

# Índice General

0.1	Introducción. . . . .	4
<b>1</b>	<b>Funciones Polinomiales por Pedazos.</b>	<b>7</b>
1.1	Funciones Polinomiales por Pedazos. . . . .	7
1.2	El Espacio Vectorial $P_{k,\varepsilon,v}$ . . . . .	11
1.2.1	Funciones Spline. . . . .	14
1.3	El Spline Cúbico de Interpolación. . . . .	20
1.3.1	Construcción. . . . .	21
1.3.2	Condiciones de Frontera. . . . .	25
1.4	El Spline Cúbico Paramétrico. . . . .	31
1.4.1	Spline Paramétrico Cerrado. . . . .	34
<b>2</b>	<b>Representación de Funciones Polinomiales por Pedazos.</b>	<b>37</b>
2.1	La Base de Funciones de Potencia Truncada. . . . .	37
2.1.1	La Representación de las Funciones de Potencia Truncada Puede Ser Mala. . . . .	45
2.2	La Base de Funciones B-spline. . . . .	48

2.2.1	Construcción de la Función B-spline. . . . .	48
2.2.2	Construcción de la Base de Funciones B-spline. . . . .	51
2.2.3	Relación de Recurrencia de los B-splines. . . . .	53
2.2.4	Los B-splines y las Diferencias Divididas. . . . .	58
<b>3</b>	<b>Curvas de Bézier.</b>	<b>69</b>
3.1	Definiciones y Conceptos Básicos. . . . .	69
3.2	El Algoritmo de Casteljau. . . . .	74
3.2.1	Propiedades de la curvas de Bézier. . . . .	76
3.3	La Función Blossom. . . . .	78
3.4	La Curva de Bézier en la Forma de Bernstein. . . . .	81
3.4.1	Propiedades de las curvas de Bézier. . . . .	84
3.5	Derivada de la Curva de Bézier. . . . .	87
3.5.1	Derivadas de Orden Mayor. . . . .	89
3.6	Subdivisión. . . . .	91
3.7	Funciones de Bézier. . . . .	93
<b>4</b>	<b>Curvas Spline en la Forma de Bézier.</b>	<b>95</b>
4.1	Curvas Spline. . . . .	95
4.2	Condiciones de Continuidad de las Curvas de Bézier por Pedazos. . .	97
4.2.1	Continuidad de $C^1$ y $C^2$ . . . . .	106
4.3	Curvas Spline Cuadráticas y Cúbicas. . . . .	109

<b>5</b>	<b>Curvas B-splines.</b>	<b>119</b>
5.1	El Algoritmo de Boor. . . . .	119
5.1.1	Inserción de Nodos. . . . .	120
5.2	Diferenciabilidad Continua de las Curvas B-spline. . . . .	129
5.3	El Caso Paramétrico. . . . .	130
5.4	Inserción de Nodos Repetida. . . . .	134
5.5	El Blossom B-spline. . . . .	136

## 0.1 Introducción.

A finales de 1960 no existía más que un puñado de documentos que mencionaban por su nombre a las funciones spline. En la actualidad hay sin exagerar miles de documentos sobre este tema. El rápido desarrollo de las funciones y curvas spline se debe principalmente a su gran utilidad en las aplicaciones. Ya que además de que poseen excelentes propiedades matemáticas, son fáciles de guardar, evaluar y manipular en una computadora.

Se han encontrado muchas aplicaciones de las funciones spline en la solución numérica de una variedad de problemas en matemáticas aplicadas, como por ejemplo la aproximación de funciones, cuadratura numérica, solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, ecuaciones integrales, etc.

En el caso de las curvas B-spline sus principales aplicaciones son en los distintos sistemas gráficos de diseño de curvas y superficies llamados CAD("Computer Aided Design") o CAGD("Computer Aided Geometric Design") los cuales son usados como herramientas en el diseño de barcos, carros, aviones etc.

El objetivo de esta tesis es presentar algunos aspectos teóricos y prácticos de las funciones y curvas spline. Además está acompañado de la implementación de dos applets<sup>1</sup> los cuales permiten diseñar curvas en forma libre colocando y moviendo puntos interactivamente, éstos se presentan en una página web cuya dirección es:

*[http : //www.geocities.com/tesisbsplines/AppletSpline.html](http://www.geocities.com/tesisbsplines/AppletSpline.html)*

En el capítulo1, hablaremos de la familia de funciones polinomiales por pedazos,

---

<sup>1</sup> Programa realizado en el lenguaje de programación JAVA, que permite incluirse en una página web.

probaremos que forman un espacio vectorial y discutiremos un subespacio de éste. Además trataremos la construcción del spline cúbico de interpolación y el spline paramétrico.

En el capítulo 2, el enfoque de espacio vectorial nos permitirá plantear el problema de la búsqueda de bases adecuadas para la representación de los elementos del espacio de funciones polinomiales por pedazos, aquí estudiaremos la base de funciones de potencia truncada y la base de funciones B-spline.

En el capítulo 3, trataremos la familia de curvas de Bézier por medio de su representación con el algoritmo de Casteljau y los polinomios de Bernstein, derivando distintas propiedades de estas curvas. También hablaremos de las funciones de Bézier y describiremos el proceso de subdivisión.

En el capítulo 4, explicaremos como una curva spline se representa en la forma de Bézier y estudiaremos las condiciones para la continuidad en sus derivadas. Describiremos la construcción del B-spline cuadrático y cúbico.

En el capítulo 5, generalizaremos la teoría de las curvas B-spline por medio del algoritmo de Boor, con el cual podremos hablar de diferenciabilidad de la curva B-spline, la inserción repetida de nodos y el blossom B-spline.



# Capítulo 1

## Funciones Polinomiales por Pedazos.

En este capítulo iniciaremos el estudio del conjunto de funciones polinomiales por pedazos, demostraremos que forma un espacio vectorial y estudiaremos los subespacios que se generan al imponer ciertas condiciones de continuidad, en particular hablaremos del espacio de funciones spline.

Concluiremos con la construcción del spline cúbico de interpolación y el spline paramétrico.

### 1.1 Funciones Polinomiales por Pedazos.

Una función polinomial por pedazos (fpp) es una función formada por secciones de polinomios definidos cada uno en un intervalo; por ejemplo, en la figura (1.1) se observa una fpp formada por tres polinomios definidos en los intervalos  $[-1, 0]$ ,  $(0, 2)$ ,  $[2, 3]$ . En este caso la función es continua por la izquierda en 0 y por la derecha en 2.

Otra fpp se muestra en la figura (1.2) aquí los polinomios están definidos en  $[-1, 0]$ ,  $[0, 2]$ ,  $[2, 3]$  y el límite por la izquierda y derecha en los puntos 0 y 2 coinciden, así la función es continua en  $[-1, 3]$ .



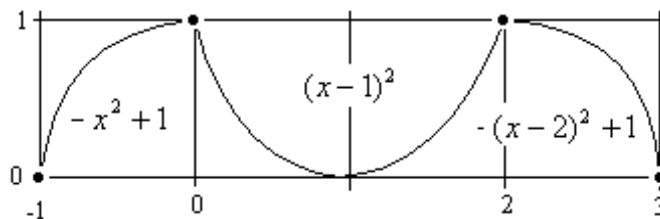


Figura 1.2: Fpp formada por tres polinomios de grado 2 continua  $[-1, 3]$ .

Al conjunto de todas las funciones polinomiales por pedazos de orden  $k$  sobre la sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  las denotaremos como  $P_{k,\varepsilon}$ , y llamaremos a los elementos que forman la subsucesión de nodos  $(\varepsilon_i)_1^{L-1}$  nodos o puntos de ruptura interiores.

**Proposición 1.1.** Sean  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  una sucesión de nodos estrictamente crecientes y  $k$  un entero mayor que cero entonces  $P_{k,\varepsilon}$  forma un espacio vectorial de dimensión  $kL$ .

**Demostración:**

i) Por demostrar que  $P_{k,\varepsilon}$  es un espacio vectorial.

Denotemos  $\mathfrak{S}$  al conjunto de todas las funciones de los reales a los reales y  $P_k$  el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que  $k - 1$  es decir ;  $\mathfrak{S} = \{f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}\}$  y  $P_k = \{p : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \mid p \text{ es un polinomio de grado } \leq k - 1\}$ .

Sabemos que  $\mathfrak{S}$  con operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{1.1}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

para  $f, g \in \mathfrak{S}$ , forma un espacio vectorial, así para mostrar que  $P_{k,\varepsilon}$  es un espacio

vectorial probaremos que es un subespacio de  $\mathfrak{S}$ .

Como  $P_{k,\varepsilon}$  es un subconjunto de  $\mathfrak{S}$  lo único que hay que mostrar es que  $P_{k,\varepsilon}$  es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalar definidos en (1.1).

Sean  $f, g \in P_{k,\varepsilon}$  y  $\alpha \in \mathfrak{R}$  así:

$$f(x) = \begin{cases} p_i(x) & \text{si } \varepsilon_i \leq x < \varepsilon_{i+1} \\ p_{L-1}(x) & \text{si } \varepsilon_{L-1} \leq x \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} p'_i(x) & \text{si } \varepsilon_i \leq x < \varepsilon_{i+1} \\ p'_{L-1}(x) & \text{si } \varepsilon_{L-1} \leq x \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

para  $p_i(x), p'_i(x) \in P_k$ ,  $i = 0, \dots, L-1$ .

Entonces

$$(f+g)(x) = \begin{cases} (p_i + p'_i)(x) = p_i(x) + p'_i(x) \in P_k & \text{si } \varepsilon_i \leq x < \varepsilon_{i+1} \\ (p_{L-1} + p'_{L-1})(x) = p_{L-1}(x) + p'_{L-1}(x) \in P_k & \text{si } \varepsilon_{L-1} \leq x \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

de donde  $f+g \in P_{k,\varepsilon}$ .

Además

$$(\alpha f)(x) = \begin{cases} (\alpha p_i)(x) = \alpha(p_i(x)) \in P_k & \text{si } \varepsilon_i \leq x < \varepsilon_{i+1} \quad i = 0, \dots, L-2 \\ (\alpha p_{L-1})(x) = \alpha(p_{L-1}(x)) \in P_k & \text{si } \varepsilon_{L-1} \leq x \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

de donde  $\alpha f \in P_{k,\varepsilon}$ .

ii) Por demostrar  $P_{k,\varepsilon}$  que tiene dimensión  $kL$ .

Como cada  $f \in P_{k,\varepsilon}$  está formada por secciones de polinomios de grado  $k-1$  en un intervalo,  $f$  se puede escribir como:

$$f(x) = \begin{cases} p_i(x) = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}x + \dots + \alpha_{k-1}^{(i)}x^{k-1} & \text{si } \varepsilon_i \leq x < \varepsilon_{i+1} \quad \text{para } i = 0, \dots, L-2. \\ p_{L-1}(x) = \alpha_0^{(L-1)} + \alpha_1^{(L-1)}x + \dots + \alpha_{k-1}^{(L-1)}x^{k-1} & \text{si } \varepsilon_{L-1} \leq x \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

Así en cada polinomio que forma la función hay sin especificar  $k$  variables (o grados de libertad)  $\alpha_j^{(i)}$  para  $j = 0, 1, \dots, k - 1$  de un total de  $L$  polinomios de donde el número total grados de libertad es  $kL$  y por lo tanto  $\dim(P_{k,\varepsilon}) = kL$ . ■

## 1.2 El Espacio Vectorial $P_{k,\varepsilon,v}$ .

Una característica deseable en una fpp es que los polinomios que la definen se unan en forma "suave", esto en términos matemáticos quiere decir que la fpp tenga ciertos grados de diferenciabilidad continua en los nodos interiores. A continuación discutiremos como representar esta característica en una fpp y sus implicaciones en el espacio  $P_{k,\varepsilon}$ .

### Condición de continuidad de las funciones polinomiales por pedazos.

Supongamos que se desea construir una fpp  $f \in P_{4,\varepsilon}$  sobre la sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^3 = (0, 1, 2, 3)$  formada por los siguientes tres polinomios:

$$f(x) = \begin{cases} p_0(x) = x^3 + x & 0 \leq x < 1 \\ p_1(x) = \alpha x^2 + \beta & 1 \leq x < 2 \\ p_2(x) = \gamma x^3 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (1.2)$$

(en donde  $\alpha, \beta, \gamma$  se determinarán en el proceso de construcción) de tal forma que  $f$  sea continua en 1 y 2 y su derivada lo sea en 1.

Esto se logra si los límites por la izquierda y la derecha de  $f$  en 1 y 2 coinciden y los de  $f'$  lo hacen en 1. Así si definimos

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_i^+) &= \lim_{x \rightarrow \varepsilon_i^+} f(x) \\ f(\varepsilon_i^-) &= \lim_{x \rightarrow \varepsilon_i^-} f(x) \end{aligned}$$

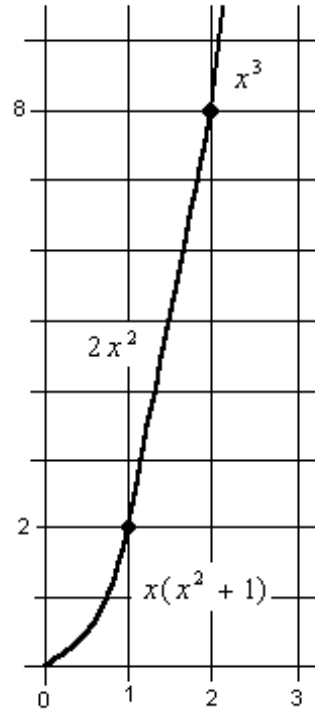


Figura 1.3: Fpp  $f$  de orden 4 formada por tres polinomios sobre la sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^4$  en donde  $f$  y  $f'$  son continuas en 1 y  $f$  es continua en 2.

las continuidades requeridas se tienen siempre que

$$f^{(0)}(1^-) = p_0^{(0)}(1) = p_1^{(0)}(1) = f(1^+) \quad (1.3)$$

$$f^{(1)}(1^-) = p_0^{(1)}(1) = p_1^{(1)}(1) = f^{(1)}(1^+)$$

$$f^{(0)}(2^-) = p_1^{(0)}(2) = p_2^{(0)}(2) = f^{(0)}(2^+)$$

donde  $f^{(j)}(x)$  representa la  $j$ -ésima derivada de  $f$  en  $x$ .

Entonces resolviendo tenemos que  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0$  y  $\gamma = 1$  de donde  $f$  está dada por (figura 1.3):

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x^2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x^3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Así en general para  $f \in P_{k,\varepsilon}$  y una sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$ . Si  $v = (v_i)_1^{L-1}$  es una sucesión de enteros positivos,  $f$  tiene  $v_i - 1$  derivadas continuas (es de clase  $C^{v_i-1}$ ) en  $\varepsilon_i$  si

$$f^{(j-1)}(\varepsilon_i^-) = f^{(j-1)}(\varepsilon_i^+)$$

o equivalentemente

$$f^{(j-1)}(\varepsilon_i^+) - f^{(j-1)}(\varepsilon_i^-) = 0 \quad (1.4)$$

para  $j = 1, \dots, v_i$ ,  $i = 1, \dots, L - 1$ .

Esta condición es llamada *condición de continuidad*.

En particular si  $v_i = 0$  quiere decir que no se imponen condiciones de continuidad en  $\varepsilon_i$ .

El conjunto de todas las funciones  $f \in P_{k,\varepsilon}$  que satisfacen (1.4) para  $v = (v_i)_1^{L-1}$  se denota por  $P_{k,\varepsilon,v}$ .

**Proposición 1.2.** Dada una sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  estrictamente crecientes, un entero positivo  $k$  y una sucesión de enteros mayores o iguales que cero  $v = (v_i)_1^{L-1}$ , el conjunto  $P_{k,\varepsilon,v}$  forma un subespacio de  $P_{k,\varepsilon}$  con dimensión  $kL - \sum_{i=1}^{L-1} v_i$ .

### Demostración:

Claramente  $P_{k,\varepsilon,v}$  es un subconjunto de  $P_{k,\varepsilon}$  así para probar que éste es un subespacio de  $P_{k,\varepsilon}$  debemos mostrar que es cerrado bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en (1.1).

Sean  $f, g \in P_{k,\varepsilon,v}$  y  $\alpha \in \Re$  entonces por hipótesis

$$\left. \begin{aligned} f^{(j-1)}(\varepsilon_i^-) - f^{(j-1)}(\varepsilon_i^+) &= 0 \\ g^{(j-1)}(\varepsilon_i^-) - g^{(j-1)}(\varepsilon_i^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f^{(j-1)}(\varepsilon_i^-) + g^{(j-1)}(\varepsilon_i^-) - (f^{(j-1)}(\varepsilon_i^+) + g^{(j-1)}(\varepsilon_i^+)) = 0 \Rightarrow$$

$$(f^{(j-1)} + g^{(j-1)})(\varepsilon_i^-) - (f^{(j-1)} + g^{(j-1)})(\varepsilon_i^+) = 0 \Rightarrow$$

$$f + g \in P_{k,\varepsilon,v}$$

para  $j = 1, \dots, v_i$  y  $i = 1, \dots, L - 1$ . De igual forma

$$f^{(j-1)}(\varepsilon_i^-) - f^{(j-1)}(\varepsilon_i^+) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha (f^{(j-1)}(\varepsilon_i^-) - f^{(j-1)}(\varepsilon_i^+)) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha f^{(j-1)}(\varepsilon_i^-) - \alpha f^{(j-1)}(\varepsilon_i^+) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha f \in P_{k,\varepsilon,v}$$

para  $j = 1, \dots, v_i$  y  $i = 1, \dots, L - 1$ .

Una vez que se hemos demostrado que  $P_{k,\varepsilon,v}$  es un subespacio de  $P_{k,\varepsilon}$ , el cálculo de su dimensión consiste simplemente en restar a  $kL$  (ya que  $\dim(P_{k,\varepsilon}) = kL$ ) el número de condiciones de continuidad que se imponen en cada nodo interior, así tenemos  $kL - \sum_{i=1}^{L-1} v_i = \dim(P_{k,\varepsilon,v})$ .

■

### 1.2.1 Funciones Spline.

Uno de los subconjuntos más populares del espacio de funciones  $P_{k,\varepsilon,v}$  es el espacio spline, ésto se debe principalmente a que una función de grado  $k - 1$  en este espacio

tiene  $k - 2$  derivadas continuas (es de clase  $C^{k-2}$ ) en el intervalo  $[\varepsilon_0, \varepsilon_L]$  lo cual proporciona una "suavidad máxima" en la unión de cada par de polinomios distintos.

**Definición 1.4.** Sean  $k$  entero mayor que cero,  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  sucesión de nodos estrictamente crecientes y  $v = (v_i)_1^{L-1}$  una sucesión de enteros no negativos. Una *función Spline de orden  $k$  (o grado  $k-1$ ) con nodos  $\varepsilon$* , es una función  $s \in P_{k,\varepsilon,v}$  para la cual  $v_i = k - 1$ , con  $i = 1, \dots, L - 1$ .

A la familia de funciones spline de orden  $k$  se le denotará por  $S_{k,\varepsilon}$ . Además si  $s \in S_{k,\varepsilon}$ ,  $s_i$  representará el  $i$ -ésimo polinomio de  $s$  sobre  $\varepsilon_{i-1} \leq x < \varepsilon_i$  para  $i = 0, \dots, L - 2$  y  $s_{L-1}$  el  $L - 1$  polinomio de  $s$  sobre  $\varepsilon_{L-1} \leq x \leq \varepsilon_L$ .

