Tarea 5: Álgebra lineal

I. Preguntas

1. Defina los grupos en que pueden dividirse los **métodos de resolución de sistemas de ecuaciones**.
2. ¿Por que los **métodos aproximados** permiten en muchas ocasiones obtener un grado de exactitud mayor que los **métodos exactos**?
3. Mencione dos **ejemplos** de métodos de cada grupo.
4. ¿Como se escribe un sistema de ecuaciones en forma **matricial**?
5. Mencione **5 teoremas** aplicables a sistemas de ecuaciones lineales.
6. ¿Que son los **métodos directos** para la solución de sistemas de ecuaciones?
7. Mencione los dos pasos en los que consiste el **método de eliminación gaussiana**.
8. Describa para el proceso de **eliminación gaussiana**: la eliminación hacia adelante, la sustitución hacia atrás y como se encuentran las incógnitas.
9. Describa en que consiste el **método de Gauss-Jordán**.
10. ¿Que son los **métodos iterativos** para la solución de sistemas de ecuaciones?
11. ¿Cuales **criterios de convergencia** emplean los métodos iterativos?
12. Describa el **método de Jacobí**, y muestre su representación de forma general.
13. Muestre tres criterios para la **suposición de x^0** (Vector Inicial).
14. En que consiste el **método de Gauss-Seidel**.

II. Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por los métodos de:

   a. Eliminación gaussiana
   b. Gauss-Jordán
   c. Jacobí
   d. Gauss-Seidel

a)
$$\begin{aligned} 10a - b - c &= -11 \\ a + 12b - 3c &= 41 \\ 2a - 3b + 5c &= -18 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x - 0.1y - 0.2z &= 7.85 \\ 0.1x - 7y - 0.3z &= -19.3 \\ 0.3x - 0.2y + 10z &= 71.4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 9 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= -7 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 5.6x_1 + 1.1x_2 + 3.4x_3 &= 8.28 \\ 0.3x_1 + 5.7x_2 + 3.3x_3 &= -6.75 \\ 1.7x_1 + 4.3x_2 + 7.3x_3 &= -1.37 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 9 \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 1x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 &= 11 \end{aligned}$$

III. Programas

1. Realice un programa para resolver un **sistema de ecuaciones lineales** que permita seleccionar alguno de los siguientes métodos:

a) Eliminación gaussiana
b) Gauss-Jordán
c) Jacobí
d) Gauss-Seidel

IV. Problemas

1. Un ingeniero supervisa la **producción** de tres tipos de automóviles. Se requieren tres clases de materiales (metal, plástico y caucho) para la producción. La cantidad necesaria para producir cada automóvil es de:

Automóvil	Metal {Kg/auto}	Plástico {Kg/auto}	Caucho {Kg/auto}
1	1500	25	100
2	1700	33	120
3	1900	42	160

Si se dispone de un total de **106 toneladas** de **metal**, **2.17 toneladas** de **plástico** y **8.2 toneladas** de **caucho** por día, ¿Cuántos automóviles se pueden producir por día?

2. Al considerar el **movimiento de los vehículos espaciales**, frecuentemente es necesario transformar sistemas de coordenadas. El **sistema inercial** de coordenadas normal tiene el eje **N** apuntando al **norte**, el eje **E** está apuntando al **este** y el eje **D** apuntado al centro de la **Tierra**. Un segundo sistema es el **sistema local** de coordenadas del vehículo (con el eje **i derecho** en relación con el desplazamiento del vehículo, el eje **j** a la **derecha** y el eje **k** hacia **abajo**). Es posible transformar el vector cuyas coordenadas locales son **(i,j,k)** al **sistema inercial** multiplicando las matrices de transformación:

$$\begin{bmatrix} n \\ e \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c \\ 0 & \sin c & \cos c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

Transforme el vector **[2.06, -2.44, -0.47]^T**, al sistema inercial si **a = 27º**, **b = 5º** y **c = 72º.**

3. Suponga que en un **sistema biológico** hay **n** especies de **animales** y **m** fuentes de **alimento**. Sea **x_j** la representación de la población de la **j-ésima** especie para cada **j = 1,2,3,…,n**; y sea **b_i** el suministro disponible del **i-ésimo** alimento y con **a_{ij}** represente la cantidad de la **i-ésima** comida consumida en promedio por un miembro de la **j-ésima** especie. El sistema lineal siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & . & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & . & a_{2n}x_n & = b_2 \\ . & . & . & . & . \; . \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & . & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

Representa el **equilibrio** donde el suministro diario de comida que satisface exactamente el consumo promedio diario de cada especie.

a) Sea

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y **x = (x_j) = [1000, 500, 350, 400]** y **b = (b_i) = [3500, 2700, 900]**

¿Hay **suficientes alimentos** para satisfacer el consumo diario?

b) ¿Cuál es el número **máximo de animales** de cada especie que podría agregarse individualmente al sistema de modo que el suministro satisficiera todavía al consumo?

4. En el trabajo titulado **Population Waves**, Bernadelli postula la existencia hipotética de un **escarabajo simplificado** cuya vida natural es de 3 años. La hembra de esta especie tiene una tasa de supervivencia **de 1/2** en el primer año de vida, de **1/3** del segundo al tercer año de vida y procesa un promedio de seis hembras antes de morir al final del tercer año. Podemos utilizar una matriz para demostrar la contribución que un escarabajo hembra hace en sentido probabilístico, a la población femenina de la especie, al denotar con **a_{ij}** en la matriz **A=(a_{ij})** a la contribución que un escarabajo hembra de **edad j** hará a la población femenina de **edad i** del siguiente año; es decir:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) La contribución que un escarabajo hembra hace a la población al cabo de **2 años** se determina a partir de los elementos de **A^2**, al cabo de **tres años** a partir de **A^3**, y así sucesivamente. Construya **A^2** y **A^3** y haga un **enunciado** general sobre la contribución de un escarabajo hembra a la población en **n** años para cualquier entero positivo **n**.

b) Con base a sus conclusiones describa lo que sucederá en **años futuros** a una población de estos escarabajos que inicialmente eran **6,000** escarabajos hembra en cada uno de los **tres grupos** de edad.

c) Construya **A^{-1}** y describa su importancia para la **población** de la especie.