$ für jedes i erfüllen, dann ist die Zahl s ein Teiler der Zahl n ; denn es gilt

$$\frac{n}{s} = \frac{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}}{p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}} = p_1^{a_1-b_1} p_2^{a_2-b_2} \dots p_t^{a_t-b_t} \in \mathbb{N},$$

weil aus $b_i \leq a_i$ für jedes i die Ungleichung $a_i - b_i \geq 0$ folgt, und damit $p_i^{a_i-b_i} \in \mathbb{N}$ ist.

Also ist eine Zahl k genau dann ein Teiler der Zahl $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$, wenn sie sich in der Form $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$ schreiben läßt mit ganzen b_i , die die Ungleichung $0 \leq b_i \leq a_i$ für jedes i erfüllen. Damit ist jedem Teiler der Zahl n genau ein t -Tupel $(b_1; b_2; \dots; b_t)$ zugeordnet, dessen Elemente alle ganze Zahlen sind und die Ungleichung $0 \leq b_i \leq a_i$ für jedes i erfüllen.³ Umgekehrt entspricht jedem solchen t -Tupel $(b_1; b_2; \dots; b_t)$ genau ein Teiler der Zahl n . Somit ist die Anzahl der Teiler der Zahl n gleich der Anzahl von t -Tupeln $(b_1; b_2; \dots; b_t)$, deren Elemente alle ganze Zahlen sind und die Ungleichung $0 \leq b_i \leq a_i$ für jedes i erfüllen. Nach der Produktregel ist aber die Anzahl solcher Tupel gleich $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1)$ (denn es bestehen $a_1 + 1$ Möglichkeiten für die Wahl des ersten Elements b_1 , dann $a_2 + 1$ Möglichkeiten für die Wahl des zweiten Elements b_2 , usw., schließlich $a_t + 1$ Möglichkeiten für die Wahl des letzten Elements b_t). Also ist auch die Anzahl der Teiler der Zahl n gleich $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1)$. Somit ist Satz 1 bewiesen.

Kommen wir jetzt zur Lösung von Aufgabe a):

Angenommen, die Anzahl der Teiler einer positiven ganzen Zahl n sei k -typisch. Nach Satz 1 bedeutet dies: Wenn n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$ hat, dann ist die Zahl $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1)$ eine k -typische Zahl. Das heißt, jeder Teiler dieser Zahl $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_t + 1)$ muß bei Division durch k den Rest 1 lassen. Unter anderem lassen also die Teiler $a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_t + 1$ jeweils bei Division durch k den Rest 1. Das heißt, die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_t$ sind alle durch k teilbar. Sei $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, \dots, a_t = kb_t$; dabei sind $b_1, b_2, \dots, b_t$ nichtnegative ganze Zahlen. Dann ist

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} = p_1^{kb_1} p_2^{kb_2} \dots p_t^{kb_t} = (p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t})^k.$$

Die Zahl $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_t^{b_t}$ ist ganz; also ist n die k -te Potenz einer ganzen Zahl, was zu beweisen war.

Jetzt werden wir Aufgabe b) lösen. Diese Aufgabe ist etwas mißverständlich formuliert: Die Aussage der Aufgabe a) (strenggenommen handelt es sich dabei um eine Aussageform mit k als Parameter) lautet:

”Wenn die Anzahl der Teiler einer positiven ganzen Zahl n (einschließlich der Teiler 1 und n) k -typisch ist, dann ist n die k -te Potenz einer ganzen Zahl.”

Nicht klar ist nun, ob man zeigen muß, daß *nicht für jedes* $k > 2$ die Umkehrung dieser Aussage gilt, oder ob man zeigen muß, daß *für jedes* $k > 2$ die Umkehrung dieser Aussage *nicht gilt*. Wir werden im folgenden die stärkere dieser beiden Behauptungen beweisen, nämlich die Behauptung, daß *für jedes* $k > 2$ die Umkehrung dieser Aussage *nicht gilt*.

³Einem Teiler von n können nicht zwei verschiedene solche t -Tupel zugeordnet sein, denn jedes t -Tupel gibt eineindeutig die Exponenten in der Primfaktorzerlegung des Teilers an, und eine Zahl kann nicht zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen haben.

Und zwar betrachten wir für jedes $k > 2$ die Zahl $n = (2^{k-2})^k$. Diese Zahl n ist die k -te Potenz einer ganzen Zahl; wir wollen zeigen, daß sie *nicht* k -typisch ist. Dazu rechnen wir $n = (2^{k-2})^k = 2^{(k-2)k}$. Dies ist die Primfaktorzerlegung der Zahl n . Nach Satz 1 ist also die Anzahl der Teiler von n gleich $\delta = (k-2)k + 1$. Wir wollen zeigen, daß diese Zahl δ nicht k -typisch ist. Dazu müssen wir einen Teiler von δ finden, der bei Division durch k nicht den Rest 1 läßt. Und zwar ist $\delta = (k-2)k + 1 = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$; also ist die Zahl δ teilbar durch $k-1$. Doch die Zahl $k-1$ läßt bei Division durch k sicher nicht den Rest 1 (sie ist ihr eigener Rest bei Division durch k , da sie kleiner als k ist, und sie ist nicht gleich 1, weil $k > 2$ ist). Damit ist die Zahl n nicht k -typisch, und folglich haben wir die Umkehrung der Aussage **a)** für jedes $k > 2$ widerlegt.