### Ejemplo1.1.

*i)* Dado un conjunto de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  estrictamente crecientes el espacio de funciones spline de orden uno  $S_{1,\varepsilon}$  está formado por los polinomios de grado cero (constantes) por pedazos sin *condición de continuidad en cada nodo interior* así para  $s \in S_{1,\varepsilon}$  se puede escribir :

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = c_0 & \text{si } \varepsilon_0 \leq x < \varepsilon_1 \\ s_1(x) = c_1 & \text{si } \varepsilon_1 \leq x < \varepsilon_2 \\ \vdots & \\ s_{L-1}(x) = c_{L-1} & \text{si } \varepsilon_{L-1} \leq x \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

Por ejemplo en la figura (1.4) se presenta un spline de orden 1 con nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^6$ .

*ii)* El espacio de funciones spline de orden dos  $S_{2,\varepsilon}$  está formado por conjunto de

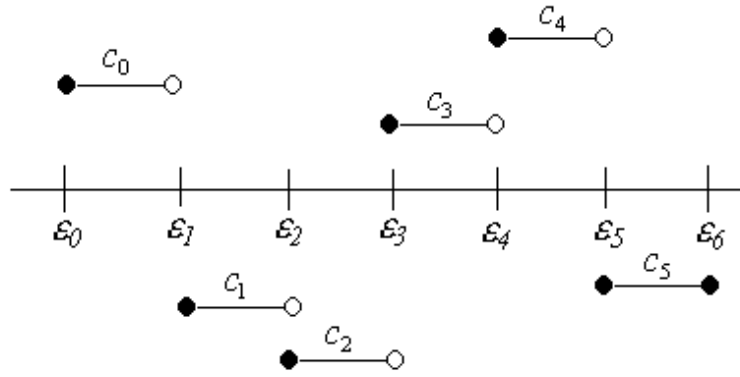


Figura 1.4: Spline de orden 1 con nodos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ .

funciones lineales por pedazos continuas así cualquier  $s \in S_{2,\varepsilon}$  se puede escribir :

$$s(x) \begin{cases} s_0(x) = \alpha_0^{(0)} + \alpha_1^{(0)}x & \text{si } \varepsilon_0 \leq x < \varepsilon_1 \\ s_1(x) = \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)}x & \text{si } \varepsilon_1 \leq x < \varepsilon_2 \\ \vdots \\ s_{L-1}(x) = \alpha_0^{(L-1)} + \alpha_1^{(L-1)}x & \text{si } \varepsilon_{L-1} \leq x \leq \varepsilon_L \end{cases}$$

en donde

$$s(\varepsilon_i^-) = s(\varepsilon_i^+) \quad \text{para } i = 1, \dots, L-1. \quad (1.5)$$

Por ejemplo en la figura (1.5) se presenta un spline de orden 2 con nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^6$ .

### Dimensión del Espacio Vectorial Spline $S_{k,\varepsilon}$ .

La dimensión de  $S_{k,\varepsilon}$  es un caso particular de la dimensión de  $P_{k,\varepsilon,v}$ . Por ejemplo para el espacio  $S_{1,\varepsilon}$  en donde no se exigen condiciones de continuidad el cual por definición es igual al espacio  $P_{1,\varepsilon,v}$  con  $v = (v_i)_1^{L-1} = (0, \dots, 0)$ , la proposición 1.2 nos indica que:

$$\dim(S_{1,\varepsilon}) = kL - \sum_{i=1}^{L-1} v_i = 1 \cdot L - 0 = L = \dim(P_{1,\varepsilon,v})$$

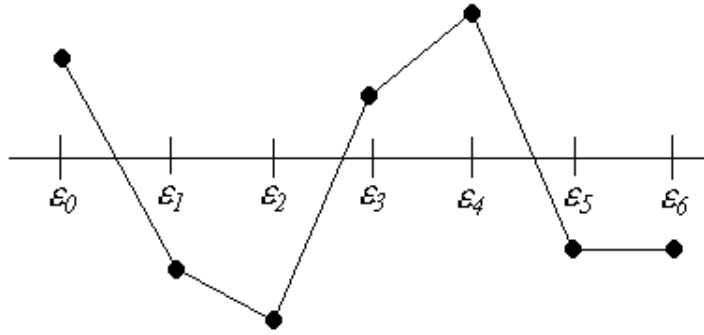


Figura 1.5: Spline de orden 2 con 7 nodos  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$

En el caso de  $S_{2,\varepsilon}$  en donde se requiere continuidad en cada nodo interior, el cual es igual al espacio  $P_{2,\varepsilon,v}$  con  $v = (v_i)_{i=1}^{L-1} = (1, \dots, 1)$  la proposición 1.2 nos dice que su dimensión esta dada por:

$$\dim(S_{2,\varepsilon}) = kL - \sum_{i=1}^{L-1} v_i = 2L - (L - 1) = L + 1$$

En general la dimensión de  $S_{k,\varepsilon}$  se calcula como:

$$\dim(S_{k,\varepsilon}) = kL - \sum_{i=1}^{L-1} v_i = kL - \sum_{i=1}^{L-1} (k - 1) = kL - (k - 1) \cdot (L - 1) = k + L - 1.$$

En la siguiente proposición se presenta otra forma de deducir este resultado.

**Proposición 1.3.** Dada una sucesión de nodos estrictamente crecientes  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  y un entero mayor que cero  $k$ ,  $\dim(S_{k,\varepsilon}) = \dim(P_{k,\varepsilon}) - (k - 1) \cdot (L - 1) = k \cdot L - (k - 1) \cdot (L - 1) = k + L - 1$ .

### Demostración:

Sea  $s \in S_{k,\varepsilon}$  entonces por definición,  $s, s', \dots, s^{(k-2)}$  tienen respectivamente la siguiente forma en cada intervalo  $[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}]$ :

$$s_i(x) = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}x + \alpha_2^{(i)}x^2 + \dots + \alpha_{k-1}^{(i)}x^{k-1}$$

$$\begin{aligned}
s_i^{(1)}(x) &= \alpha_1^{(i)} + 2\alpha_2^{(i)}x + \cdots + (k-1)\alpha_{k-1}^{(i)}x^{k-2} \\
&\vdots \\
s_i^{(k-2)}(x) &= (k-2)!\alpha_{k-2}^{(i)} + (k-1)!\alpha_{k-1}^{(i)}x
\end{aligned}$$

los cuales además cumplen:

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)}\varepsilon_i + \alpha_2^{(i)}\varepsilon_i^2 + \cdots + \alpha_{k-1}^{(i)}\varepsilon_i^{k-1} &= \alpha_0^{(i+1)} + \alpha_1^{(i+1)}\varepsilon_i + \alpha_2^{(i+1)}\varepsilon_i^2 + \cdots + \alpha_{k-1}^{(i+1)}\varepsilon_i^{k-1} \\
\alpha_1^{(i)} + 2\alpha_2^{(i)}\varepsilon_i + \cdots + (k-1)\alpha_{k-1}^{(i)}\varepsilon_i^{k-2} &= \alpha_1^{(i+1)} + 2\alpha_2^{(i+1)}\varepsilon_i + \cdots + (k-1)\alpha_{k-1}^{(i+1)}\varepsilon_i^{k-2} \\
&\vdots \\
(k-2)!\alpha_{k-2}^{(i)} + (k-1)!\alpha_{k-1}^{(i)}\varepsilon_i &= (k-2)!\alpha_{k-2}^{(i+1)} + (k-1)!\alpha_{k-1}^{(i+1)}\varepsilon_i
\end{aligned}$$

para  $i = 0, \dots, L-2$ .

Ahora igualando a cero tenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{(i)} - \alpha_0^{(i+1)} + \varepsilon_i(\alpha_1^{(i)} - \alpha_1^{(i+1)}) + \varepsilon_i^2(\alpha_2^{(i)} - \alpha_2^{(i+1)}) + \cdots + \varepsilon_i^{k-1}(\alpha_{k-1}^{(i)} - \alpha_{k-1}^{(i+1)}) &= 0 \\
\alpha_1^{(i)} - \alpha_1^{(i+1)} + 2\varepsilon_i(\alpha_2^{(i)} - \alpha_2^{(i+1)}) + 3\varepsilon_i^2(\alpha_3^{(i)} - \alpha_3^{(i+1)}) + \cdots + (k-1)\varepsilon_i^{k-2}(\alpha_{k-1}^{(i)} - \alpha_{k-1}^{(i+1)}) &= 0 \\
&\vdots \\
(k-2)!(\alpha_{k-2}^{(i)} - \alpha_{k-2}^{(i+1)}) + (k-1)!(\alpha_{k-1}^{(i)} - \alpha_{k-1}^{(i+1)})\varepsilon_i &= 0
\end{aligned}$$

para  $i = 0, \dots, L-2$ .

Este es un sistema lineal homogéneo de  $(L-1)(k-1)$  ecuaciones el cual se pueden escribir en notación matricial  $Ax = 0$ , haciendo  $x^t = [x_0^t | x_1^t | \cdots | x_{L-1}^t]$  con:

$$\begin{aligned}
x_0^t &= [\alpha_0^{(0)} \quad \alpha_1^{(0)} \quad \alpha_2^{(0)} \quad \cdots \quad \alpha_{k-1}^{(0)}] \\
x_1^t &= [\alpha_0^{(1)} \quad \alpha_1^{(1)} \quad \alpha_2^{(1)} \quad \cdots \quad \alpha_{k-1}^{(1)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x_{L-2}^t &= \begin{bmatrix} \alpha_0^{(L-2)} & \alpha_1^{(L-2)} & \alpha_2^{(L-2)} & \cdots & \alpha_{k-1}^{(L-2)} \end{bmatrix} \\ x_{L-1}^t &= \begin{bmatrix} \alpha_0^{(L-1)} & \alpha_1^{(L-1)} & \alpha_2^{(L-1)} & \cdots & \alpha_{k-1}^{(L-1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$A = \begin{bmatrix} r_{0,0}^t \\ r_{0,1}^t \\ \vdots \\ r_{0,k-2}^t \\ r_{1,0}^t \\ r_{1,1}^t \\ \vdots \\ r_{1,k-2}^t \\ r_{L-1,0}^t \\ r_{L-1,1}^t \\ \vdots \\ r_{L-1,k-2}^t \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} r_{0,j}^t &= \left[ \begin{array}{c|c|c} \varepsilon_{0,j}^t & -\varepsilon_{0,j}^t & 0 \end{array} \right] \\ r_{1,j}^t &= \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & \varepsilon_{1,j}^t & -\varepsilon_{1,j}^t \end{array} \right] \\ & \vdots \\ r_{L-2,j}^t &= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \overbrace{\left[ \varepsilon_{L-1,j}^t \mid -\varepsilon_{L-1,j}^t \right]}^{L-2} \end{aligned}$$

para  $j = 0, \dots, k - 2$  y

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,0}^t &= [1 \quad \varepsilon_i \quad \varepsilon_i^2 \quad \cdots \quad \varepsilon_i^{k-1}] \\ \varepsilon_{i,1}^t &= [0 \quad \varepsilon_i \quad 2\varepsilon_i^2 \quad \cdots \quad (k-1)\varepsilon_i^{k-1}] \\ &\vdots \\ \varepsilon_{i,k-2}^t &= [0 \quad 0 \quad \cdots \quad (k-2)! \quad (k-1)!\varepsilon_i^{k-1}]\end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, L - 1$ .

Es claro que existe una correspondencia biunívoca entre  $s$  y  $N(A)$  (el núcleo de  $A$ ) y por lo tanto  $\dim(N(A)) = \dim(S_{k,\varepsilon})$ .

Y ya que  $A$  es una matriz escalonada con renglones linealmente independientes de  $(L-1)(k-1) \times kL$  su rango es  $r(A) = (L-1)(k-1)$  y por lo tanto  $\dim(S_{k,\varepsilon}) = \dim(N(A)) = kL - r(A) = kL - (L-1)(k-1) = k + L - 1$ . ■

### 1.3 El Spline Cúbico de Interpolación.

Uno de los principales problemas que involucra a los splines, es la construcción de este tipo de funciones cumpliendo ciertas características de otra función arbitraria  $g$ , lo cual teóricamente es posible ya que como se mostró en la sección anterior este espacio tiene cierta dimensión (o grados de libertad) lo que nos permite imponer condiciones adicionales.

Discutiremos una solución al problema por medio del siguiente planteamiento:

Dada la tabla de valores:

$$\begin{array}{cccccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_{L-1} & x_L \\ g & g_0 & g_1 & \cdots & g_{L-1} & g_L \end{array} \tag{1.6}$$

para una función arbitraria  $g$  (donde  $g_i$  representa el valor de  $g$  en  $x_i$ ) construir una función  $s \in S_{4,\varepsilon}$  tal que

$$s(x_i) = g_i \quad (1.7)$$

donde  $i = 0, 1, \dots, L$ .

La función  $s$  es llamada *Spline Cúbico de Interpolación*.

### 1.3.1 Construcción.

Sea  $s \in P_{4,\varepsilon}$  con  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  estrictamente crecientes. Para lograr que  $s \in S_{4,\varepsilon}$  y cumpla (1.7) fijaremos  $\varepsilon_i = x_i$  para  $i = 0, \dots, L$  y construiremos los polinomios cúbicos  $s_i$  que forman a  $s$  de tal manera que en cada nodo interior obedezca:

$$s_{i-1}(\varepsilon_i) = g_i = s_i(\varepsilon_i) \quad (1.8)$$

$$s'_{i-1}(\varepsilon_i) = m_i = s'_i(\varepsilon_i) \quad (1.9)$$

en donde  $m_i$  que representa el valor (desconocido) de la derivada de  $g$  en  $x_i$ , con lo que se logrará que  $s$  cumpla (1.7) y la continuidad de  $s$  y  $s'$  en el intervalo  $[\varepsilon_0, \varepsilon_L]$ . Y entonces calcularemos los valores de  $m_i$  exigiendo que:

$$s''_{i-1}(\varepsilon_i) = s''_i(\varepsilon_i) \quad (1.10)$$

con lo que tendremos la continuidad de  $s''$  en  $[\varepsilon_0, \varepsilon_L]$  y  $s \in S_{4,\varepsilon}$ .

así inicialmente supondremos que se conocen los valores  $m_0, m_1, \dots, m_L$  y los polinomios  $s_i$  se obtendrán resolviendo el siguiente problema particular a partir del cual la construcción de  $s$  será inmediata: *construir un polinomio cúbico  $P(y)$  definido en*

el intervalo  $[0, 1]$  tal que:

$$P(0) = p_0, P(1) = p_1, P'(0) = p'_0 \text{ y } P'(1) = p'_1 \quad (1.11)$$

$P(y)$  se puede escribir como una combinación lineal de polinomios cúbicos  $q_0, q_1, q_2$  y  $q_3$  (una base) es decir

$$P(y) = p_0q_0(y) + p_1q_1(y) + p'_0q_2(y) + p'_1q_3(y)$$

Ahora si tomamos  $p_0 = 1$  y  $p_1 = p'_0 = p'_1 = 0$  entonces  $P(y) = q_0(y)$  de donde  $q_0$  es un polinomio cúbico con raíz doble en 1, así se puede escribir como:

$$q_0(y) = (ay + b)(y - 1)^2$$

y ya que

$$q_0(0) = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$q'_0(1) = 0 \text{ y } b = 1 \Rightarrow a = 2$$

tenemos

$$q_0(y) = (2y + 1)(y - 1)^2$$

Procediendo de la misma forma para  $q_1, q_2$  y  $q_3$  obtenemos que:

$$q_1(y) = y^2(3 - 2y)$$

$$q_2(y) = (y - 1)^2y$$

$$q_3(y) = y^2(y - 1)$$

y así :

$$P(y) = p_0(2y + 1)(y - 1)^2 + p_1y^2(3 - 2y) + p'_0(y - 1)^2y + p'_1y^2(y - 1)$$

Este polinomio es conocido como *El polinomio cúbico de Hermite*.

Así una vez resuelto el problema observemos que  $s_i$  se puede escribir en términos de éste polinomio "transladandolo" al intervalo  $[0, 1]$  por medio del siguiente cambio de variable:

$$y(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{\Delta x_i} \quad (1.12)$$

con  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ .

Es decir:

$$s_i(x) = P(y(x))$$

tomando:

$$g_i = s_i(x_i) = P(y(x_i)) = P(0) = p_0$$

$$g_{i+1} = s_i(x_{i+1}) = P(y(x_{i+1})) = P(1) = p_1$$

y como:

$$(P_i(y(x)))' = P'(y(x)) \cdot \frac{1}{\Delta x_i}$$

$$\left. \begin{aligned} m_i = s'(x_i) &= P'_i(y(x_i)) \cdot \frac{1}{\Delta x_i} = P'(0) \cdot \frac{1}{\Delta x_i} \\ m_{i+1} = s'(x_{i+1}) &= P'(y(x_{i+1})) = P'(1) \cdot \frac{1}{\Delta x_i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$p_0 = P'_i(0) = m_i \Delta x_i$$

$$p_1 = P'_i(1) = m_{i+1} \Delta x_i$$

De modo que  $s_i$  se puede escribir como:

$$s_i(x) = g_i \cdot q_0(y(x)) + g_{i+1} q_1(y(x)) + m_i \Delta x_i q_2(y(x)) + m_{i+1} \Delta x_i q_3(y(x)) \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
= & g_i \frac{(x - x_{i+1})^2 [2(x - x_i) + \Delta x_i]}{\Delta^2 x_i} + \\
& g_{i+1} \frac{(x - x_i)^2 [2(x_{i+1} - x) + \Delta x_i]}{\Delta^2 x_i} + m_i \frac{(x_{i+1} - x)^2 (x - x_i)}{\Delta^2 x_i} \\
& - m_{i+1} \frac{(x - x_i)^2 (x_{i+1} - x)}{\Delta^2 x_i}
\end{aligned}$$

y entonces  $s$  :

$$s(x) = \begin{cases} s_i(x) & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ s_{L-1}(x) & \text{si } \varepsilon_{L-1} \leq x \leq \varepsilon_L \end{cases} \quad (1.14)$$

para  $i = 0, \dots, L - 2$ .

Así el último paso para lograr que  $s \in S_{4,\varepsilon}$  será encontrar valores  $m'_i$  de tal forma que (1.14) cumpla (1.10); así derivando (1.13) tenemos que:

$$\begin{aligned}
s''_i(x) = & 6 \frac{g_{i+1} - g_i}{\Delta_i^3} (x_i + x_i - 2x) \\
& - 2m_i \frac{2x_i + x_i - 3x}{\Delta_i^2} - 2m_{i+1} \frac{2x_i + x_i - 3x}{\Delta_i^2}
\end{aligned} \quad (1.15)$$

De donde

$$\begin{aligned}
s''_i(x_i) &= 6 \frac{g_{i+1} - g_i}{\Delta_i^2} - 4 \frac{m_i}{\Delta_i} - 2 \frac{m_i}{\Delta_i} \\
s''_{i-1}(x_i) &= -6 \frac{g_i - g_{i-1}}{\Delta_{i-1}^2} + 2 \frac{m_{i-1}}{\Delta_{i-1}} + 4 \frac{m_i}{\Delta_{i-1}}
\end{aligned} \quad (1.16)$$

igualando estas dos expresiones tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_{i-1}} m_{i-1} + 2 \left( \frac{1}{\Delta_{i-1}} + \frac{1}{\Delta_i} \right) m_i + \frac{1}{\Delta_i} m_{i+1} = \\
3 \left[ \Delta_i \frac{g_i - g_{i-1}}{\Delta_{i-1}^2} + \Delta_{i-1} \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{\Delta_{i-1}^2} \right]
\end{aligned}$$

lo que es equivalente a:

$$\Delta_i m_{i-1} + 2(\Delta_{i-1} + \Delta_i) m_i + \Delta_{i-1} m_{i+1} =$$

$$3 \left[ \Delta_i \frac{g_i - g_{i-1}}{\Delta_{i-1}^2} + \Delta_{i-1} \frac{g_{i+1} - g_i}{\Delta_i} \right] \quad (1.17)$$

y dividiendo entre  $\Delta_{i-1} + \Delta_i$  obtenemos:

$$a_i m_{i-1} + d_i m_i + (1 - a_i) m_{i+1} = b_i. \quad i = 1, \dots, L - 1. \quad (1.18)$$

con

$$\begin{aligned} d_i &= 2 \\ a_i &= \Delta x_i / (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) \\ b_i &= 3 \left[ \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} \frac{g_i - g_{i-1}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \frac{g_{i+1} - g_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right] \end{aligned}$$

Si por el momento se supone que se han escogido de alguna forma los valores  $m_0$  y  $m_L$  entonces (1.18) es un sistema de  $L - 1$  ecuaciones tridiagonal dominante por renglones ya que:

$$d_i = 2 > a_i + (1 - a_i) = 1$$

por lo que (1.18) tiene solución única.

