Tarea 2: Solución de Ecuaciones No Lineales

I. Preguntas

1. Mencione y explique los tres métodos que pueden ser empleados para resolver una **ecuación no lineal**.
2. ¿Qué dice el **teorema de cambios de signo**?
3. ¿Cual es el **teorema raíces complejas**?
4. Describa la **regla de los signos** ó **regla de Descartes**.
5. Describa brevemente en que consiste el **método de la bisección**.
6. Mencione y describa los **criterios de paro** para los métodos de búsqueda de raíces.
7. Describa brevemente en que consiste el **método de iteración de punto fijo**.
8. Describa brevemente en que consiste el **método de Newton-Raphson** y demuestre como se obtiene la formula para su algoritmo.
9. Describa brevemente en que consiste el **método de la secante** y muestre como se obtiene su algoritmo empleando una aproximación de la derivada de la función.
10. Cual de los métodos de bisección, iteración de punto fijo, Newton-Raphson y Secante resulta el mejor para obtener:

- **a)** La solución de una ecuación **no polinomial**.
- **b)** La solución a una ecuación **polinomial**.

11. Diga los criterios para la **suposición de $x_{inicial}$** para resolver ecuaciones algebraicas.
12. ¿Qué establece el **teorema fundamental del álgebra**?
13. ¿Qué son las **cotas de raíces**?
14. ¿Cuales son los teoremas para encontrar las **cotas mínima** y **máxima** de raíces?
15. Describa en que consiste el **método de Horner**.

II. Ejercicios

1. Determinar el número de **raíces nulas, positivas** y **negativas** de las siguientes ecuaciones:

$f_1(x) = e^{-x} - x$
$f_2(x) = - x^2 + 3 x + 5$
$f_3(x) = x^3 + 6 x - 20$
$f_4(x) = x^3 - 3 x^2 + 2 x$
$f_5(x) = x^3 - 9 x^2 + 6 x + 16$
$f_6(x) = x^4 - 12 x^3 + 33 x^2 - 2 x - 48$
$f_7(x) = x^4 + 3.79 x^3 + 4.282 x^2 + 1.3968 x - 0.0144$

2. Por el **método de la bisección** determine alguna raíz de las siguientes ecuaciones:

$f_1(x) = e^{-x} - x$ [0,1]
$f_2(x) = - x^2 + 3 x + 5$ [-1.5,4.5]
$f_3(x) = x^3 + 6 x - 20$ [1.9,2.1]
$f_4(x) = x^3 - 3 x^2 + 2 x$ [0.5,2.5]
$f_5(x) = x^3 - 9 x^2 + 6 x + 16$ [2,10]
$f_6(x) = x^4 - 12 x^3 + 33 x^2 - 2 x - 48$ [2,4]
$f_7(x) = x^4 + 3.79 x^3 + 4.282 x^2 + 1.3968 x - 0.0144$ [3,5]

3. Por el **método de iteración de punto fijo** determine alguna raíz de las siguientes ecuaciones:

$f_1(x) = e^{-x} - x$ [0]
$f_2(x) = - x^2 + 3 x + 5$ [-1.5]
$f_3(x) = x^3 + 6 x - 20$ [1.9]
$f_4(x) = x^3 - 3 x^2 + 2 x$ [0.5]
$f_5(x) = x^3 - 9 x^2 + 6 x + 16$ [2]
$f_6(x) = x^4 - 12 x^3 + 33 x^2 - 2 x - 48$ [2]
$f_7(x) = x^4 + 3.79 x^3 + 4.282 x^2 + 1.3968 x - 0.0144$ [3]

4. Por el **método de Newton-Raphson** determine alguna raíz de las siguientes ecuaciones:

$f_1(x) = e^{-x} - x$ [0]
$f_2(x) = - x^2 + 3 x + 5$ [-1.5]
$f_3(x) = x^3 + 6 x - 20$ [1.9]
$f_4(x) = x^3 - 3 x^2 + 2 x$ [0.5]
$f_5(x) = x^3 - 9 x^2 + 6 x + 16$ [2]
$f_6(x) = x^4 - 12 x^3 + 33 x^2 - 2 x - 48$ [2]
$f_7(x) = x^4 + 3.79 x^3 + 4.282 x^2 + 1.3968 x - 0.0144$ [3]

5. Por el **método de la secante** determine alguna raíz de las siguientes ecuaciones:

$f_1(x) = e^{-x} - x$ [0,1]
$f_2(x) = - x^2 + 3 x + 5$ [-1.5,4.5]
$f_3(x) = x^3 + 6 x - 20$ [1.9,2.1]
$f_4(x) = x^3 - 3 x^2 + 2 x$ [0.5,2.5]
$f_5(x) = x^3 - 9 x^2 + 6 x + 16$ [2,10]
$f_6(x) = x^4 - 12 x^3 + 33 x^2 - 2 x - 48$ [2,4]
$f_7(x) = x^4 + 3.79 x^3 + 4.282 x^2 + 1.3968 x - 0.0144$ [3,5]

6. Determine las raíces de las siguientes ecuaciones empleando la **formula general** para resolver ecuaciones de segundo grado:

