Tarea 4: Derivación e Integración

I. Preguntas

1. Para que se utiliza la **derivación numérica** y cuales son sus ventajas.
2. ¿Cuáles son los tres tipos de aproximación por diferencias que es posible obtener por un **gradiente de interpolación lineal**?
3. ¿Cuáles son las ecuaciones que se obtienen por el **gradiente de interpolación lineal**?
4. Deduzca la ecuación de derivación mediante el **desarrollo de Taylor** para la **primera derivada por aproximación por diferencias hacia adelante de 3 puntos**.
5. Deduzca la ecuación de derivación mediante el **desarrollo de Taylor** para la **primera derivada por aproximación por diferencias centrales de 5 puntos**.
6. Deduzca la ecuación de derivación mediante el **desarrollo de Taylor** para la **segunda derivada por aproximación por diferencias hacia adelante de 3 puntos**.
7. ¿Qué ventajas presenta el empleo de la **integración numérica**, respecto a la integración analítica?
8. ¿Cómo se obtienen los métodos de **integración numérica**?
9. Describa el método de integración por la **regla del trapecio**.
10. Describa el método de integración por la **regla de 1/3 de Simpson**.
11. ¿Cómo se obtienen las fórmulas de integración de **Newton-Cotes**?
12. ¿Cómo se dividen las fórmulas de integración de **Newton-Cotes**? Explique en que consiste cada una.
13. ¿Cuáles son las fórmulas de integración de **Newton-Cotes cerradas** para **N = 1** hasta **N = 10**?
14. ¿Cómo se obtienen las fórmulas de integración de **Newton-Cotes abiertas**?
15. ¿Cuáles son las fórmulas de integración de **Newton-Cotes abiertas** para **N = 1** hasta **N = 6**?
16. ¿Cómo es el **error** de las fórmulas **abiertas de Newton-Cotes** respecto a las **cerradas**?
17. Describa el método de integración por la **regla del trapecio compuesto**.
18. Describa el método de integración por la **regla de 1/3 de Simpson compuesto**.
19. ¿Cómo se obtienen las ecuaciones de **integración compuesta** en base al **polinomio de Newton**?

II. Ejercicios

1. Obtener la **derivada** de las siguientes funciones en el punto $\mathbf{x_0}$. Considerar el incremento **h**. Emplear las formulas para **3** y **5 puntos**.

   a) $f(x) = e^x$ $x_0 = 2$ $h = 0.1$

   b) $f(x) = sen(x) * cos^2(x)$ $x_0 = 0.25\pi$ $h = 0.2\pi$

   c) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6$ $x_0 = 8$ $h = 0.1$

d) $f(x) = (e^{x} - e^{-x}) / x$ $x_0 = 1$ $h = 0.01$

e) $f(x) = sen(x) / x$ $x_0 = 0.5\pi$ $h = 0.1\pi$

f) $f(x) = \ln (x * sen(x))$ $x_0 = 0.8\pi$ $h = 0.01\pi$

g) $f(x) = x^{2} 3^{x}$ $x_0 = 5$ $h = 0.2$

h) $f(x) = e^{x^2}$ $x_0 = 3$ $h = 0.1$

i) $f(x) = e^{-2x} sen(3x)$ $x_0 = 0.3\pi$ $h = 0.05\pi$

j) $f(x) = (x^2 + 2)(1 - x^3)^4$ $x_0 = 1$ $h = 0.1$

k) $f(x) = arc(tan(senh(x)))$ $x_0 = 0.4\pi$ $h = 0.01\pi$

2. Obtener las siguientes integrales, empleando los algoritmos de **integración simple** por la regla del **trapecio** y de **Simpson**, los métodos de **integración compuesta** del **trapecio** y de **Simpson** y las **fórmulas de integración de Newton-Cotes** para **N = 1** a **10 cerradas** y para **N = 1** a **6 abiertas**.