### 1.3.2 Condiciones de Frontera.

Ahora estudiaremos distintas formas de seleccionar los valores  $m_0$  y  $m_L$  llamados condiciones de frontera, las cuales definen distintos tipos de splines de interpolación cúbicos.

### Spline Cúbico Completo.

Si se conocen los valores de  $g'(x_0)$  y  $g'(x_L)$  (1.18) se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ a_1 & d_1 & 1 - a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{L-1} & d_{L-1} & 1 - a_{L-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{L-1} \\ m_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{L-1} \\ b_L \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

en donde  $b_1 = g'(x_0)$ ;  $b_n = g'(x_L)$ .

Este spline es conocido como *spline cúbico completo*.

### Spline Cúbico Natural.

Otra posibilidad es suponer que

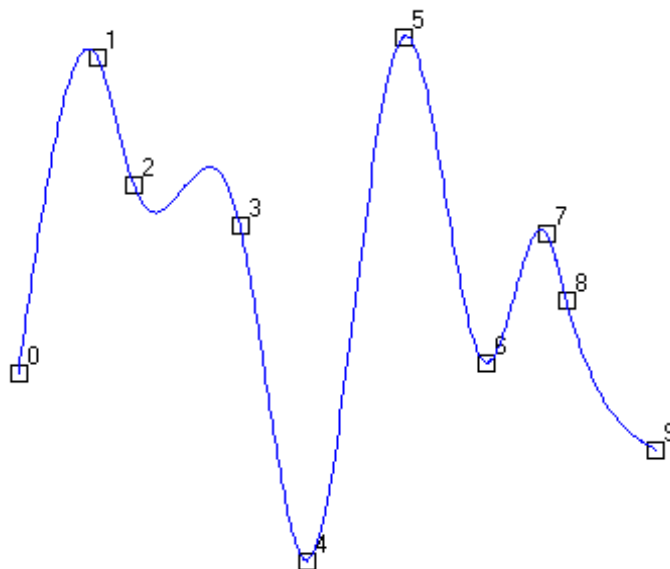
$$s''(x_0) = s''(x_L) = 0$$

Así de (1.15) ésta suposición implica :

$$\begin{aligned} 2m_0 + m_1 &= 3 \frac{g_1 - g_0}{\Delta x_0} \\ m_{L-1} + 2m_L &= 3 \frac{g_L - g_{L-1}}{\Delta x_{L-1}} \end{aligned} \quad (1.20)$$

y (1.18) se escribe como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ a_1 & d_1 & 1 - a_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{L-1} & d_{L-1} & 1 - a_{L-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{L-1} \\ m_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{L-1} \\ b_L \end{pmatrix}$$

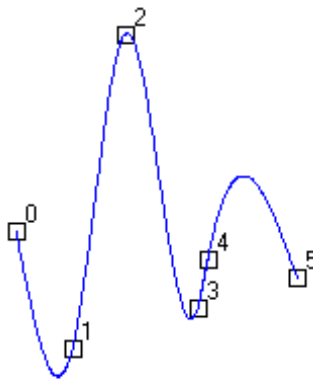


Figura~1.6: Spline natural cúbico de interpolación sobre 10 puntos.

En donde  $b_1 = \frac{g_1 - g_0}{\Delta x_0}$   $b_L = 3 \frac{g_L - g_{L-1}}{\Delta x_{L-1}}$ .

Este spline es llamado, *spline cúbico natural*.

En las figuras (1.6) y (1.7) se presentan dos spline cúbicos naturales de interpolación.



Figura~1.7: Spline natural cúbico de interpolación sobre 6 puntos.

### Spline Cúbico por Eliminación de Nodos.

Si no se conoce nada acerca de las derivadas de  $g$  en los puntos extremos, entonces podemos escoger a  $m_0$  y  $m_L$  de manera que  $s_0$  coincida con  $s_1$  y  $s_{L-2}$  con  $s_{L-1}$ . Es decir se escoge  $m_0$  y  $m_L$  de tal forma que los puntos  $x_1$  y  $x_{L-1}$  no sean puntos de ruptura (eliminando los nodos) del spline  $s$ , lo que se escribe como:

$$s_0^{(j)}(x_1) = s_1^{(j)}(x_1); \quad s_{L-2}^{(j)}(x_{L-1}) = s_{L-1}^{(j)}(x_{L-1}) \quad j = 0, 1, 2. \quad (1.21)$$

y ya que  $s$  es un polinomio cúbico (1.21) es equivalente a:

$$s_0'''(x_1) = s_1'''(x_1) \quad (1.22)$$

$$s_{L-2}'''(x_{L-1}) = s_{L-1}'''(x_{L-1})$$

Entonces derivando (1.15) tenemos:

$$s_i'''(x) = -12 \frac{g_{i+1} - g_i}{\Delta x_i^3} + 6 \frac{m_i - m_{i+1}}{\Delta x_i^2}$$

Así  $s_0'''(x_1) = s_1'''(x_1)$  se expresa como:

$$-12 \frac{g_1 - g_0}{\Delta x_1^3} + 6 \frac{m_0 + m_1}{\Delta x_1^2} = -12 \frac{g_2 - g_1}{\Delta x_1^3} + 6 \frac{m_1 - m_2}{\Delta x_2^2} \quad (1.23)$$

pero de (1.18) para  $i = 1$  :

$$m_2 = \frac{b_1 - a_1 m_0 - d_1 m_1}{1 - a_1} \quad (1.24)$$

Sustituyendo (1.24) en (1.23) y simplificando tenemos que:

$$\Delta x_1 m_0 + (x_2 - x_0) m_1 \quad (1.25)$$

$$= \frac{(\Delta x_0 + 2(x_2 - x_0)) \Delta x_1 \left( \frac{g_1 - g_0}{x_1 - x_0} \right) + \Delta x_0^2 \left( \frac{g_2 - g_1}{x_2 - x_1} \right)}{x_2 - x_0} \quad (1.26)$$

De la misma forma para  $s''_{L-2}(x_{L-1}) = s''_{L-1}(x_{L-1})$  se obtienen la ecuación

$$= \frac{(x_L - x_{L-2}) \cdot m_{L-1} + \Delta_{L-2} \cdot m_L}{x_L - x_{L-2}} + \frac{\Delta x_{L-1}^2 \cdot \left( \frac{g_{L-2} - g_{L-1}}{x_{L-2} - x_{L-1}} \right) + (\Delta x_{L-1} + 2(x_L - x_{L-2})) \cdot \Delta x_{L-2} \left( \frac{g_L - g_{L-1}}{x_L - x_{L-1}} \right)}{x_L - x_{L-2}}$$

Así las pendientes  $m_0, m_1, \dots, m_L$  de este spline se calculan como la solución del sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{pmatrix} d_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & d_1 & 1 - a_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{L-2} & d_{L-2} & 1 - a_{L-2} \\ & & & a_{L-1} & d_{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{L-2} \\ m_{L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{L-2} \\ b_{L-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$d_0 = \Delta x_1, \quad a_0 = x_2 - x_0, \quad a_{L-1} = x_{L-1} - x_{L-3}, \quad d_{L-1} = \Delta_{L-3};$$

$$b_0 = \frac{(\Delta x_0 + 2(x_2 - x_0)) * \Delta x_1 \left( \frac{g_1 - g_0}{x_1 - x_0} \right) + \Delta x_0^2 \left( \frac{g_2 - g_1}{x_2 - x_1} \right)}{x_2 - x_0}$$

$$b_{L-1} = \frac{\Delta x_{L-1}^2 \left( \frac{g_{L-2} - g_{L-1}}{x_{L-2} - x_{L-1}} \right) + (\Delta x_{L-1} + 2(x_L - x_{L-2})) \Delta x_{L-2} \left( \frac{g_L - g_{L-1}}{x_L - x_{L-1}} \right)}{x_L - x_{L-2}}.$$

En la figuras (1.8) y (1.9) se presentan los splines cúbicos por eliminación de nodos sobre los mismos puntos de las figuras (1.6) y (1.7) aquí se observa como la condición (1.22) hace que la unión de la primer y segunda sección polinomial del spline sea suave (de clase  $C^{(3)}$ ), lo mismo se sucede para la penúltima y última sección.

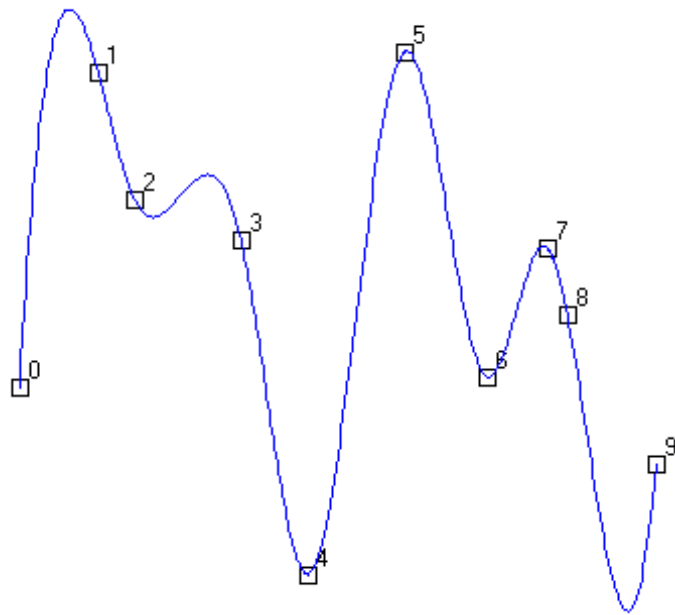


Figura 1.8: Spline cúbico de interpolación por eliminación de nodos.

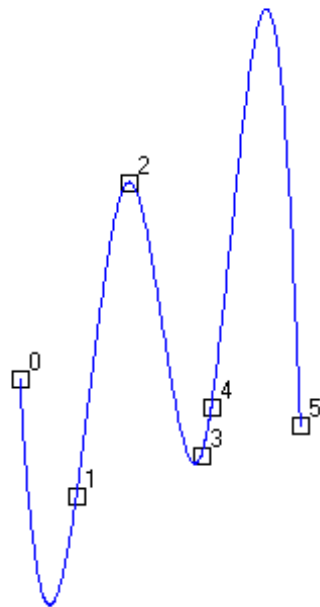


Figura 1.9: Spline cúbico de interpolación por eliminación de nodos.

## 1.4 El Spline Cúbico Paramétrico.

Uno de los problema comunes que se presenta en la práctica, es la aproximación de un conjunto de puntos en el plano haciendo pasar una curva suave por ellos. En esta sección se propondrá una solución a este problema por medio de la construcción de una curva spline cúbica que interpole los puntos.

La idea principal es suponer que el conjunto de ordenadas y abscisas digamos  $\{(x_i, y_i) | i = 0, \dots, L\}$  son la imagen de dos funciones arbitrarias  $g(t)$  y  $h(t)$  sobre el conjunto de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  es decir:

$$g(\varepsilon_i) = x_i$$

$$h(\varepsilon_i) = y_i$$

para  $i = 0, \dots, L$ , y entonces aplicar dos splines cúbicos de interpolación  $s_x$  y  $s_y$  respectivamente a las siguientes tablas:

$$t \quad \varepsilon_0 \quad \varepsilon_1 \quad \cdots \quad \varepsilon_{L-1} \quad \varepsilon_L$$

$$g(t) \quad x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{L-1} \quad x_L$$

y

$$t \quad \varepsilon_0 \quad \varepsilon_1 \quad \cdots \quad \varepsilon_{L-1} \quad \varepsilon_L$$

$$h(t) \quad y_0 \quad y_1 \quad \cdots \quad y_{L-1} \quad y_L$$

utilizando alguna de las condiciones de frontera discutidas en la sección 1.3.2.

Una curva formada por los splines  $s_x$  y  $s_y$  es llamada *spline cúbico paramétrico*.

Como es de suponer la elección de la parametrización  $\varepsilon$  es una de las partes más importantes en la construcción de este spline ya que una elección adecuada evita rugosidades, los expertos sugieren que las parametrizaciones más adecuadas son

aquellas que aproximan la longitud del arco formado por dos puntos cualesquiera  $(x_i, y_i)$  y  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  así podemos tomar como parámetros  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon_0 = 0$$

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + d_i$$

para  $i = 0, 1, \dots, L - 1$

En donde  $d_i$  puede ser alguna de las siguientes:

$$i) \quad d_i = \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i}$$

$$ii) \quad d_i = \Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i$$

$$iii) \quad d_i = |\Delta^2 x_i| + |\Delta^2 y_i|$$

$$iv) \quad d_i = \max \{|\Delta x_i|, |\Delta y_i|\}$$

La selección de  $i)$  representa la longitud de la cuerda que pasa por los puntos  $(x_i, y_i)$  y  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  y en la práctica se ha podido comprobar que esta selección es muy conveniente.

Una vez que se escogió los puntos  $\varepsilon_i$ ;  $i = 0, \dots, L$  entonces de (1.18) se obtiene inmediatamente las pendientes del spline  $s_x$  que interpola las abcisas, calculadas como solución del sistema:

$$a_i m_{i-1} + d_i m_i + (1 - a_i) m_{i+1} = b_i$$

para  $i = 1, \dots, L - 1$  donde

$$d_i = 2 \tag{1.27}$$

$$a_i = \frac{\Delta \varepsilon_i}{(\Delta \varepsilon_{i-1} + \Delta \varepsilon_i)}$$

$$b_i = 3 \left[ \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta \varepsilon_{i-1}} \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta \varepsilon_{i-1} + \Delta \varepsilon_i} + \frac{\Delta \varepsilon_{i-1}}{\Delta \varepsilon_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta \varepsilon_{i-1} + \Delta \varepsilon_i} \right]$$

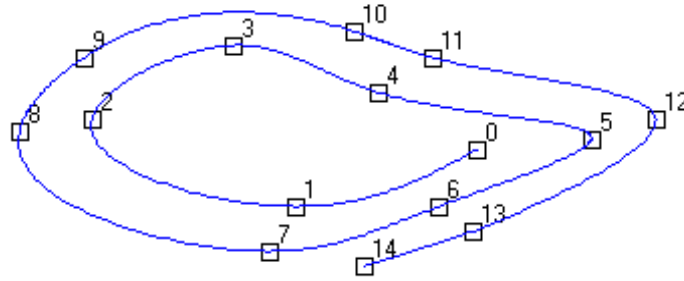


Figura ~1.10: Spline paramétrico cúbico sobre 15 puntos.

De forma similar, las pendientes  $m_0, \dots, m_L$  del spline  $s_y$  que interpola las ordenadas se obtienen como solución del sistema:

$$a_i m_{i-1} + d_i m_i + (1 - a_i) m_{i+1} = b_i$$

para  $i = 1, \dots, L - 1$  donde

$$d_i = 2 \tag{1.28}$$

$$a_i = \frac{\Delta \varepsilon_i}{(\Delta \varepsilon_{i-1} + \Delta \varepsilon_i)}$$

$$b_i = 3 \left[ \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta \varepsilon_{i-1}} \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta \varepsilon_{i-1} + \Delta \varepsilon_i} + \frac{\Delta \varepsilon_{i-1}}{\Delta \varepsilon_i} \frac{\Delta y_i}{\Delta \varepsilon_{i-1} + \Delta \varepsilon_i} \right]$$

En la figura (1.10) se muestra un spline paramétrico sobre 15 puntos y en la figura (1.11) otro sobre 10 puntos.

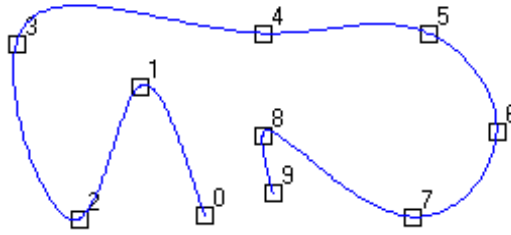


Figura 1.11: Spline paramétrico sobre 10 puntos.

### 1.4.1 Spline Paramétrico Cerrado.

Supongamos ahora que los puntos  $\{(x_i, y_i) | i = 0, \dots, L\}$  provienen de un problema cuyas características hacen suponer que la curva de interpolación debe ser cerrada.

Entonces ninguna de las condiciones de frontera estudiadas en la sección 1.3.2 es útil. Para lograr que el spline paramétrico sea una curva cerrada y que en el punto de cierre el empate sea suave, basta con exigir que las funciones  $s_x$  y  $s_y$  del spline paramétrico, sean periódicas es decir que:

$$s_x^{(j)}(\varepsilon_0) = s_x^{(j)}(\varepsilon_L) \quad (1.29)$$

$$s_y^{(j)}(\varepsilon_0) = s_y^{(j)}(\varepsilon_L)$$

para  $j = 0, 1, 2$ .

La condición (1.29) para  $j = 0$ , o sea el cierre de la curva, se logra simplemente exigiendo que el primer y el último punto de interpolación coincidan es decir  $(x_0, y_0) = (x_L, y_L)$ .

La condición (1.29) para  $s_x$  y  $j = 1$  está garantizada si en (1.18) se elimina la incógnita  $m_L$  porque  $m_L = m_0$ . De manera similar se debe proceder en el sistema correspondiente para el cálculo de las pendientes del spline  $s_y$ .

Por último, teniendo en cuenta que  $m_0 = m_L$  de (1.15) obtenemos que:

$$s''_x(\varepsilon_0) = 6 \frac{x_1 - x_0}{\Delta\varepsilon_0^2} - 4 \frac{m_0}{\Delta\varepsilon_0} - 2 \frac{m_1}{\Delta\varepsilon_0}$$

$$s''_x(\varepsilon_L) = -6 \frac{x_L - x_{L-1}}{\Delta\varepsilon_{L-1}^2} + 2 \frac{m_{L-1}}{\Delta\varepsilon_{L-1}} + 4 \frac{m_0}{\Delta\varepsilon_{L-1}}$$

Luego, la condición (1.29) para  $s_x$  y  $j = 2$  se expresa mediante la ecuación:

$$2 \left[ \frac{1}{\Delta\varepsilon_0} + \frac{1}{\Delta\varepsilon_{L-1}} \right] m_0 + \frac{1}{\Delta\varepsilon_0} m_1 + \frac{1}{\Delta\varepsilon_{L-1}} m_{L-1}$$

$$= 3 \left[ \frac{\Delta\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon_0^2} + \frac{\Delta\varepsilon_{L-1}}{\Delta\varepsilon_{L-1}^2} \right]$$

o equivalentemente por:

$$2m_0 + \frac{\Delta\varepsilon_{L-1}}{\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{L-1}} m_1 + \frac{\Delta\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{L-1}} m_{L-1}$$

$$= 3 \left[ \frac{\Delta\varepsilon_{L-1}}{\Delta\varepsilon_0} \frac{\Delta x_0}{\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{L-1}} + \frac{\Delta\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon_{L-1}} \frac{\Delta x_{L-1}}{\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{L-1}} \right]$$

Así las pendientes  $m_0, \dots, m_{L-2}, m_{L-1}$ , ( $m_L = m_0$ ) de spline periódico  $s_x$  que interpola las abcisas, se obtienen como solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} d_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 - a_0 \\ a_1 & d_1 & 1 - a_1 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & a_{L-2} & d_{L-2} & 1 - a_{L-2} \\ 1 - a_{L-1} & 0 & \cdots & 0 & a_{L-1} & d_{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{L-2} \\ m_{L-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{L-2} \\ b_{L-1} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

donde

$$d_0 = 2 \quad a_0 = \Delta\varepsilon_{L-1}/(\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{L-1}) \quad (1.31)$$

$$b_0 = 3 \left[ \frac{\Delta\varepsilon_{L-1}}{\Delta\varepsilon_0} \frac{\Delta x_0}{\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{L-1}} + \frac{\Delta\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon_{L-1}} \frac{\Delta x_{L-1}}{\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{L-1}} \right]$$

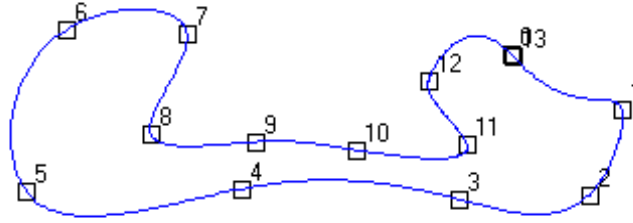


Figura 1.12: Spline cúbico cerrado con el que se dibuja el símbolo de nota musical.

y el resto de los elementos de la matriz y el lado derecho están dados por (1.27).