$f_1(x) = - x^2 + 3 x + 5$ $f_2(x) = x^2 + 2 x + 10$

7. Para las siguientes ecuaciones algebraicas, determine si el intervalo es una **cota de raíces**.

$f_1(x) = - x^2 + 3 x + 5$ [0,8]
$f_2(x) = x^3 + 6 x - 20$ [-2,5]
$f_3(x) = x^3 - 3 x^2 + 2 x$ [0,3]
$f_4(x) = x^3 - 9 x^2 + 6 x + 16$ [2,10]
$f_5(x) = x^4 - 12 x^3 + 33 x^2 - 2 x - 48$ [-4,10]
$f_6(x) = x^4 + 3.79 x^3 + 4.282 x^2 + 1.3968 x - 0.0144$ [3,10]

8. Por el **método de Horner** determine todas las raíces de los siguientes polinomios:

$f_1(x) = - x^2 + 3 x + 5$
$f_2(x) = x^2 + 2 x + 10$
$f_3(x) = x^3 + 6 x - 20$
$f_4(x) = x^3 - 3 x^2 + 2 x$
$f_5(x) = x^3 - 9 x^2 + 6 x + 16$
$f_6(x) = x^4 - 12 x^3 + 33 x^2 - 2 x - 48$
$f_7(x) = x^4 + 3.79 x^3 + 4.282 x^2 + 1.3968 x - 0.0144$

9. Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $e^x = 2x + 2$
b) $e^{x-1} + x - 1 = 0$
c) $e^x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x = 0$ Para $x_0 = -0.7$
d) $2x - e^{2x} + e^x = 0$ Para $x_0 = 1$
e) $e^{-x} - x = 0$ Para $x_0 = 1$
f) $x^3 = -e^x$ Para $x_0 = -0.8$
g) $e^{x-1} - 2x - 2 = 0$ Para $x_0 = 3$

III. Programas

1. Realice un programa para resolver ecuaciones no lineales que permita seleccionar entre los siguientes métodos:

a) Método de la **bisección**.
b) Método de **iteración de punto fijo**.
c) Método de **Newton-Raphson**.
d) Método de la **secante**.

2. Programe la **ecuación general** para resolver ecuaciones de segundo grado, que encuentre raíces reales y complejas.

3. Realice un programa para hacer la **división sintética** de un polinomio.

4. Implemente el **método de Horner** para encontrar todas las raíces de un polinomio (reales y/o complejas).

IV. Problemas

1. La siguiente ecuación determina el costo anual neto de una computadora:

$$A_v = \frac{-3000(1.2)^n}{12^n - 1} + \frac{175n}{12^n - 1} + 5000$$

Encuentre el valor de **n** talque $\mathbf{A_v}$ sea cero.

2. Suponga que desea comprar un automóvil y está limitado a dos opciones. El costo anual de neto de poseer cualquiera de los dos autos, esta compuesto por el costo de compra, el costo de mantenimiento y las ganancias:

Concepto	Modelo de lujo	Modelo austero
Costo de compra	-150,000.^{00}	-100,000.^{00}
Costo de mantenimiento	-12,000.^{00}	-6,000.^{00}
Ganancias anuales	60,000.^{00}	3,000.^{00}

Sí la tasa de interés es del **12.5%**, calcular el punto de equilibrio **n** para los automóviles.

Considere que:

Valor total = - (costo de compra) – (costo de mantenimiento) + (ganancias)

$$A_v = -P\,\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] + \text{Ganancias}$$

Donde: $\mathbf{A_v}$ = Valor total.
P = Costo de compra.
i = Tasa de interés.
n = Numero de años.
G = Tasa de crecimiento en el mantenimiento.

3. En ingeniería química, los reactores de flujo (aquellos en que un fluido va de un extremo a otro con una mezcla única a lo largo de un eje longitudinal) se usan para convertir reactivos en productos. Se ha determinado que la eficiencia de la conversión se puede mejorar a veces reciclando una parte del flujo del producto de manera que regrese a la entrada para un paso adicional a través del reactor. La tasa de reciclaje se define como:

R = (Volumen de fluido regresado a la entrada) / (Volumen de fluido que deja el sistema)

Supóngase que se está procesando una sustancia química **A** para generar un producto **B**. Para el caso en que **B** de acuerdo a una reacción autocatalítica (uno de los productos actúa como catalizador o estimulante de la reacción) ó **A + B ® B + B**, se puede demostrar que una tasa óptima de reciclaje debe satisfacer:

$$\ln\frac{1+R(1-X_{Af})}{R(1-X_{Af})}=\frac{R+1}{R(1+R(1-X_{Af}))}$$

Donde X_{Af} es la fracción de A que convierte al producto **B**. La tasa óptima de reciclaje corresponde a un reactor de tamaño mínimo necesario para alcanzar el nivel de conversión deseado.

Por el **método de bisección**, determine las tasas de reciclaje necesarias que minimicen el tamaño del reactor en conversiones fraccionales de:

a) X_{Af} = 0.99 **b)** X_{Af} = 0.995 **c)** X_{Af} = 0.999

4. El movimiento de una estructura se define mediante la ecuación para oscilación amortiguada:

$$y = 10\, e^{-kt} \cos wt$$

Donde: **k = 0.5** **w = 0.2**

a) Emplee el **método de Newton-Raphson** para determinar la raíz con un error de 0.01%.
b) Use el **método de la secante** para determinar la raíz con un error de 0.01%.

5. Una corriente oscilatoria en un circuito eléctrico se describe mediante:

I = 10 e^{-t} sen (2 p t)

En donde **t** está en segundos, determine todos los valores de **t** tales que **I = 2**.