a) $\int_{0}^{0.5p} (4 + 2 sen x) dx$

b) $\int_{1}^{4} \frac{\ln x}{x^2} dx$

c) $\int_{0}^{1.5p} sen p \; x \; dx$

d) $\int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{6x - x^2} dx$

e) $\int_{0}^{0.8} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}}$

f) $\int_{0}^{0.5} \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9\ln^2 x}}$

g) $\int_{1}^{1.5} \frac{(5 - 4x)dx}{\sqrt{12x - 4x^2 - 8}}$

h) $\int_{0}^{0.5p} \frac{dx}{2 - \cos x}$

III. Programas

1. Realice un programa que **tabule** y **derive** una función en un punto dado ($\mathbf{x_0}$), con un incremento (**h**), que utilice las ecuaciones:

a) Primera derivada por aproximación por **diferencias hacia adelante** (tres ecuaciones).

b) Primera derivada por aproximación por **diferencias hacia atrás** (tres ecuaciones).

c) Primera derivada por aproximación por **diferencias centrales** (dos ecuaciones).

d) Programar los algoritmos de **integración simple** por la regla del **trapecio** y de **Simpson** y los métodos de **integración compuesta** del **trapecio** y de **Simpson**.

e) Programar las **fórmulas de integración de Newton-Cotes** para **N = 1** a **10 cerradas** y para **N = 1** a **6 abiertas**.

IV. Problemas

1. Hallar la velocidad (primera derivada) y la aceleración (segunda derivada) en:

- $x = e^t$ $y = e^{2t} - 4e^t + 3$ para $t = 0$
- $x = 2 - t$ $y = 2t^3 - t$ para $t = 1$
- $x = \cos 3t$ $y = \operatorname{sen} t$ para $t = \pi / 4$
- $x = e^t \cos t$ $y = e^t \operatorname{sen} t$ para $t = 0$

2. Una partícula se mueve a lo largo de la parábola cúbica $y = x^3 / 3$ hallar la **velocidad** y la **aceleración** en $x = 3$.

3. La distribución de **velocidad de un fluido** cerca de la **superficie** está dada por la siguiente tabla:

i	y_i(m)	u_i(m/s)
0	0.0	0.0
1	0.002	0.006180
2	0.004	0.011756
3	0.006	0.016480
4	0.008	0.019021

La **ley de Newton para la tensión superficial** está dada por:

$$\tau = \mu \frac{d}{dy} u$$

Donde: μ = es la viscosidad ($\mu \approx 0.001 Ns/m^2$)

Calcule la tensión superficial en $y = 0$, mediante aproximación por diferencias, empleando: **a) i =0** e **i =1** y **b) i = 0,1** y **2**.

4. Para la siguiente tabla de valores:

Evalúe la integral:

$$\int_0^{0.8} f(x)dx$$

Para **h = 0.4**, **h = 0.2** y **h = 0.1**.

x	f(x)
0.0	0
0.1	2.1220
0.2	3.0244
0.3	3.2568
0.4	3.1399
0.5	2.8579
0.6	2.5140
0.7	2.1639
0.8	1.8358

5. Un automóvil con masa **M = 5,400Kg**, se mueve a una velocidad de **30m/s**. El motor se apaga súbitamente a los **t = 0s**. Suponga que la ecuación de movimiento después de **t = 0** está dada por:

$$5400v\ dv/dx = -8.276\ v^2 - 2000$$

Donde **v = v(t)** es la **velocidad** (**m/s**) del automóvil al **tiempo t**.

El lado izquierdo representa **Mv(dv/dx)**. El primer término del lado derecho es la **fuerza aerodinámica** y el segundo término es la **resistencia de las llantas** al rodaje. Calcule la **distancia** que recorre el automóvil hasta que la velocidad se reduce a **15m/s**.

Recuerde que la **ecuación de movimiento** se pude integrar como:

$$\int_{15}^{30} \frac{5400v\,dv}{8.276v^2 + 2000} = \int dx = x$$

6. Un estudio requiere del cálculo del **número total de automóviles** que pasan a través de una intersección en un período de **24** horas. Un individuo visita la intersección varias veces al día y cuenta el número de automóviles que pasan a través de la intersección en **un minuto**. Los datos se resumen en la tabla siguiente. Calcule el **número total de automóviles** que pasa por la intersección durante el día.

Tiempo	Automóviles/minuto
12:00	10
2:00	4
6:00	6
7:00	40
8:00	60
9:00	80
11:00	25
13:00	18
15:00	17
16:00	28
17:00	35
18:00	77
19:00	40
20:00	30
22:00	31
24:00	15