De forma análoga las pendientes  $m_0, \dots, m_{L-2}$  del spline cúbico  $s_y$  que interpola las ordenadas se calculan como solución de un sistema lineal (1.30) con lado derecho dado por (1.28) y

$$b_0 = \frac{\Delta\varepsilon_{L-1}}{\Delta\varepsilon_0} \frac{\Delta y_0}{\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{L-1}} + \frac{\Delta\varepsilon_0}{\Delta\varepsilon_{L-1}} \frac{\Delta y_{L-1}}{\Delta\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_{L-1}}$$

En las figuras (1.12) se muestra un spline cerrado el con el cual se dibuja el símbolo más común de las notas musicales en la figura (1.13) se muestra una "h" acostada.

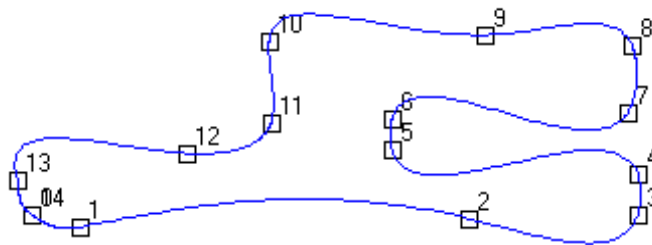


Figura 1.13: Spline cerrado que dibuja una h acostada.

# Capítulo 2

## Representación de Funciones Polinomiales por Pedazos.

En el primer capítulo se probó que el conjunto de todas las funciones polinomiales por pedazos  $P_{k,\varepsilon}$  y en particular  $P_{k,\varepsilon,v}$  y  $S_{k,\varepsilon}$  forman espacios vectoriales, así cualquier elemento en estos conjuntos tiene una representación única en términos de alguna de sus bases. En este capítulo estudiaremos la construcción de la base de funciones de potencia truncada y la base de funciones B-spline. Además mostraremos porque en algunos casos la representación de potencia truncada acarrea errores de perdida precisión y como se eliminan por medio de las funciones B-splines. Por último hablaremos de la relación de los B-splines y las diferencias divididas.

### 2.1 La Base de Funciones de Potencia Truncada.

#### La Función de Potencia Truncada.

Una función de potencia truncada (fpt) es una función de potencia la cual en una "gran" parte de su dominio es igual a cero, está truncada.

**Definición 2.1.** Sea  $x \in \mathfrak{R}$  y  $k$  entero mayor que cero si  $(x)_+ = \max\{x, 0\}$  entonces la *función de potencia truncada de grado  $k$*  se define como:

$$(x)_+^k = x_+^k = (x_+)^k = (\max\{x, 0\})^k. \quad (2.1)$$

Por ejemplo en la figura (2.1) se muestran cuatro funciones de potencia truncada de grados 0, 1, 2 y 3

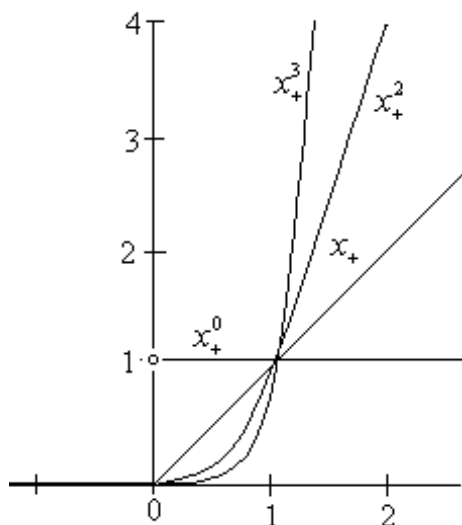


Figura 2.1: Funciones de potencia truncada  $x_+^0$ ,  $x_+$ ,  $x_+^2$ ,  $x_+^3$ .

aquí podemos observar que estas funciones toman el valor de  $x^k$  si  $x \geq 0$  y cero si  $x < 0$  para  $k = 0, 1, 2, 3$  así una definición equivalente de una fpt es:

$$x_+^k = \begin{cases} x^k & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ahora observemos que si  $t \in \mathfrak{R}$

$$f(x) = (x - t)_+^k = \begin{cases} (x - t)^k & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases} \quad (2.2)$$

es una función de potencia truncada de grado  $k$  trasladada  $t$  veces hacia la derecha del origen si  $t > 0$ ,  $t$  veces hacia la izquierda si  $t < 0$  e igual a (2.1) si  $t = 0$ , en la figura

(2.2) se presenta el caso cuando  $t > 0$ . Esta función es una función polinomial por pedazos con  $t$  como único punto de ruptura, ya que está formada por dos polinomios (el polinomio idénticamente cero y el polinomio  $(x - t)^k$ ) definidos en los intervalos  $(-\infty, t)$  y  $[t, \infty)$  y cuyo límite por la izquierda y la derecha en  $t$  coinciden, es decir es continua en  $(-\infty, \infty)$ .

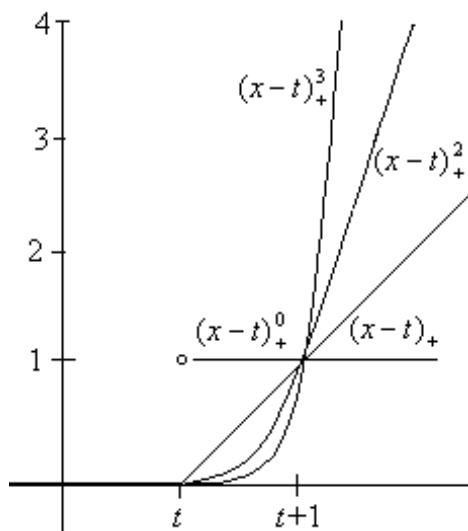


Figura 2.2: Funciones de potencia truncada  $(x - t)_+^0$ ,  $(x - t)_+$ ,  $(x - t)_+^1$ ,  $(x - t)_+^2$ ,  $(x - t)_+^3$  con  $t > 0$ .

Por otro lado como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} (x - t)_+^k = \frac{d}{dx} (\max\{0, (x - t)\})^k \\ &= k \cdot (\max\{0, (x - t)\})^{k-1} = k \cdot (x - t)_+^{k-1}. \end{aligned}$$

la  $r$ -ésima derivada para  $r < k$  es igual a:

$$\frac{d^r}{dx^r} (x - t)_+^k = k \cdot (k - 1) \cdots ((k - (r - 1))) \cdot (x - t)_+^{k-r}$$

y

$$\frac{d^k}{dx^k}(x-t)_+^k = \begin{cases} k! & \text{si } x > t \\ 0 & \text{si } x \leq t \end{cases}$$

si  $r = k$ .

Es decir (2.2) tiene  $k - 1$  derivadas continuas y un brinco de tamaño  $k!$  en la  $k - \text{ésima}$  derivada en  $t$  (es discontinua) y así:

$$f^{(j-1)}(t^-) - f^{(j-1)}(t^+) = 0 \quad (2.3)$$

para  $j = 1, \dots, k$ .

De donde  $f \in P_{k+1,\varepsilon,v}$  y  $f \in S_{k+1,\varepsilon}$  con  $\varepsilon = \{t\}$  y  $v = (k)$ .

### Construcción de la base de Funciones de Potencia Truncada.

Como  $P_{k,\varepsilon}$  forma un espacio vectorial es posible hablar de su espacio dual, es decir el conjunto de todas las funcionales lineales  $\lambda : P_{k,\varepsilon} \rightarrow \mathfrak{R}$ .

En esta sección definiremos una familia de funciones de potencia truncada y una familia funcionales lineales de  $P_{k,\varepsilon}$  con los que probaremos que esta la familia de funciones forma una base de  $P_{k,\varepsilon}$  y obtendremos representaciones únicas de cualquier función de  $P_{k,\varepsilon}$ ,  $P_{k,\varepsilon,v}$  y  $S_{k,\varepsilon}$  en términos de esta base.

**Definición 2.2 :** Dada una sucesión de nodos estrictamente creciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  y un entero mayor que cero  $k$ , si  $x \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  y  $f \in P_{k,\varepsilon}$ , definimos la familia de funciones de potencia truncada  $\phi_{rs}(x)$  y la familia de funcionales lineales  $\lambda_{ij}(f)$  del espacio dual de  $P_{k,\varepsilon}$  respectivamente como:

$$\phi_{rs}(x) = \begin{cases} \frac{(x-\varepsilon_0)^s}{s!} & \text{si } r = 0 \\ \frac{(x-\varepsilon_i)_+^s}{s!} & \text{si } r = 1, \dots, L-1 \end{cases} \quad (2.4)$$

para  $s = 0, \dots, k - 1$ .

y

$$\lambda_{ij}(f) = \begin{cases} f^{(j)}(\varepsilon_0) & \text{si } i = 0 \\ f^{(j)}(\varepsilon_i^+) - f^{(j)}(\varepsilon_i^-) & \text{si } i = 1, \dots, L - 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

para  $j = 0, \dots, k - 1$ .

Para probar que las funciones  $\phi_{rs}$  forman una base de  $P_{k,\varepsilon}$  primero mostraremos que este conjunto es linealmente independiente, para ésto necesitamos el siguiente lema.

**Lema 2.1.** La familia de funciones y funcionales  $\phi_{rs}$  y  $\lambda_{ij}$  cumplen:

$$\lambda_{ij}(\phi_{rs}) = \delta_{ir}\delta_{js} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = r, j = s \\ 0 & \text{c.o.c. (cualquier otro caso)} \end{cases}$$

para  $i, r = 0, \dots, L - 1, j, s = 0, \dots, k - 1$ .

**Demostración:**

De (2.5)

$$\lambda_{ij}(\phi_{rs}) = \begin{cases} \phi_{rs}^{(j)}(\varepsilon_0) & \text{si } i = 0 \\ \phi_{rs}^{(j)}(\varepsilon_i^+) - \phi_{rs}^{(j)}(\varepsilon_i^-) & \text{si } i = 1, \dots, L - 1 \end{cases}$$

y sustituyendo (2.4):

$$\phi_{rs}^{(j)}(\varepsilon_0) = \begin{cases} \left( \frac{(x-\varepsilon_0)^s}{s!} \right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_0} & \text{si } r = 0 \\ \left( \frac{(x-\varepsilon_r)_\pm^s}{s!} \right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_0} & \text{si } r = 1, \dots, L - 1 \end{cases}$$

$$\phi_{rs}^{(j)}(\varepsilon_i^+) - \phi_{rs}^{(j)}(\varepsilon_i^-) = \begin{cases} \left( \frac{(x-\varepsilon_0)^s}{s!} \right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_i^+} - \left( \frac{(x-\varepsilon_0)^s}{s!} \right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_i^-} & \text{si } r = 0 \\ \left( \frac{(x-\varepsilon_r)_\pm^s}{s!} \right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_i^+} - \left( \frac{(x-\varepsilon_r)_\pm^s}{s!} \right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_i^-} & \text{si } r = 1, \dots, L - 1. \end{cases}$$

Como la función  $\phi_{0s}(x) = \frac{(x-\varepsilon_0)^s}{s!}$  toma el valor de cero si  $x = \varepsilon_0$ , tiene  $s - 1$  derivadas continuas en  $\varepsilon_0$  y toma el valor de uno al derivarla  $s$  veces, tenemos que:

$$\left(\frac{(x-\varepsilon_0)^s}{s!}\right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = i = 0 \text{ y } j = s \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$\left(\frac{(x-\varepsilon_0)^s}{s!}\right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_i^+} - \left(\frac{(x-\varepsilon_0)^s}{s!}\right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_i^-} = 0 \quad \text{para } r \neq i \text{ y } \forall j, s.$$

De forma similar la función  $\phi_{rs}(x) = \frac{(x-\varepsilon_r)_+^s}{s!}$  (para  $r = 1, \dots, L - 1$ ) tiene  $s - 1$  derivadas continuas en  $\varepsilon_r$ , toma el valor de cero si  $x \leq \varepsilon_r$  y uno al derivarla  $s$  veces, entonces:

$$\left(\frac{(x-\varepsilon_r)_+^s}{s!}\right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_0} = 0 \quad \text{si } i \neq r \text{ y } \forall s, j$$

$$\left(\frac{(x-\varepsilon_r)_+^s}{s!}\right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_i^+} - \left(\frac{(x-\varepsilon_r)_+^s}{s!}\right)^{(j)} \Big|_{x=\varepsilon_i^-} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = i \text{ y } j = s \\ 0 & \text{si } r \neq i \text{ y } \forall j, s \end{cases}$$

■

**Proposición 2.1:** La sucesión de funciones  $\phi_{rs}$  son linealmente independientes.

**Demostración:**

Por demostrar que:

$$\sum_{r=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_{rs} \phi_{rs} = 0 \Rightarrow \alpha_{rs} = 0$$

Observemos que si a la igualdad  $\sum_r \sum_s \alpha_{rs} \phi_{rs} = 0$  aplicamos de ambos lados el funcional lineal  $\lambda_{ij}$  temos que:

$$\lambda_{ij} \left( \sum_r \sum_s \alpha_{rs} \phi_{rs} \right) = \sum_r \sum_s \alpha_{rs} \lambda_{ij}(\phi_{rs}) = 0$$

y del lema 2.1.

$$\sum_r \sum_s \alpha_{rs} \delta_{ir} \delta_{js} = 0 \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$$

para  $i = 0, 1, \dots, L - 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, k - 1$ .

■

Por último como las funciones  $\phi_{rs}$  para  $r = 0, \dots, L - 1$ ,  $s = 0, \dots, k - 1$  suma un total  $kL$ , igual a la dimensión de  $P_{k,\varepsilon}$  (proposición 1.1) concluimos que el conjunto

$$\{\phi_{ij}\}_{i=0,\dots,L-1,j=0,\dots,k-1}$$

forma una base de  $P_{k,\varepsilon}$ .

La siguiente proposición muestra como podemos representar una función  $f \in P_{k,\varepsilon}$  en términos de las funciones  $\phi_{rs}$  y las funcionales lineales  $\lambda_{ij}$ .

**Proposición 2.2.** Dada una sucesión  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  estrictamente creciente y un entero mayor que cero  $k$  si  $f \in P_{k,\varepsilon}$  entonces  $f$  se puede representar de manera única como:

$$f = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda_{ij} f) \phi_{ij} \quad (2.6)$$

**Demostración:**

Ya que  $\{\phi_{rs}\}_{r=0,\dots,L-1,s=0,\dots,k-1}$  forma una base de  $P_{k,\varepsilon}$ , existen valores únicos  $\alpha_{rs} \in \mathfrak{R}$ ,  $r = 0, \dots, L - 1$ ,  $s = 0, \dots, k - 1$ , tal que

$$f = \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_{rs} \phi_{rs} \quad (2.7)$$

Por otro lado observemos que:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda_{ij} f) \phi_{ij} = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left( \lambda_{ij} \left( \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_{rs} \phi_{rs} \right) \right) \phi_{ij}$$

$$\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left( \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_{rs} \lambda_{ij}(\phi_{rs}) \right) \phi_{ij} = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left( \sum_{r=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_{rs} \delta_{ir} \delta_{js} \right) \phi_{ij}$$

$$\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ij} \phi_{ij} = f. \quad \blacksquare$$

(2.4) y (2.5) en (2.7)  $f$  se puede escribir como:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(\varepsilon_0)(x - \varepsilon_0)^j}{j!} + \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f^{(j)}(\varepsilon_i^+) - f^{(j)}(\varepsilon_i^-))(x - \varepsilon_i)_+^j}{j!} \quad (2.8)$$

Observemos que en esta expresión el "salto" en las derivadas de  $f$  en los puntos de ruptura interiores aparece explícitamente. Esto hace que las condiciones de continuidad (1.4) sean muy sencillas de abordar pues simplemente eliminamos del segundo sumando de (2.8) los coeficientes tales que:

$$f^{(j)}(\varepsilon_i^+) - f^{(j)}(\varepsilon_i^-) = 0$$

así si  $f \in P_{k,\varepsilon,v}$  con  $v = (v_i)_1^{L-1}$  sucesión de enteros positivos se puede escribir en términos de las funciones de potencia truncada de forma única como:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(\varepsilon_0)(x - \varepsilon_0)^j}{j!} + \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{j=v_i}^{k-1} \frac{(f^{(j)}(\varepsilon_i^+) - f^{(j)}(\varepsilon_i^-))(x - \varepsilon_i)_+^j}{j!}$$

y en particular si  $(v_i)_1^{L-1} = (k-1, \dots, k-1)$  cualquier  $s \in S_{k,\varepsilon}$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^{(j)}(\varepsilon_0)(x - \varepsilon_0)^j}{j!} + \sum_{i=1}^{L-1} \frac{(s^{(k-1)}(\varepsilon_i^+) - s^{(k-1)}(\varepsilon_i^-))(x - \varepsilon_i)_+^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{s_0^{(j)}(\varepsilon_0)(x - \varepsilon_0)^j}{j!} + \sum_{i=1}^{L-1} \frac{(s_i^{(k-1)}(\varepsilon_i) - s_{i-1}^{(k-1)}(\varepsilon_i))(x - \varepsilon_i)_+^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned} \quad (2.9)$$

en donde  $s_i$  representa el  $i$ -ésimo polinomio de  $s$ .

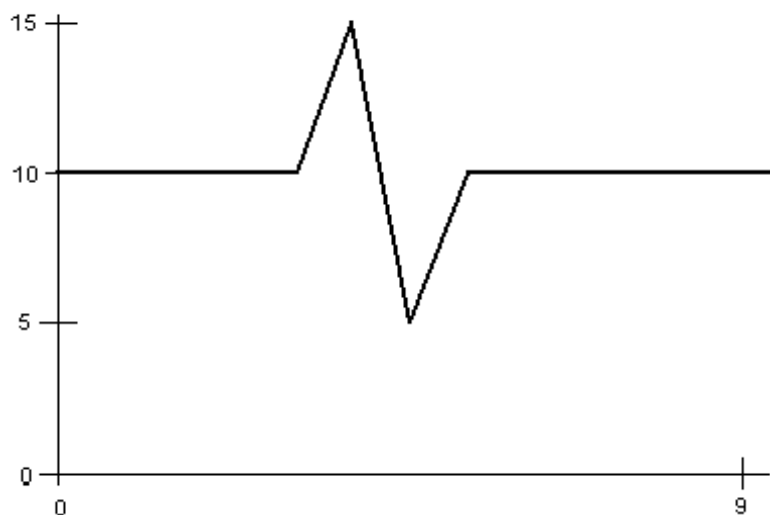


Figura 2.3: Función como una "recta rota".

### 2.1.1 La Representación de las Funciones de Potencia Truncada Puede Ser Mala.

Como se mencionó al inicio del capítulo la representación de una función fpp en términos de la base de funciones de potencia truncada puede acarrear errores de precisión, en esta sección estudiaremos este problema por medio de un ejemplo.

Construyamos una función spline  $s$  de orden 2 ( $s \in S_{2,\varepsilon}$ ) con  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^9$ , representada por medio de la base de funciones de potencia truncada como una "recta rota", es decir deseamos que  $s$  aproxime a una función como la que se muestra en la figura (2.3).

así si tomamos  $\varepsilon_i = i$  para  $i \in \{0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$  las secciones polinomiales de  $s$  definidas en estos nodos serán igual a 10, es decir

$$s_i(x) = 10 \quad \text{para} \quad i \in \{0, 1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$

y para  $i = 3, 4, 5$  cada  $s_i$  será igual a:

$$s_i(x) = (x - \varepsilon_i)m_i + s_i(\varepsilon_i)$$

con

$$m_i = \frac{s_i(\varepsilon_{i+1}) - s_i(\varepsilon_i)}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} = \frac{s_i(\varepsilon_{i+1}) - s_i(\varepsilon_i)}{\Delta\varepsilon_i}$$

de donde  $s'_i(x) = m_i$ , las cuales además deben cumplir que

$$s_3(\varepsilon_4) = 15 = s_4(\varepsilon_4)$$

$$s_4(\varepsilon_5) = 5 = s_5(\varepsilon_5)$$

así de (2.9) este spline se puede escribir como:

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{j=0}^1 \frac{s_0^{(j)}(\varepsilon_0)(x - \varepsilon_0)^j}{j!} + \sum_{i=1}^9 (s'_i(\varepsilon_i) - s'_{i-1}(\varepsilon_i))(x - \varepsilon_i)_+ \quad (2.10) \\ &= s(\varepsilon_0) + \sum_{i=3}^6 (s'_i(\varepsilon_i) - s'_{i-1}(\varepsilon_i))(x - \varepsilon_i)_+ \\ &= s_0(\varepsilon_0) + (m_3 - 0)(x - \varepsilon_3)_+ + (m_4 - m_3)(x - \varepsilon_4)_+ \\ &\quad + (m_5 - m_4)(x - \varepsilon_5)_+ + (0 - m_5)(x - \varepsilon_6)_+ \\ &= 10 + 5(x - 3)_+ + \left(\frac{-10}{\Delta\varepsilon_4} - \frac{5}{\Delta\varepsilon_3}\right)(x - \varepsilon_4)_+ \\ &\quad + \left(\frac{5}{\Delta\varepsilon_5} + \frac{10}{\Delta\varepsilon_4}\right)(x - \varepsilon_5)_+ + 5(x - 6)_+. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que  $\Delta\varepsilon_4 \simeq 0$ , es decir  $\varepsilon_4$  se aproxima a  $\varepsilon_5$  (o viceversa) lo que implica:

$$(x - \varepsilon_4)_+ \simeq (x - \varepsilon_5)_+$$

y además

$$-\left(\frac{-10}{\Delta\varepsilon_4} - \frac{5}{\Delta\varepsilon_3}\right) \simeq \left(\frac{5}{\Delta\varepsilon_5} + \frac{10}{\Delta\varepsilon_4}\right) \gg 1$$

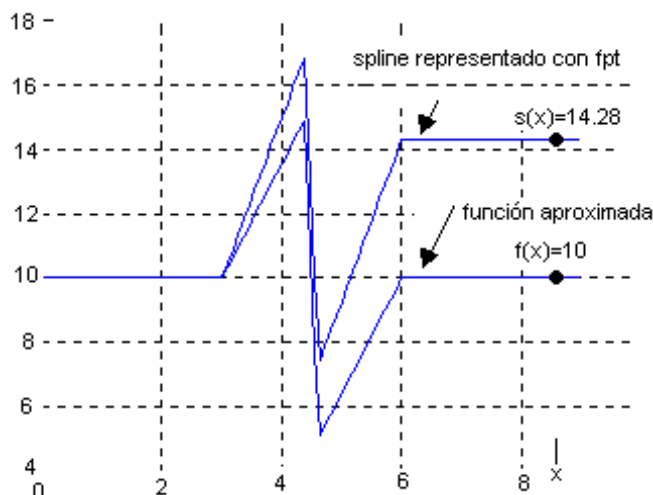


Figura 2.4: El spline representado por fpts el cual aproxima una "recta rota" se "deforma" ya que la pendiente de  $s_4$  tiende a ser vertical.

esto último es cierto ya que los cocientes  $\frac{-10}{\Delta\varepsilon_4}$  y  $\frac{10}{\Delta\varepsilon_4}$  tienden a infinito y menos infinito respectivamente y así  $\frac{15}{\Delta\varepsilon_3}$  y  $\frac{5}{\Delta\varepsilon_5}$  no son significativos. En términos geométricos  $\Delta\varepsilon_4 \simeq 0$  quiere decir que la pendiente de  $s_4$ , ( $m_4 = \frac{s(\varepsilon_5) - s(\varepsilon_6)}{\Delta\varepsilon_4}$ ) tiende a ser vertical, lo cual "deforma" al spline. Esto causa una pérdida de precisión en la evaluación de ciertos puntos en  $s$ .

Por ejemplo tomemos  $\varepsilon_4 = 4.4$  y  $\varepsilon_5 = 4.6$  entonces  $\Delta\varepsilon_4 = 0.2$ , usando aritmética de dos dígitos decimales y redondeando al número decimal par más cercano (2.10) es igual a :

$$s(x) = 10 + 5(x - 3)_+ - 53.58(x - 4.4)_+ + 53.58(x - 4.6)_+ - 5(x - 6)_+$$

para  $0 \leq x \leq 9$ .

Si  $x = 8.5$ , evaluando en esta expresión tenemos que  $s(8.5) = 14.28$ , sin embargo  $s(8.5)$  en realidad debería tener un valor de 10, figura (2.4)

La razón de esto, se debe a que la evaluación de  $s$  en  $x = 8.5$  involucra todas las

funciones de potencia truncada que la forman, ya que  $x > 6$  y para este caso la diferencia de las pendientes  $(m_4 - m_3)$  y  $(m_5 - m_4)$  son bastante grandes en comparación a las demás diferencias de pendientes, alterado así el resultado final.

En la siguiente sección volveremos a este ejemplo una vez que hayamos construido la base de funciones B-Spline y veremos que este error se elimina.

## 2.2 La Base de Funciones B-spline.

La base de funciones B-spline (una simplificación de Base spline) es una de las representaciones más adecuadas para el espacio de funciones spline, ya que sus funciones están construidas de tal forma que evitan la pérdida de precisión además de que existe una fórmula recursiva simple para calcularlas.

### 2.2.1 Construcción de la Función B-spline.

El principal problema de la representación de las funciones de potencia truncada es que estas funciones son distintas de cero en una "gran" parte de su dominio, ya que  $(x - t)_+^k > 0 \forall x > t$  y así al evaluar una función representada por éstas en un cierto valor  $x^*$  todas funciones de potencia truncada tales que  $x^* > t$  están involucradas (no son cero).

Entonces dada una sucesión de nodos estrictamente creciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  y dos enteros positivos  $p$  y  $q$  tales que  $0 < p < q < L$  para lograr que la función:

$$\phi(x) = \sum_{i=p}^q d_i (x - \varepsilon_i)_+^{k-1} \quad (2.11)$$

con  $d_i \in \mathfrak{R}$ , sea una "buena" función base debe cumplir que:

$$\phi(x) \equiv 0 \quad \text{si} \quad x \in [\varepsilon_0, \varepsilon_p] \cup [\varepsilon_q, \varepsilon_L] \quad (2.12)$$

$$\phi(x) \neq 0 \quad \text{si} \quad x \in (\varepsilon_p, \varepsilon_q)$$

pero de la definición de función de potencia truncada sabemos que:

$$\phi(x) \equiv 0 \quad \text{si} \quad x \in (-\infty, \varepsilon_p]$$

Así lo unico que falta para lograr es que:

$$\phi(x) \equiv 0 \quad \text{si} \quad x \in [\varepsilon_p, \varepsilon_L]$$

esto se puede tener tomando valores  $d_i$  tales que:

$$\sum_{i=p}^q d_i (x - \varepsilon_i)_+^{k-1} = \sum_{i=p}^q d_i (x - \varepsilon_i)^{k-1} = 0 \quad \text{si} \quad x \in [\varepsilon_p, \varepsilon_L] \quad (2.13)$$

lo cual implica que:

$$\sum_{i=p}^q d_i \varepsilon_i^l = 0 \quad \text{para} \quad l = 0, 1, \dots, k-1$$

Esta última suma representa un sistema de ecuaciones el cual tiene solución distinta de cero si  $q \geq p + k$  ya que así el número de coeficientes  $d_i$  es mayor o igual al número de ecuaciones.

Si tomamos  $q = p + k$ , la identidad deducida de la fórmula de interpolación de Lagrange [[7], pag. 35]:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{x_i^l}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k-1} (x_i - x_j)} = \delta_{k-1l}$$

para  $l = 0, \dots, k-1$ .

Muestra que los coeficientes  $d_i$  se pueden escoger como:

$$d_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k} (\varepsilon_j - \varepsilon_i)}$$

ya que así:

$$\sum_{i=p}^{p+k} \frac{\varepsilon_i^l}{\prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k} (\varepsilon_j - \varepsilon_i)} = 0$$

pues siempre  $l \neq p + k$ .

De donde la función spline  $\phi(x)$  que cumple (2.12) esta dada por:

$$\phi(x) = B_p^k(x) = \sum_{j=p}^{p+k} \left[ \prod_{\substack{i=p \\ i \neq j}}^{p+k} \frac{1}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} \right] (x - \varepsilon_j)_+^{k-1}, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.14)$$

esta función es llamada función *B-spline*.

La notación  $B_p^k(x)$  es útil ya que indica que el B-spline es de orden  $k$  y distinto de cero si  $x \in (\varepsilon_p, \varepsilon_{p+k})$  y por definición de la función de potencia truncada, el exponente  $k$  también nos indica que:

$$B_p^k(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \in (\varepsilon_p, \varepsilon_{p+k}) \quad (2.15)$$

El siguiente teorema da una condición útil sobre el número de ceros para las funciones spline y en particular para el B-spline.

**Teorema 2.1.** Sea una sucesión de nodos estrictamente creciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  y un entero positivo  $k$ , si  $s \in S_{k,\varepsilon}$  es un spline idénticamente cero en los intervalos  $[\varepsilon_0, \varepsilon_p]$  y  $[\varepsilon_q, \varepsilon_L]$  y tiene  $r$  ceros en  $(\varepsilon_p, \varepsilon_q)$  para  $p$  y  $q$  enteros positivos con  $0 < p < q < L$  entonces:

$$r \leq q - (p + k)$$

**Demostración:**

Supongamos que  $s$  es un spline lineal, es decir  $s \in S_{1,\varepsilon}$  así por hipótesis  $s(\varepsilon_p) = s(\varepsilon_q) = 0$  de donde  $s$  *no* puede tener ceros en los intervalos  $[\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}]$  y  $[\varepsilon_{q-1}, \varepsilon_q]$  y tiene a lo más uno en cada intervalo  $[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}]$  para  $i = p+2, \dots, q-1$ . Así en este caso  $s$  tiene a lo más  $q - p - 2$  ceros en  $(\varepsilon_p, \varepsilon_q)$ .

Ahora supongamos que  $k > 2$  y de nuevo por hipótesis sabemos que  $s$  tiene  $r$  ceros en  $(\varepsilon_p, \varepsilon_q)$  y entonces  $s'(x)$  tiene al menos  $(r + 1)$  ceros en  $(\varepsilon_p, \varepsilon_q)$  y así  $s''(x)$  tiene al menos  $(r + 2)$  ceros en  $(\varepsilon_p, \varepsilon_q)$ , etc. Así deducimos que  $s^{(k-2)}$  tiene a lo más  $r + k - 2$  ceros. Y ya que el número máximo de cambios de signo para un spline lineal es de a lo más  $(q - p - 2)$  entonces:

$$(r + k - 2) \leq (q - p - 2) \Leftrightarrow r \leq q - (p + k). \quad \blacksquare$$

Este teorema nos indica que  $q$  *no* puede ser menor que  $(p + k)$  ya que en caso contrario  $r < 0$ . Lo que muestra además que si  $s$  es el B-spline (2.14)  $r$  es igual a cero (pues  $q = p + k$ ) y así la  $j$ -ésima derivada de (2.14):

$$\left\{ (B_p^k(x))^{(j)} \quad \text{si} \quad x \in [\varepsilon_p, \varepsilon_{p+k+1}] \right\}$$

para  $j = 0, 1, \dots, k - 2$  tiene exactamente  $j$  ceros.

### 2.2.2 Construcción de la Base de Funciones B-spline.

Una vez que se ha obtenido la función la función B-spline  $B_p^k$  la cual tiene un soporte pequeño (cumple (2.12)) estudiaremos la construcción de la base de  $S_{k,\varepsilon}$  compuesta estas funciones.

Dada una sucesión de nodos estrictamente creciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$ , una primer propuesta para una base formada por los B-spline es el conjunto formado por estas funciones definidas en el intervalo  $[\varepsilon_0, \varepsilon_L]$  es decir:

$$\{B_p^k(x) \quad \text{si} \quad x \in [\varepsilon_p, \varepsilon_{p+k}]\}$$

para  $p = 0, 1, \dots, L - k$ .

Sin embargo la dimensión del espacio generado por este conjunto es de  $L - k + 1$  la cual es distinta a la dimensión de  $S_{k,\varepsilon}$  (igual a  $L + k - 1$  proposición 1.3) así necesitamos  $2k - 2$  funciones adicionales las cuales se pueden obtener agregando nodos extra afuera del intervalo  $[\varepsilon_0, \varepsilon_L]$ ; si por ejemplo tomamos un conjunto de reales tales que:

$$\varepsilon_{-k+1} < \varepsilon_{-k+2} < \dots < \varepsilon_{-1} < \varepsilon_0 \tag{2.16}$$

$$\varepsilon_L < \varepsilon_{L+1} < \varepsilon_{L+2} < \dots < \varepsilon_{L+k-1}$$

las funciones :

$$\{B_p^k(x) \quad \text{si} \quad x \in [\varepsilon_0, \varepsilon_L]\}$$

para  $p = -k + 1, \dots, L - 1$ , generan un espacio con dimensión  $L + k - 1$ .

El siguiente teorema muestra que éste conjunto forma una base de  $S_{k,\varepsilon}$ .

**Teorema 2.2.** Sea un entero positivo  $k$  y un conjunto de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{-k+1}^{L+k-1}$  que cumple con (2.16) entonces el conjunto de funciones B-spline:

$$\{B_p^k(x) \quad \text{si} \quad x \in [\varepsilon_0, \varepsilon_L]\} \tag{2.17}$$

para  $p = -k + 1, -k + 2, \dots, L - 1$  forma una base del espacio  $S_{k,\varepsilon}$ .

**Demostración:**

Ya que las funciones (2.17) son elementos de  $S_{k,\varepsilon}$  y su espacio generado es de dimensión  $L + k - 1 = \dim(S_{k,\varepsilon})$  lo único que debemos probar es que este conjunto es linealmente independiente, es decir:

$$s(x) = \sum_{p=-k+1}^{L-1} \alpha_p B_p^k(x) = 0 \Rightarrow \alpha_p = 0 \quad (2.18)$$

para  $p = -k + 1, \dots, L - 1$ .

Esto lo haremos por contradicción probando que si cualquier número  $\alpha_p$ ;  $p = -k + 1, \dots, L - 1$  es distinto de cero entonces  $s(x) \neq 0$ . Así supongamos que  $\alpha_q$  es el menor entero distinto de cero entonces de (2.15)

$$s(x) = \sum_{p=-k+1}^{L-1} \alpha_p B_p^k(x) = \alpha_q B_q^k(x) \neq 0 \quad \text{si } x \in (\varepsilon_q, \varepsilon_{q+1}).$$

■

### 2.2.3 Relación de Recurrencia de los B-splines.

En términos prácticos de la evaluación de la función B-spline (2.14) en algún punto es "bastante" complicada, ya que implica muchas operaciones, así a continuación se deducirá la fórmula recursiva de los B-splines la cual nos permitirá evaluar en forma mucho más simple esta función.

**Teorema 2.3.** Sean un entero positivo  $k > 2$  y una sucesión de nodos en estrictamente creciente  $\varepsilon = (\varepsilon)_p^{p+k}$ . Entonces la función (2.14) satisface la ecuación:

$$B_p^k(x) = \frac{(x - \varepsilon_p)B_p^{k-1}(x) + (\varepsilon_{p+k} - x)B_{p+1}^{k-1}(x)}{\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p} \quad (2.19)$$

para todo  $x$  real.

**Demostración:**

El lado derecho (2.19) es igual a:

$$\frac{1}{\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p} \left[ (x - \varepsilon_p) \sum_{i=p}^{p+k-1} \left( \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k-1} \frac{(x - \varepsilon_i)_+^{k-2}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} \right) + (\varepsilon_{p+k} - x) \sum_{i=p+1}^{p+k} \left( \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k} \frac{(x - \varepsilon_i)_+^{k-2}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} \right) \right] \quad (2.20)$$

Ahora si  $x \in [\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}]$  ésta ecuación es :

$$\frac{1}{\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p} \left[ (x - \varepsilon_p) \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k-1} \frac{(x - \varepsilon_p)^{k-2}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_p)} \right] = \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k} \frac{(x - \varepsilon_p)^{k-1}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_p)} = B_p^k(x)$$

así (2.19) es cierto para este caso.

Ahora supongamos que  $x \in [\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+k}]$  y para  $i = p + 1, \dots, p + k - 1$  entonces

(2.20):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p} \left[ (x - \varepsilon_p) \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k-1} \frac{(x - \varepsilon_i)^{k-2}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} + (\varepsilon_{p+k} - x) \prod_{\substack{j=p+1 \\ j \neq i}}^{p+k} \frac{(x - \varepsilon_i)^{k-2}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} \right] &= \quad (2.21) \\ \frac{(x - \varepsilon_i)^{k-2}}{\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p} [(x - \varepsilon_p)(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_i) + (\varepsilon_{p+k} - x)(\varepsilon_p - \varepsilon_i)] \prod_{\substack{i=p \\ i \neq j}}^{p+k} \frac{1}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} &= \\ \frac{(x - \varepsilon_j)^{k-2}}{\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p} [(x - \varepsilon_i)(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p)] \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k} \frac{1}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} &= \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k} \frac{1}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} (x - \varepsilon_i)^{k-1} \end{aligned}$$

y por lo tanto (2.21):

$$\sum_{i=p+1}^{p+k} \prod_{\substack{j=p \\ j \neq i}}^{p+k} \frac{(x - \varepsilon_i)^{k-1}}{(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} = B_p^k(x)$$

■



Así tomemos la sucesión de nodos es  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^9 = (0, 1, 2, 3, 4.4, 4.6, 6, 7, 8, 9)$  y de la demostración del teorema 2.2 sabemos que para construir una base de B-splines sobre  $\varepsilon$  debemos agregar  $2k - 2 = 2$  nodos más, así sean  $\varepsilon_{-1} = -1$  y  $\varepsilon_{10} = 10$  de donde el conjunto

$$\{B_i^2(x) \text{ para } x \in [\varepsilon_0, \varepsilon_9] \text{ y } i = -1, 0, \dots, 8\}$$

forma una base para el espacio  $S_{2,\varepsilon}$  y cualquier  $s \in S_{3,\varepsilon}$  se puede escribir como

$$s = \sum_{i=-1}^8 \alpha_i B_i^2(x).$$

Entonces de (2.23) tenemos:

$$B_{-1}^2(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1-x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad B_0^2(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2-x}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

$$B_1^2(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3-x}{2} & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad B_2^2(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2.4} & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{4.4-x}{(2.4)(1.4)} & 3 \leq x \leq 4.4 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

$$B_3^2(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{(1.4)(1.6)} & 3 \leq x < 4.4 \\ \frac{4.6-x}{(1.6)(0.2)} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad B_4^2(x) = \begin{cases} \frac{x-4.4}{(0.2)(1.6)} & 4.4 \leq x < 4.6 \\ \frac{6-x}{(1.6)(1.4)} & 4.6 \leq x < 6 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

$$B_5^2(x) = \begin{cases} \frac{x-4.6}{(1.4)(2.4)} & 4.6 \leq x \leq 6 \\ \frac{7-x}{2.4} & 6 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad B_6^2(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{2} & 6 \leq x \leq 7 \\ \frac{8-x}{2} & 8 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

$$B_7^2(x) = \begin{cases} \frac{x-7}{2} & 7 \leq x < 8 \\ \frac{9-x}{2} & 8 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad B_8^2(x) = \begin{cases} \frac{x-8}{2} & 8 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

para  $i = -1, \dots, 8$ . Las cuales se muestran en la figura (2.5)

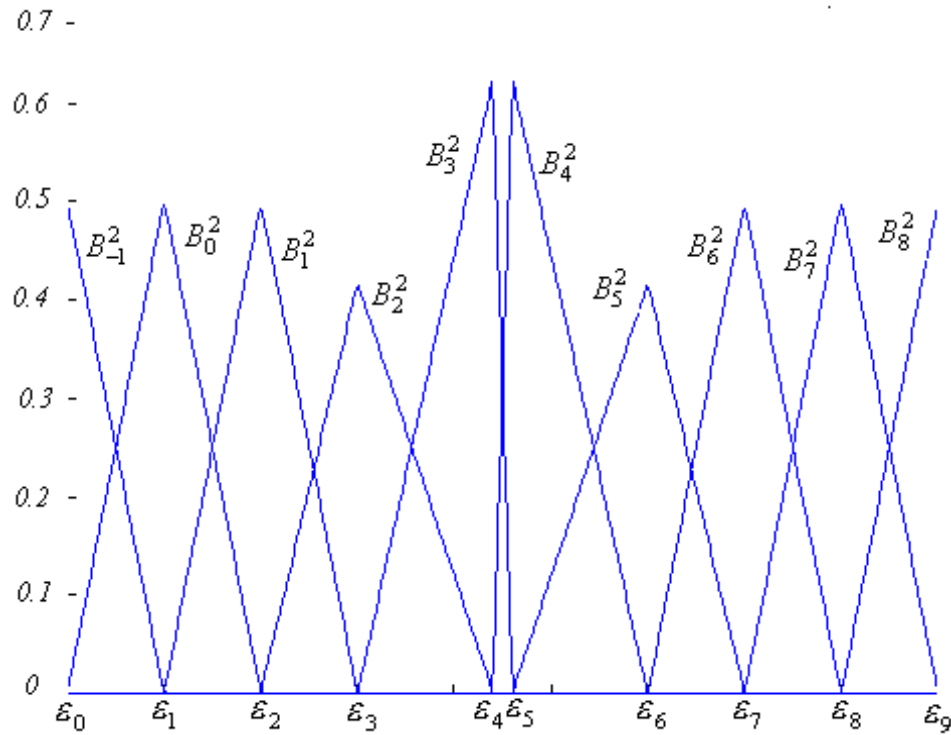


Figura 2.5: Sucesión de B-splines  $B_{-1}^2, B_0^2, B_1^2, B_2^2, B_3^2, B_4^2, B_5^2, B_6^2, B_7^2, B_8^2$  definidos sobre la sucesión de nodos  $\epsilon_i = (0, 1, 2, 3, 4.4, 4.6, 6, 7, 8, 9)$

Así para lograr que  $s$  sea la "recta rota" de la figura (figura (??)) escribimos:

$$s(x) = 20 \cdot \sum_{\substack{i=-1 \\ i \neq 2,3,4,5}}^8 B_i^2(x) + 24 \cdot \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq 4}}^5 B_i^2(x) + 8 \cdot B_4^2(x)$$

para  $\epsilon_0 \leq x \leq \epsilon_9$  figura (2.6).

Ahora si  $x = 8.5$

$$s(8.5) = 20 \cdot B_7^2(x) + 20 \cdot B_8^2(8.5) = 20\left(\frac{0.5}{2}\right) + 20\left(\frac{0.5}{2}\right) = 10$$

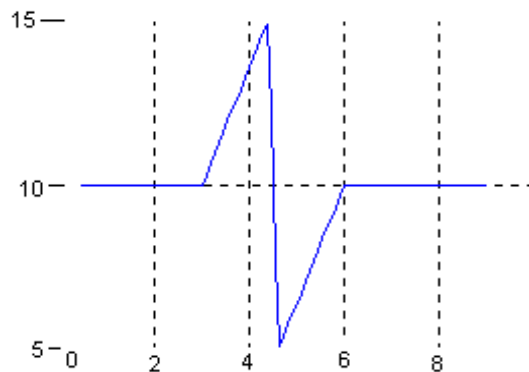


Figura 2.6: Spline lineal como una "recta rota", representado por medio de la base de funciones B-splines.

Así la propiedad de soporte local de los B-spline hace que al evaluar  $x = 8.5$  en  $s$  sólo los B-splines  $B_7^2$  y  $B_8^2$  estén involucrados eliminando así el error de precisión que se representó en la potencia truncada

## 2.2.4 Los B-splines y las Diferencias Divididas.

Otra forma de abordar las funciones B-spline es por medio de la diferencia dividida de la función de potencia truncada  $(x-t)_+^{k-1}$ , este enfoque como veremos tiene ciertas ventajas en comparación a la construcción del B-spline de la sección (2.2) sin embargo no es tan intuitiva.

**Definición 2.3:** Dado un entero positivo  $k$  y una sucesión de reales *no decrecientes*  $\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{i+k}$ , la  $k$ -ésima diferencia dividida de una función  $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  en  $\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{i+k}$  denotada por  $[\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{i+k}]g$  es el coeficiente de  $x^k$  del polinomio grado  $k$  que coincide con  $g$  en  $\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{i+k}$ .

De esta definición se puede probar que la  $k$ -ésima diferencia dividida de la función  $g$  en  $\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{i+k}$  esta dada por:



para todo  $x \in \mathfrak{R}$ .

La notación "placeholder"  $(\cdot - x)_+^{k-1}$  se usa para indicar que en la  $k$ -ésima diferencia dividida en la función bivariada  $(\varepsilon - x)_+^{k-1}$ , se fija  $x$  y se considera solamente función de  $\varepsilon$ . Por ejemplo  $[\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i]g(\cdot, x)$  denota la diferencia dividida en  $\varepsilon_{i-1}$  y  $\varepsilon_i$  de la función bivariada  $g$  con respecto a  $\varepsilon_{i-1}$  y  $\varepsilon_i$ :

$$\frac{g(\varepsilon_{i-1}, x) - g(\varepsilon_i, x)}{\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i}$$

Notemos también que la sucesión de nodos  $\varepsilon$  en la definición 2.4 es creciente (y no estrictamente creciente) así entoces el B-spline normalizado se puede definir sobre una sucesión de nodos en la cual haya nodos repetidos, esto se debe a que la diferencia dividida (2.24) está definida para este caso. Más adelante estudiaremos las implicaciones que tiene la repetición (o multiplicidad) de nodos sobre el B-spline.

### Ejemplo 2.2 :

*i)* Supongamos que  $\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_{i+2}$ . Entonces de (2.27) y (2.24) el B-spline  $N_i^2$  es igual a (figura 2.7):

$$\begin{aligned} N_i^2(x) &= (\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}](\cdot - x)_+ \\ &= \frac{(\varepsilon_{i+2} - x)_+ - (\varepsilon_{i+1} - x)_+}{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1}} - \frac{(\varepsilon_{i+1} - x)_+ - (\varepsilon_i - x)_+}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} \\ &= \frac{(\varepsilon_{i+2} - x)_+}{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1}} - \left( \frac{1}{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1}} + \frac{1}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} \right) (\varepsilon_{i+1} - x)_+ + \frac{(\varepsilon_i - x)_+}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} \end{aligned}$$

*ii)* Ahora supongamos que  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_{i+2}$  de nuevo por (2.27)  $N_i^2$  es igual a :

$$\begin{aligned} N_i^2(x) &= (\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)[\varepsilon_i, \varepsilon_i, \varepsilon_{i+2}](\cdot - x)_+ \\ &= (\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i) \left[ \frac{[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+2}](\cdot - x)_+ - [\varepsilon_i, \varepsilon_i](\cdot - x)_+}{(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)} \right] \\ &= [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+2}](\cdot - x)_+ - [\varepsilon_i, \varepsilon_i](\cdot - x)_+ \end{aligned}$$

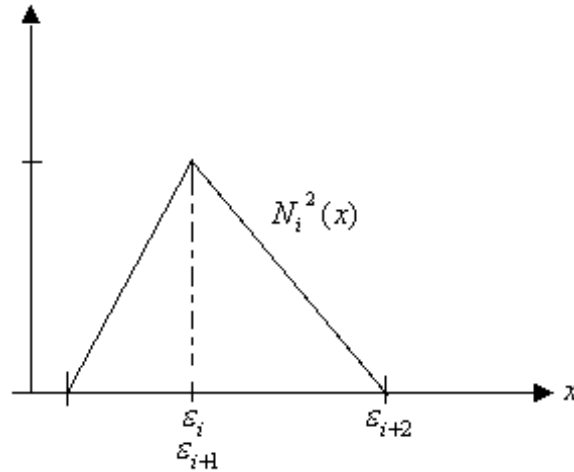


Figura 2.7: B-spline de orden 2 (grado 1) sobre los nodos  $\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_{i+2}$ .

para el segundo operando de esta última expresión usamos la definición de la diferencia dividida (2.24) para el caso de nodos repetidos y así tenemos:

$$N_i^2(x) = \frac{(\varepsilon_{i+2} - x)_+ - (\varepsilon_i - x)_+}{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i} - (\varepsilon_i - x)_+^0.$$

Aquí si por ejemplo si  $x = \varepsilon_i$

$$N_i^2(\varepsilon_i) = \frac{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i} - 0 = 1$$

o si  $x = \varepsilon_{i+2}$  entonces:

$$N_i^2(\varepsilon_{i+2}) = \frac{0 - 0}{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i} - 0 = 0$$

figura (2.8).

A continuación deduciremos una fórmula de recurrencia similar a (2.19) para el B-spline normalizado.

**Teorema 2.4.** El B-spline normalizado (2.27) satisface la relación:

$$N_i^k(x) = \frac{x - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_i} N_i^{k-1}(x) + \frac{\varepsilon_{i+k} - x}{\varepsilon_{i+k} - \varepsilon_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(x) \quad \text{si } x \in [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+k}] \quad (2.28)$$

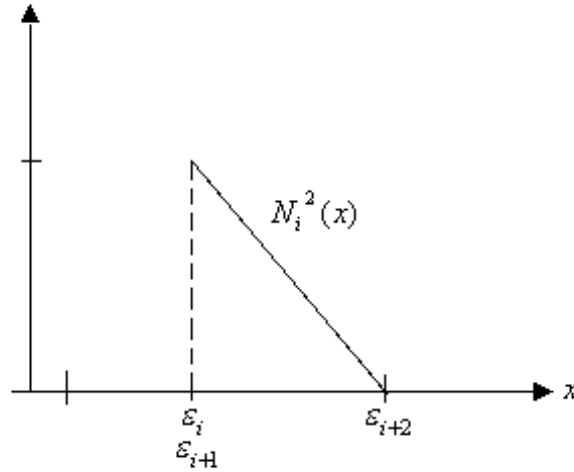


Figura 2.8: B-spline de orden 2 definido sobre la sucesión de nodos  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} < \varepsilon_{i+2}$ .

con

$$N_i^1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \quad (2.29)$$

**Demostración:**

(2.29) se sigue de (2.27) ya que

$$\begin{aligned} N_i^1(x) &= (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}] (\cdot - x)_+^0 = (\varepsilon_{i+1} - x)_+^0 - (\varepsilon_i - x)_+^0 \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases} \end{aligned}$$

Para probar (2.28) utilizamos el hecho de que  $(x - \alpha)_+^{k-1} = (x - \alpha)(x - \alpha)_+^{k-2} \forall \alpha \in \mathfrak{R}$

lo cual implica que  $[\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{i+k}](\cdot - x)_+^{k-1} = [\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{i+k}](\cdot - x)_+ \cdot (\cdot - x)_+^{k-2}$  y la

fórmula de Leibnitz (2.26) de donde escribimos:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{i+k}](\cdot - x)_+^{k-1} &= \sum_{r=i}^{i+k} ([\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_r](\cdot - x))([\varepsilon_r, \dots, \varepsilon_{i+k}](\cdot - x)_+^{k-2}) \\ &= (\varepsilon_i - x)[\varepsilon_i, \dots, \varepsilon_{i+k}](\cdot - x)_+^{k-2} + (1)[\varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_{i+k}](\cdot - x)_+^{k-2} \end{aligned}$$



**Proposición 2.5.** Dada una sucesión de nodos no decreciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  y entero mayor que cero  $k$  el B-spline normalizado (2.27) cumple:

$$i) \quad N_i^k(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \in [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+k}]$$

$$ii) \quad N_i^k(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+k}]$$

para  $i = 0, \dots, L - k$ .

Si tomamos la sucesión de nodos no decreciente  $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j=i-k+1}^{i+k}$  entonces:

$$iii) \quad \sum_{j=i-k+1}^i N_j^k(x) = 1 \quad \text{para} \quad x \in (\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})$$

para  $i = 0, \dots, L - 1$ .

**Demostración:**

Los incisos  $i)$  y  $ii)$  se siguen inmediatamente de (2.28) y (2.29) (estas propiedades también son ciertas para el B-spline (2.14)).

El inciso  $iii)$  se sigue de:

$$\sum_{j=i-k+1}^i N_i^k(x) = \sum_{j=i-k+1}^i \frac{x - \varepsilon_j}{\varepsilon_{j+k-1} - \varepsilon_j} N_j^{k-1}(x) + \sum_{j=i-k+1}^i \frac{\varepsilon_{j+k} - x}{\varepsilon_{j+k} - \varepsilon_{j+1}} N_{j+1}^{k-1}(x)$$

y como  $N_{i-k+1}^{k-1}(x) = N_{i+1}^{k-1}(x) = 0$  (ya que  $x \in (\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})$ ) esta última igualdad se

puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i-k+2}^i \frac{x - \varepsilon_j}{\varepsilon_{j+k-1} - \varepsilon_j} N_j^{k-1}(x) + \sum_{j=i-k+1}^{i-1} \frac{\varepsilon_{j+k} - x}{\varepsilon_{j+k} - \varepsilon_{j+1}} N_{j+1}^{k-1}(x) \\ = & \sum_{j=i-k+2}^i \frac{x - \varepsilon_j}{\varepsilon_{j+k-1} - \varepsilon_j} N_j^{k-1}(x) + \sum_{j=i-k+2}^i \frac{\varepsilon_{j+k-1} - x}{\varepsilon_{j+k-1} - \varepsilon_j} N_j^{k-1}(x) = \sum_{j=i-k+2}^i N_j^{k-1}(x) \end{aligned}$$

y repitiendo el argumento tenemos que:

$$\sum_{j=i+k+1}^i N_j^k(x) = \sum_{j=i+k+2}^i N_j^{k-1}(x) = \dots = \sum_{j=i}^i N_j^1(x) = 1.$$

■

El inciso *iii*) es la propiedad que le da al B-spline la característica de ser normalizado a uno.

Ahora demostraremos la equivalencia del B-spline normalizado y el no normalizado.

**Proposición 2.6.** Dada una sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_j)_i^{i+k}$  estrictamente crecientes y entero mayor que cero  $k \geq 2$ , el B-spline normalizado (2.27) y el B-spline (2.14) cumplen:

$$B_i^k(x) = \frac{1}{\varepsilon_{i+k} - \varepsilon_i} N_i^k(x)$$

**Demostración** (por inducción sobre  $k$ ):

Probemos para  $k = 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i} N_i^2(x) &= \frac{1}{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i} \left[ \frac{x - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} N_i^1(x) + \frac{\varepsilon_{i+2} - x}{\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_{i+1}} N_{i+1}^1(x) \right] \\ &= \begin{cases} \frac{x - \varepsilon_i}{(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)} & \text{si } x \in [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) \\ \frac{\varepsilon_{i+2} - x}{(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)} & \text{si } x \in [\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}] \\ 0 & \text{si c.o.c} \end{cases} \end{aligned}$$

Supongamos que es cierto para  $k - 1$  es decir que:

$$B_i^{k-1}(x) = \frac{1}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_i} N_i^{k-1}(x)$$

por demostrar para  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_{i+k} - \varepsilon_i} N_i^k(x) &= \frac{1}{\varepsilon_{i+k} - \varepsilon_i} \left[ \frac{x - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+k} - \varepsilon_i} N_i^{k-1}(x) + \frac{\varepsilon_{i+k} - x}{\varepsilon_{i+k} - \varepsilon_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(x) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon_{i+k} - \varepsilon_i} \left[ (x - \varepsilon_i) \frac{N_i^{k-1}(x)}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_i} + (\varepsilon_{i+k} - x) \frac{N_{i+1}^{k-1}(x)}{\varepsilon_{i+k} - \varepsilon_{i+1}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{i+k} - \varepsilon_i} [(x - \varepsilon_i)B_i^{k-1}(x) + (\varepsilon_{i+k} - x)B_{i+1}^{k-1}]$$

■

### Repetición de nodos.

A continuación estudiaremos las implicaciones que tiene la repetición de nodos en una sucesión  $\varepsilon$  sobre los B-spline normalizados definidos en esta sucesión.

#### Ejemplo 2.3.

Dada la sucesión de nodos  $\varepsilon = (0, 1, 2)$  calculemos el B-spline normalizado de orden dos definido por  $\varepsilon$ .

Entonces de (2.28) y (2.29) este B-spline está dado por (figura 2.9 a) ):

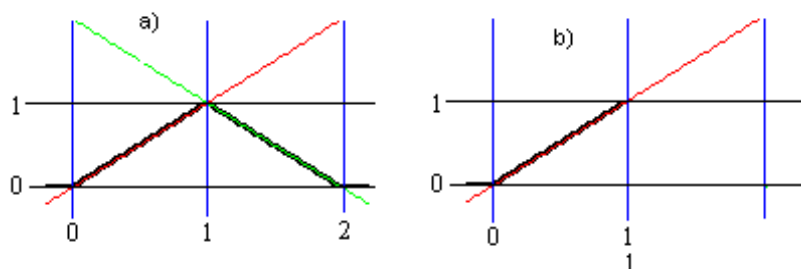


Figura 2.9: B-splines de orden dos definidos respectivamente en las sucesiones  $\varepsilon = (0, 1, 2)$  y  $\varepsilon = (0, 1, 1)$ .

$$N_0^2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1) \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases} \quad (2.31)$$

esta función es una función polinomial por pedazos (capítulo 1) formada por dos secciones de polinomios de grado uno, continua en el nodo 1.

Ahora supongamos que repetimos (o reinsertamos) el nodo 1 en  $\varepsilon$  (así 1 está repetido dos veces en  $\varepsilon$  número igual al orden del B-spline). Entonces el B-spline definido por esta nueva sucesión según (2.28) y (2.29) está dado por (figura 2.9 b) ):

$$N_0^2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

esta función está formada por un solo segmento de recta discontinuo en 1. Es decir la repetición del nodo 1 en  $\varepsilon$  implica que la segunda sección lineal del B-spline (2.31) sea igual a cero, ya que el intervalo  $[1, 2)$  "es remplazado por el valor 1".

Veremos que en el caso del B-spline de orden 3 la inserción de nodos es completamente equivalente. Calculemos  $N_0^3(x)$  definido por  $\varepsilon = (0, 1, 2, 3)$  y de nuevo por (2.28) y (2.29) tenemos que (figura 2.32 a)):

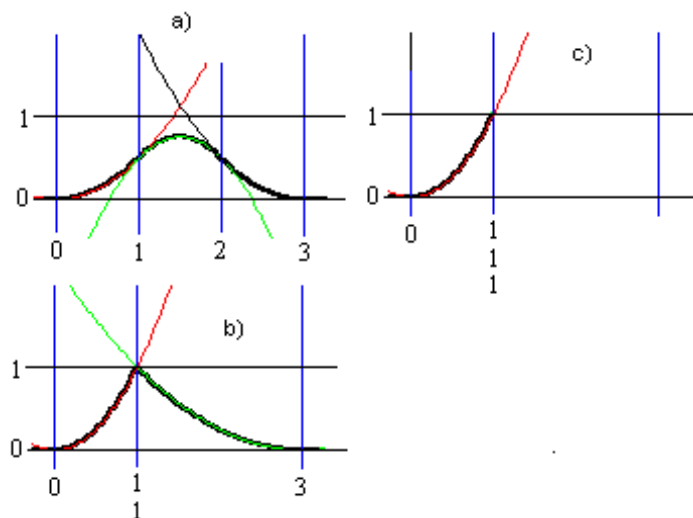


Figura 2.10: B-splines de orden 3 definidos respectivamente por la sucesión de nodos  $\varepsilon = (0, 1, 2, 3)$ ,  $\varepsilon = (0, 1, 1, 3)$  y  $\varepsilon = (0, 1, 1, 1)$ .

$$N_0^3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0, 1) \\ \frac{x(2-x)}{2} + \frac{(3-x)(x-1)}{2} & \text{si } x \in [1, 2) \\ \frac{(3-x)^2}{2} & \text{si } x \in [2, 3) \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases} \quad (2.32)$$

para este caso la función está formada por tres segmentos cuadráticos y es de  $C^1$  en 1 y 2.

Entonces al reinsertar 1 en  $\varepsilon$  tenemos que (figura b)):

$$N_0^3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1) \\ \frac{(3-x)^2}{4} & \text{si } x \in [1, 3) \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

la cual es una función formada por dos segmentos cuadráticos (ya que la segunda sección polinomial de (2.32) es igual a cero) continua en 1 pero su derivada no.

Por último reinsertemos una vez más nodo 1 teniendo así tres nodos iguales (número igual al orden) y entonces (figura c)):

$$N_0^3(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

Esta función está formada por una sección cuadrática discontinua en 1.

Así en general dada una sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  el B-spline  $N_i^k(x)$  es de  $C^{k-1-r}$  en  $\varepsilon_j$   $j \in \{1, \dots, L-1\}$  (nodo interior) en donde  $r$  representa la cantidad (multiplicidad) de veces que se repite  $\varepsilon_j$  en  $\varepsilon$ . En particula si todos los nodos interiores son distintos entonces  $N_i^k(x)$  es de  $C^{k-1}$  para  $x \in [\varepsilon_0, \varepsilon_L]$

# Capítulo 3

## Curvas de Bézier.

En este capítulo estudiaremos la familia de curvas llamadas de Bézier. Hablaremos de su construcción en por medio del algoritmo de Casteljau y de sus propiedades en términos de éste. También discutiremos su representación por medio de los polinomios de Berstein con la que podremos probar algunas de estas propiedades, calcularemos sus derivadas, describiremos el proceso de subdivisión y las funciones de Bézier.

### 3.1 Definiciones y Conceptos Básicos.

Denotaremos a  $E^3$  el espacio euclidiano de tres dimensiones y  $a, b, c, ..$  sus elementos llamados *puntos*. Esta notación también se usará para *vectores*, elementos en el espacio lineal tri-dimensional  $\mathfrak{R}^3$ . Así aunque los puntos y vectores se denoten igual hay una clara distinción, para cuales quiera dos puntos  $a$  y  $b$  existe un único vector  $v$  de  $a$  a  $b$  dado por la resta componente a componente:

$$v = b - a; \quad a, b \in E^3, \quad v \in \mathfrak{R}^3.$$

pero para cualquier vector  $v$  hay una infinidad de pares de puntos  $a, b$  tales que  $v = b - a$ . Ya que si  $w$  es cualquier vector entonces  $a + w, b + w$  cumplen que

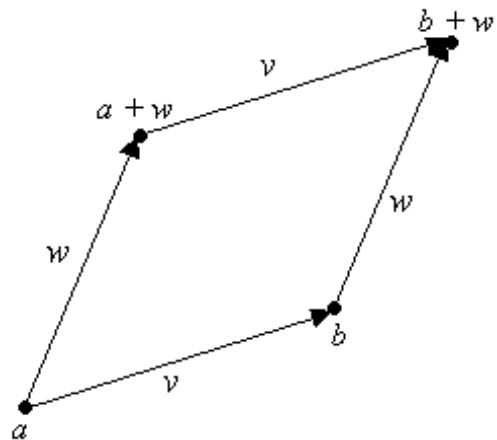


Figura 3.1: Puntos  $a, b, a + w$  y  $b + w$  y vectores  $v$  y  $w$ .

$(b + w) - (a + w) = b - a = v$  (figura 3.1). El punto  $a + w$  para cualquier  $a \in E^3$  es llamado una *traslación* de  $a$ .

Es importante notar que los elementos del espacio  $E^3$  solamente puede ser restados y no sumados ya que esta operación no está bien definida pues la suma en diferentes sistemas coordenados pueden producir diferentes resultados.

**Definición 3.1:** Sean  $a_i \in E^3$  y  $\alpha_i \in \mathfrak{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ . Una *combinación baricéntrica*  $b$  de los puntos  $a_i$  es la suma:

$$b = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \quad \text{con} \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1 \quad (3.1)$$

Esta suma puede interpretarse como una suma de puntos de  $E^3$  sin embargo al reescribirla como:

$$b = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i = a_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i - a_0 \sum_{i=1}^k \alpha_i = a_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i (a_i - a_0)$$

se observa que es la suma de un punto y un vector.

**Definición 3.2 :** Un mapeo  $\Phi : E^3 \rightarrow E^3$ , es llamado un *mapeo afín* si deja

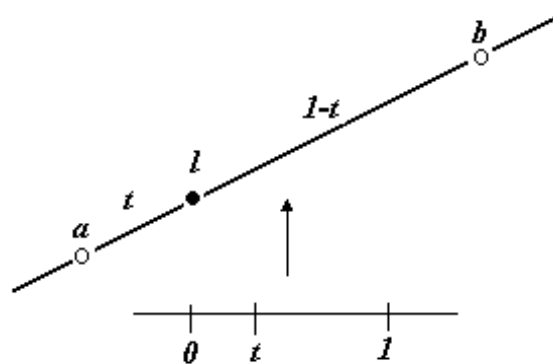


Figura 3.2: Interpolación lineal: dos puntos  $a$  y  $b$  definen una línea recta a través de ellos. El punto  $l$  divide el segmento de línea recta entre  $a$  y  $b$  en una razón de  $t : 1 - t$ .

combinaciones baricéntricas invariantes. Es decir si:

$$b = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \quad \text{para} \quad a_i \in E^3 \quad \forall i \Rightarrow \Phi b = \sum_{i=0}^k \alpha_i \Phi a_i$$

**Definición 3.3:** Sean  $a, b$  dos puntos distintos de  $E^3$  y  $t \in \mathfrak{R}$ . Entonces el conjunto de puntos  $l$  de  $E^3$  de la forma:

$$l = l(t) = (1 - t)a + tb \tag{3.2}$$

es llamado *línea recta* a través de  $a$  a  $b$  o interpolación lineal de  $a$  y  $b$ , ya que  $l(0) = a$  y  $l(1) = b$ . Si  $0 \leq t \leq 1$ ,  $l$  es llamado *segmento de línea recta entre  $a$  y  $b$*  y tres (o más) puntos en  $l$  son llamados colineales (figura 3.2).

De la definición 3.1 es claro que  $l$  con  $t \in \mathfrak{R}$  es una combinación baricéntrica con puntos  $a$  y  $b$  y coeficientes  $(1 - t)$  y  $t$ . Ahora observemos que la combinación baricéntrica de  $E^1$  (la recta real):

$$t = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 1 \tag{3.3}$$

con puntos 0 y 1 también tiene como coeficientes  $(1 - t)$  y  $t$  y así de la definición de mapeo afín se deduce que  $l$  es un mapeo afín de la recta real a una línea en  $E^3$ .

Por otro lado si  $\Phi : E^3 \rightarrow E^3$  es un mapeo afín entonces:

$$\Phi(l) = \Phi((1 - t)a + tb) = (1 - t)\Phi a + t\Phi b$$

es decir los coeficientes de  $l$  son invariante bajo mapeos afines, esta propiedad es llamada *invarianza afín* de  $l$ .

El segmento de línea recta entre  $a$  y  $b$  se puede definir sobre cualquier intervalo  $[\alpha, \beta]$  con  $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$  ya que este intervalo puede ser obtenido de  $[0, 1]$  y viceversa con el cambio de variable:

$$t = (x - \alpha) / (\beta - \alpha) \quad (3.4)$$

para  $t \in [0, 1]$  y  $x \in [\alpha, \beta]$

El parámetro  $t$  es llamado *parámetro local de  $x$* , y  $x$  es llamado *parámetro global*.

Así el segmento de recta entre  $a$  y  $b$  sobre  $[\alpha, \beta]$  esta dado por:

$$l(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} a + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} b \quad (3.5)$$

Ahora observemos que si (3.4) se piensa como un mapeo de  $[\alpha, \beta]$  a  $[0, 1]$  (o viceversa) y escribimos:

$$\Phi(x) = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \quad (3.6)$$

entonces dado  $t_1 \in [\alpha, \beta]$  tenemos que:

$$\Phi(\alpha(1 - t_1) + t_1\beta) = t_1 = (1 - t_1)\Phi(\alpha) + t_1\Phi(\beta)$$

lo que muestra que (3.6) es un mapeo afín con proporción igual que (3.2), de donde podemos concluir que *el segmento de línea recta entre  $a$  y  $b$  es invariante bajo*

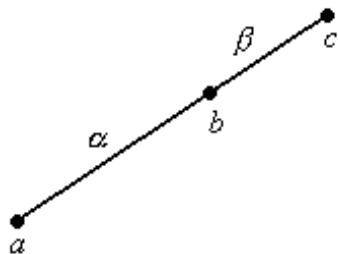


Figura 3.3: Coordenadas baricéntricas  $\alpha$  y  $\beta$  de  $b$  con respecto a  $a$  y  $c$ .

*transformaciones afines de una línea recta a sí misma* (llamada transformación de dominio afín).

**Definición 3.4.** Sean  $a, b, c$  puntos colineales en  $E^3$  y  $\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$  tales que:

$$b = \lambda a + \mu c; \quad \lambda + \mu = 1 \quad (3.7)$$

entonces  $\lambda$  y  $\mu$  son llamados *coordenadas baricéntricas* de  $b$  con respecto a  $a$  y  $c$  y los cuales están dados por:

$$\lambda = \frac{vol_1(a, b)}{vol_1(a, c)}$$

y

$$\mu = \frac{vol_1(b, c)}{vol_1(a, c)}$$

en donde  $vol_1$  denota el volúmen uno-dimensional, que en este caso es la distancia dirigida entre dos puntos (figura 3.3).

**Definición 3.5:** La razón o proporción de tres puntos colineales  $a, b, c \in E^3$  se define como:

$$ratio(a, b, c) = \frac{vol_1(a, b)}{vol_1(b, c)} \quad (3.8)$$

Así si  $\lambda$  y  $\mu$  son coordenadas baricéntricas de  $b$  con respecto a  $a$  y  $c$  se sigue que:

$$\text{ratio}(a, b, c) = \frac{\lambda}{\mu} \quad (3.9)$$

Ahora observemos que si  $\Phi : E^3 \rightarrow E^3$  es un mapeo afín se tiene que:

$$\Phi(b) = \Phi(\lambda a + \mu b) = \lambda \Phi a + \mu \Phi b$$

entonces

$$\text{ratio}(\Phi a, \Phi b, \Phi c) = \frac{\lambda}{\mu} \quad (3.10)$$

lo cual nos indica que los *mapeos afines preservan proporciones*.

De donde *cualquier mapeo que mande líneas rectas en líneas rectas y preserve proporción es un mapeo afín*.

## 3.2 El Algoritmo de Casteljau.

El algoritmo de Casteljau es un proceso recursivo con el que se puede generar puntos sobre la curva de Bézier. Además se puede representar fácilmente en forma gráfica y así visualizar la curva, iniciaremos el estudio de este algoritmo con un ejemplo.

**Ejemplo 3.1.** Sean  $b_0, b_1, b_2, b_3 \in E^3$  y  $t \in [0, 1]$ , si  $t = \frac{1}{2}$  el algoritmo de Casteljau para este caso consiste de los tres pasos siguientes:

**Paso 1:** Calcular los puntos:

$$b_i^1(t) = (1 - t) \cdot b_i + t \cdot b_{i+1} = \frac{b_i + b_{i+1}}{2}$$

(el punto medio entre  $b_i$  y  $b_{i+1}$ ) para  $i = 0, 1, 2$ .

**Paso 2:** Calcular los puntos

$$b_i^2(t) = (1 - t) \cdot b_i^1(t) + t \cdot b_{i+1}^1(t) = \frac{b_i^1(t) + b_{i+1}^1(t)}{2}$$

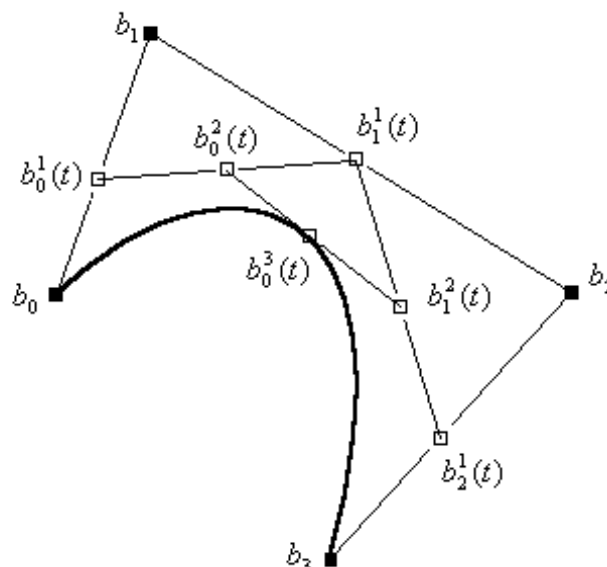


Figura 3.4: Algoritmo de Casteljau en los puntos  $b_0, b_1, b_2$  y  $b_3 \in E^3$ .

(el punto medio entre  $b_i^1(t)$  y  $b_{i+1}^1(t)$ ) para  $i = 0, 1$ .

**Paso 3:** Calcular el punto

$$b_0^3(t) = (1 - t) \cdot b_0^2(t) + t \cdot b_1^2(t) = \frac{b_0^2(t) + b_1^2(t)}{2}$$

(el punto medio entre  $b_0^2(t)$  y  $b_1^2(t)$ ).

Los tres pasos se muestran en la figura (3.4).

Se dice entonces que el punto  $b_0^3(t)$  con parámetro  $t = \frac{1}{2}$  es un punto sobre la curva de Bézier de grado tres  $b^3$  formada por  $b_0, b_1, b_2, b_3$ .

**Definición 3.6.** Dado un conjunto de puntos  $b_0, b_1, \dots, b_k \in E^3$  y  $t \in [0, 1]$  el algoritmo de Casteljau se define por la siguiente fórmula recursiva :

$$b_i^r(t) = (1 - t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t) \quad (3.11)$$

para  $r = 1, \dots, k$ ,  $i = 0, \dots, k - r$  y  $b_i^0(t) = b_i$ . Se dice entonces que el punto  $b_0^k(t)$  con parámetro  $t$  generado en el  $k$ -ésimo nivel algoritmo es un punto de la curva de

Bézier  $b^k$  de grado  $k$  formada por  $b_0, b_1, \dots, b_k$ .

Así una curva de Bézier de grado  $k$  está formada por el conjunto de puntos  $b_0^k(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Por ejemplo en la figura (3.4) se puede observar la curva de Bézier formada por los puntos  $b_0, b_1, b_2$  y  $b_3$  al variar  $t \in [0, 1]$

El polígono formado por  $b_0, \dots, b_k$  es llamado *polígono de Bézier* o *polígono de control* de la curva  $b^k$  y los puntos  $b_i$  son llamados *puntos de control* o *puntos de Bézier*.

Ya que el algoritmo de Casteljau está definido por medio de una relación de recurrencia, los puntos  $b_i^r(t)$  se pueden calcular por medio de una tabla triangular, por ejemplo en el caso cúbico tenemos que:

$$\begin{array}{cccc}
 b_0 & & & \\
 b_1 & b_0^1(t) & & \\
 b_2 & b_1^1(t) & b_0^2(t) & \\
 b_3 & b_2^1(t) & b_1^2(t) & b_0^3(t)
 \end{array} \tag{3.12}$$

### 3.2.1 Propiedades de la curvas de Bézier.

El algoritmo de Casteljau nos permite inferir varias propiedades importantes de las curvas de Bézier. Todas estas provienen de hechos geométricos de la interpolación lineal.

#### **Invarianza afín.**

La invarianza afín es una de las propiedades más importantes en cualquier sistema de diseño ya que en éstos, los objetos deben ser reposicionados, escalados, etc.

Las curvas de Bézier tienen esta propiedad ya que el algoritmo de Casteljau está compuesto de una secuencia de interpolaciones lineales (mapeos afines) los cuales son afinamente invariantes. Así los siguientes procedimientos tienen el mismo resultado:

(1) Calcular el punto  $b^k(t)$  y aplicar el mapeo afín.

(2) Aplicar el mapeo afín y después  $b^k(t)$  se calcula con en el polígono de Bézier mapeado.

### **Invarianza bajo transformación de parámetros afines.**

Una curva de Bézier puede ser definida sobre cualquier intervalo  $[\alpha, \beta]$  con  $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$  ya que las interpolaciones lineales son invariantes bajo transformaciones de parámetros afines, así de (3.5) el algoritmo de Casteljau definido sobre  $[\alpha, \beta]$  se escribe como:

$$b_i^r(x) = \frac{\alpha - x}{\beta - \alpha} b_i^{r-1}(x) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} b_{i+1}^{r-1}(x) \quad (3.13)$$

para  $\forall x \in [\alpha, \beta]$  y  $r = 1, \dots, k$ ,  $i = 0, \dots, k - r$  con  $b_i^0(t) = b_i$ .

Se dice entonces que las curvas de Bézier son invariantes bajo transformaciones de parámetros afines.

### **Envoltura convexa.**

La propiedad de envoltura convexa de una curva de Bézier significa que ésta siempre está contenida en la envoltura convexa de su polígono de control. Esto es cierto ya que cualquier  $b_i^r(t)$  intermedio se obtienen como combinación lineal baricéntrica de  $b_i^{r-1}(t)$  y  $b_{i+1}^{r-1}(t)$  y así no existe un paso en el algoritmo de Casteljau que produzca puntos afuera de la envoltura convexa de los  $b_i$ .

### **Interpolación en los puntos frontera.**





Así (3.14) en términos de la función blossom se puede escribir como:

$$\begin{aligned} b_0 &= b[0, 0, 0] \\ b_1 &= b[0, 0, 1] \quad b[0, 0, t] \\ b_2 &= b[0, 1, 1] \quad b[0, t, 1] \quad b[0, t, t] \\ b_3 &= b[1, 1, 1] \quad b[t, 1, 1] \quad b[t, t, 1] \quad b[t, t, t] \end{aligned}$$

**Definición 3.9.** Dado un conjunto de puntos  $b_0, \dots, b_k \in E^3$  para un entero positivo  $k$  la función resultante al evaluar el valor  $t_r$  en el  $r$ -ésimo nivel del algoritmo de Casteljau (para  $r = 1, \dots, k$ ) es la función  $b_0^k[t_1, \dots, t_k]$  denotada por  $b[t_1, \dots, t_k]$  llamada *función blossom* la cual por construcción cumple:

$$b_i = b[0^{<k-i>}, 1^{<i>}] \quad (3.16)$$

$$b_i^r(t) = b[0^{<k-r-i>}, t^{<r>}, 1^{<i>}]$$

En donde  $0^{<i>} = \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{i\text{-veces}}$ ,  $t^{<i>} = \overbrace{t, t, \dots, t}^{i\text{-veces}}$  y  $1^{<i>} = \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{i\text{-veces}}$ .

Así el algoritmo de Casteljau en términos de la función blossom se puede escribir como:

$$\begin{aligned} &b[0^{<k-r-i>}, t^{<r>}, 1^{<i>}] \\ &= (1-t) \cdot b[0^{<k-r-i+1>}, t^{<r-1>}, 1^{<i>}] + t \cdot b[0^{<k-r-i>}, t^{<r-1>}, 1^{<i+1>}] \end{aligned}$$

para  $r = 1, \dots, k$  y  $i = 0, \dots, k-r$ .

Y de la propiedad de invarianza bajo transformaciones de parámetros afines y (3.16) los puntos de Bézier de una curva definida sobre el intervalo  $[\alpha, \beta]$  está dados por:

$$b_i = b[\alpha^{<k-i>}, \beta^{<i>}] \quad (3.17)$$

y el algoritmo de Cateljau en este caso es:

$$\begin{aligned}
 & b[\alpha^{\langle k-r-i \rangle}, x^{\langle r \rangle}, \beta^{\langle i \rangle}] \\
 = & \frac{\alpha - x}{\beta - \alpha} \cdot b[\alpha^{\langle k-r-i+1 \rangle}, x^{\langle r-1 \rangle}, \beta^{\langle i \rangle}] + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \cdot b[\alpha^{\langle k-r-i \rangle}, x^{\langle r-1 \rangle}, \beta^{\langle i+1 \rangle}]
 \end{aligned}$$

para  $r = 1, \dots, k$  y  $i = 0, \dots, k - r$  para  $x \in [\alpha, \beta]$ .

### 3.4 La Curva de Bézier en la Forma de Bernstein.

Una forma analítica de abordar la curva de Bézier es por medio del conjunto de funciones llamadas de Berstein, en esta sección lo estudiaremos y la forma de como éste representa la curva de Bézier.

**Definición 3.7.** Dado un entero positivo  $k$  y  $t \in [0, 1]$  el  $i$  -ésimo polinomio de Berstein de grado  $k$  se define como:

$$B_i^k(t) = \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i} \quad (3.18)$$

con

$$\binom{k}{i} = \begin{cases} \frac{k!}{i!(k-i)!} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

para  $i = 0, \dots, k$  y

$$B_i^k(t) \equiv 0 \quad \text{si } i \notin \{0, \dots, k\}. \quad (3.19)$$

Tres propiedades útiles de las funciones de Bernstein se demuestran a continuación.

**Proposición 3.1:** El  $i$  -ésimo polinomio de Berstein cumple:

$$\begin{aligned}
 i) & B_i^k(t) = (1-t)B_i^{k-1}(t) + tB_{i-1}^{k-1}(t) \\
 ii) & \sum_{i=0}^k B_i^k(t) \equiv 1 \\
 iii) & B_0^0(t) \equiv 1
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

**Demostración:***i)*

$$\begin{aligned}
B_i^k(t) &= \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i} = \\
&= \left[ \binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1} \right] t^i (1-t)^{k-i} \\
&= \binom{k-1}{i} t^i (1-t)^{k-i} + \binom{k-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{k-i} \\
&= (1-t) B_i^{k-1}(t) + t B_{i-1}^{k-1}(t)
\end{aligned}$$

*ii)*

$$\sum_{i=0}^k B_i^k(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i} = (t+1-t)^k = 1$$

*iii)*

$$B_0^0(t) = \binom{0}{0} t^0 (1-t)^0 = 1$$

■

El inciso *ii)* nos indica que los polinomios de Bernstein forman una partición de la unidad.

La siguiente proposición muestra que los puntos intermedios del algoritmo de Casteljau  $b_i^r(t)$  se pueden expresar en términos de los polinomios de Bernstein.

**Proposición 3.2:** Sea  $k$  un entero positivo y  $b_0, b_1, \dots, b_k \in E^3$  puntos de control

de una curva de Bézier entonces:

$$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^r(t) \quad (3.21)$$

en donde  $b_i^r(t)$  es el  $i$  - *ésimo* punto del  $r$  - *ésimo* nivel del algoritmo de Casteljau, para  $r = 0, \dots, k$  y  $i = 0, \dots, k - r$ .

**Demostración** (Por inducción sobre  $r$ ).

*i)* Si  $r = 0$ .

$$b_i^0(t) = b_i = \sum_{j=0}^0 b_i B_j^0(t)$$

*ii)* Supogamos que se cumple para  $r - 1$ .

*iii)* Por demostrar para  $r$  es decir:

$$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^r b_{j+i} B_j^r(t)$$

como

$$b_i^r(t) = (1 - t)b_i^{r-1}(t) + t b_{i+1}^{r-1}(t)$$

entonces por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} b_i^r(t) &= (1 - t) \sum_{j=0}^{r-1} b_{i+j} B_j^{r-1}(t) + t \sum_{j=0}^{r-1} b_{i+j+1} B_j^{r-1}(t) \\ &= (1 - t) \sum_{j=i}^{i+r-1} b_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i+1}^{i+r} b_j B_{j-i-1}^{r-1}(t) \end{aligned}$$

y de (3.19)  $B_{-1}^{r-1}(t) = B_r^{r-1}(t) = 0$ , así podemos escribir:

$$b_i^r(t) = (1 - t) \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i-1}^{r-1}(t)$$

y por (3.20 inciso  $i$ )) tenemos finalmente que:

$$b_i^r(t) = \sum_{j=i}^{i+r} b_j [(1-t)B_{j-i}^{r-1}(t) + tB_{j-i-1}^{r-1}(t)] = \sum_{j=i}^{i+r} b_j B_{j-i}^r(t) = \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^r(t).$$

para  $i = 0, \dots, r-k$

■

**Corolario1.** Dado un entero positivo  $k$  y un conjunto de puntos de control  $b_0, \dots, b_k \in E^3$  de una curva de Bézier  $b^k$  entonces :

$$b^k(t) = b_0^k(t) = \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t). \quad (3.22)$$

**Corolario2.** Dado un entero positivo  $k$  y un conjunto de puntos de control  $b_0, \dots, b_k \in E^3$  de una curva de Bézier si realizamos  $k-r$  niveles del algoritmo de Casteljau y obtenemos los puntos  $b_i^{k-r}$  para  $i = 0, \dots, r$ , entonces:

$$b^k(t) = \sum_{i=0}^r b_i^{k-r}(t) B_i^r(t). \quad (3.23)$$

Una relación entre la curva de Bézier y la función blossom (3.16) se deduce de este último corolario en el siguiente caso particular: es equivalente calcular  $k-r$  niveles del algoritmo de Casteljau con respecto a 0 y tomar los puntos resultantes  $b_i^{k-r}(0)$  como puntos de control de una curva de Bézier de grado  $r$  evaluada en 1, que calcular la función blossom  $b[0^{<k-r>}, 1^{<r>}]$  que es igual a  $b_k$ , ésto en formulas se escribe como:

$$\sum_{i=0}^r b_i^{k-r}(0) B_i^r(1) = b[0^{<k-r>}, 1^{<r>}] = b_k.$$

### 3.4.1 Propiedades de las curvas de Bézier.

Las propiedades que aparecen aquí (salvo la última) se derivaron en la subsección 3.2.1 con argumentos geométricos de la interpolación lineal, ahora aprovecharemos la

representación de Bernstein para volver a deducirlas usando argumentos algebraicos.

### Invarianza afín.

Si  $\Phi : E^3 \rightarrow E^3$  es un mapeo afín. Entonces de la definición de combinación baricéntrica y el inciso *ii*) de la proposición 3.1, la curva de Bézier  $b^k(t) = \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t)$  es una combinación baricéntrica y entonces :

$$\Phi\left(\sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t)\right) = \sum_{i=0}^k \Phi(b_i) B_i^k(t)$$

### Invarianza bajo transformaciones de parámetros afines.

Si  $t \in [0, 1]$  es el parámetro local de  $x \in [\alpha, \beta]$ , entonces esta propiedad se escribe:

$$\sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t) = \sum_{i=0}^k b_i B_i^k\left(\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\right)$$

### Interpolación en los puntos frontera.

Sea un entero positivo  $k$ ,  $t \in [0, 1]$  y un conjunto de puntos de control  $b_0, \dots, b_k \in E^3$  entonces la curva de Bézier  $b^k(t) = \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t)$  cumple:

$$\begin{aligned} b^k(0) &= \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(0) = b_0 \\ b^k(1) &= \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(1) = b_k \end{aligned} \tag{3.24}$$

### Demostración:

Observemos que

$$B_i^k(0) = \binom{k}{i} 0^i (1-0)^{k-i} = \delta_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } c.o.c \end{cases}$$

y

$$B_i^k(1) = \binom{k}{i} 1^i (1-1)^{k-i} = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } c.o.c \end{cases}$$

de donde se tiene (3.24).

■

### Envoltura convexa.

Esta propiedad se tiene ya que para  $t \in [0, 1]$  los polinomios de Bernstein son positivos y su suma es igual a uno como se muestra en *ii)* de la proposición 3.1.

### Simetría de las curvas de Bézier.

Es claro que no tiene importancia el hecho de que los puntos de control de una curva de Bézier sean  $b_0, b_1, \dots, b_k$  o  $b_k, b_{k-1}, \dots, b_0$ , las curvas formadas por éstos puntos son iguales solamente difieren en el orden en que fueron construidas. Esto en formulas es:

$$\sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t) = \sum_{i=0}^k b_{k-i} B_i^k(1-t)$$

lo que se sigue de:

$$B_i^k(t) = \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i} = \binom{k}{k-i} (1-t)^{k-i} t^i = B_{k-i}^k(1-t)$$

### 3.5 Derivada de la Curva de Bézier.

A continuación calcularemos la derivada de la curva de Bézier lo cual será de gran utilidad en los siguientes capítulos.

**Lema 3.1:** La derivada del  $i$ -ésimo polinomio de Bernstein (3.18) esta dada por:

$$\frac{d}{dt}B_i^k(t) = k [B_{i-1}^{k-1}(t) - B_i^{k-1}(t)]$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B_i^k(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i} \right] \\ &= \binom{k}{i} [i t^{i-1} (1-t)^{k-i} - t^i (k-i) (1-t)^{k-i-1}] \\ &= \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} t^{i-1} (1-t)^{k-i} - \frac{k!}{i!(k-i-1)!} t^i (1-t)^{k-i-1} \\ &= k \binom{k-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{k-i} - k \binom{k-1}{i} t^i (1-t)^{k-i-1} \\ &= k [B_{i-1}^{k-1}(t) - B_i^{k-1}(t)] \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.5.** Sean un entero positivo  $k$  y un conjunto de puntos  $b_0, \dots, b_k$ , la derivada de la curva de Bézier  $b^k(t) = \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t)$  es:

$$\frac{d}{dt}b^k(t) = k \sum_{i=0}^{k-1} \Delta b_i B_i^{k-1}(t) \quad (3.25)$$

donde  $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$ .

**Demostración:**

Del lema 3.1 tenemos que

$$\frac{d}{dt}b^k(t) = \sum_{i=0}^k b_i \frac{d}{dt}B_i^k(t) = k \sum_{i=0}^k [B_{i-1}^{k-1}(t) - B_i^{k-1}(t)] b_i$$

y de (3.19) podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 k \sum_{i=0}^k [B_{i-1}^{k-1}(t) - B_i^{k-1}(t)] b_i &= k \sum_{i=1}^k b_i B_{i-1}^{k-1}(t) - k \sum_{i=0}^{k-1} b_i B_i^{k-1}(t) = \\
 k \sum_{i=1}^k b_i B_{i-1}^{k-1}(t) - k \sum_{i=0}^{k-1} b_i B_i^{k-1}(t) &= k \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} B_i^{k-1}(t) - k \sum_{i=0}^{k-1} b_i B_i^{k-1}(t) = \\
 k \sum_{i=0}^{k-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{k-1}(t) &= k \sum_{i=0}^{k-1} \Delta b_i B_i^{k-1}(t)
 \end{aligned}$$

■

Así la derivada de una curva de Bézier es de nuevo una curva de Bézier solo que en vez de estar sobre  $E^3$  está definida en  $\mathfrak{R}^3$  ya que  $\Delta b_i \in \mathfrak{R}^3$  es un vector.

Una forma de visualizar la derivada de la curva, es construir un polígono en  $E^3$  con puntos  $a + \Delta b_0, a + \Delta b_1, \dots, a + \Delta b_{k-1}$  en donde  $a$  es un punto arbitrario de  $E^3$  que por lo general se escoge como  $a = 0$  (figura 3.5).

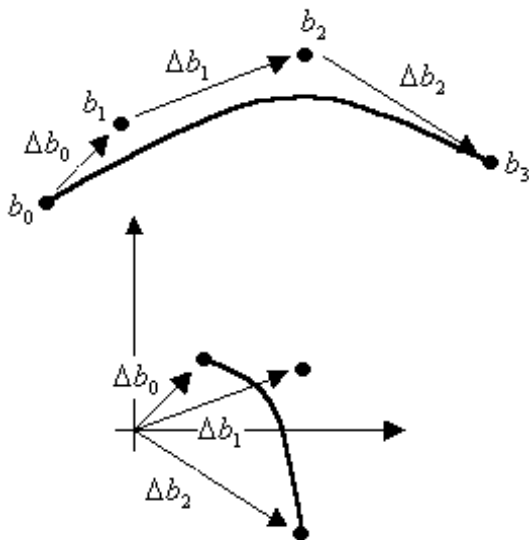


Figura 3.5: Curva de Bézier y su respectiva derivada.

### 3.5.1 Derivadas de Orden Mayor.

Para las derivadas de orden mayor necesitaremos definir el operador  $\Delta^r b_i$ .

**Definición 3.8.** Sea un entero positivo  $k$  y un conjunto de punos  $b_0, \dots, b_k \in E^3$  entonces  $\Delta^r b_i$  se define como:

$$\Delta^r b_i = \Delta^{r-1} b_{i+1} - \Delta^{r-1} b_i$$

con  $\Delta^0 b_i = b_i$  para  $i = 0, \dots, k-1$ .

Así por ejemplo:

$$\Delta^1 b_i = b_{i+1} - b_i$$

$$\Delta^2 b_i = b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i$$

$$\Delta^3 b_i = b_{i+3} - 3b_{i+2} + 3b_{i+1} - b_i.$$

Observemos que los coeficientes de los  $b_i$  del lado derecho de la igualdad coinciden con los del triangulo de Pascal, así podemos escribir:

$$\Delta^r b_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} b_{i+j}.$$

o

$$\Delta^r b_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j b_{i+r-j}. \quad (3.26)$$

también de la **definición 3.8** tenemos que:

$$\Delta^r b_i = \Delta^{r-1} b_{i+1} - \Delta^{r-1} b_i = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-1)^j \Delta^{r-1} b_{i+1-j}$$

$$\Delta^r b_i = \Delta^{r-2} b_{i+2} - 2\Delta^{r-2} b_{i+1} + \Delta^{r-2} b_i = \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-1)^j \Delta^{r-2} b_{i+2-j}$$

$$\Delta^r b_i = \Delta^{r-3} b_{i+3} - 3\Delta^{r-3} b_{i+2} + 3\Delta^{r-3} b_{i+1} - \Delta^{r-3} b_i = \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (-1)^j \Delta^{r-3} b_{i+3-j}$$

de donde podemos se puede probar por inducción que:

$$\Delta^r b_i = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \Delta^1 b_{i+r-1-j} \quad (3.27)$$

**Proposición 3.6.** Sea  $k$  un entero positivo y un conjunto de puntos de control  $b_0, \dots, b_k \in E^3$  entonces la  $r$ -ésima derivada de las curvas de Bézier está dada por:

$$\frac{d^r}{dt^r} b^k(t) = \frac{k!}{(k-r)!} \sum_{i=0}^{k-r} \Delta^r b_i B_i^{k-r}(t) \quad (3.28)$$

**Demostración** (Por inducción sobre  $r$ ):

i) Si  $r = 1$  de (3.25):

$$\frac{d^1}{dt^1} b^k(t) = \frac{d}{dt} b^k(t) = k \sum_{i=0}^{k-1} \Delta b_i B_i^{k-1}(t) = \frac{k!}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{k-1} \Delta^1 b_i B_i^{k-1}(t)$$

ii) Supongamos que es cierto para  $r - 1$ , es decir

$$\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} b^k(t) = \frac{k!}{(k-r+1)!} \sum_{i=0}^{k-r+1} \Delta^{r-1} B_i^{k-r+1}(t) \quad (3.29)$$

iii) Por demostrar que se tiene para  $r$ .

Al derivar (3.29) tenemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{k!}{(k-r+1)!} (k-r+1) \sum_{i=0}^{k-r+1} \Delta^{r-1} b_i [B_{i-1}^{k-r}(t) - B_i^{k-r}(t)] \\ &= \frac{k!}{(k-r)!} \left[ \sum_{i=1}^{k-r+1} \Delta^{r-1} b_i B_{i-1}^{k-r}(t) - \sum_{i=0}^{k-r} \Delta^{r-1} b_i B_i^{k-r}(t) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k!}{(k-r)!} \left[ \sum_{i=0}^{k-r} \Delta^{r-1} b_{i+1} B_i^{k-r}(t) - \sum_{i=0}^{k-r} \Delta^{r-1} b_i B_i^{k-r}(t) \right] \\
&= \frac{k!}{(k-r)!} \left[ \sum_{i=0}^{k-r} (\Delta^{r-1} b_{i+1} - \Delta^{r-1} b_i) B_i^{k-r}(t) \right] \\
&\quad \frac{k!}{(k-r)!} \sum_{i=0}^{k-r} \Delta^r b_i B_i^{k-r}(t)
\end{aligned}$$

■

### 3.6 Subdivisión.

Dado un entero positivo  $k$ , sea una curva de Bézier con puntos de control  $a_0, \dots, a_k$  en  $E^3$

$$a^k(t) = \sum_{i=0}^k a_i B_i^k(t)$$

con  $t \in [0, 1]$ .

Entonces para un real  $\alpha \in (0, 1)$  podemos definir una nueva subcurva de Bézier de grado  $k$  con dominio  $[0, \alpha]$  calculando sus puntos de control por medio de la función blossom (3.17), así si denotamos esta subcurva como  $a_0^k(t)$  y a sus puntos de control como  $b_0, \dots, b_k$ , éstos están dados por:

$$b_i = b[0^{<k-i>}, \alpha^{<i>}] \quad (3.30)$$

para  $i = 0, \dots, k$ .

Por ejemplo en la figura (3.6) se muestra  $a_0^k(t)$  para el caso  $k = 3$ .

Aquí se puede observar que los puntos  $b_0, \dots, b_3$  coinciden con los puntos  $a_0^i(\alpha)$  (para  $i = 0, \dots, 3$ ) los cuales se generan en cada nivel del algoritmo de Casteljau sobre los puntos  $a_0, \dots, a_3$  al evaluarlo en  $\alpha$ .

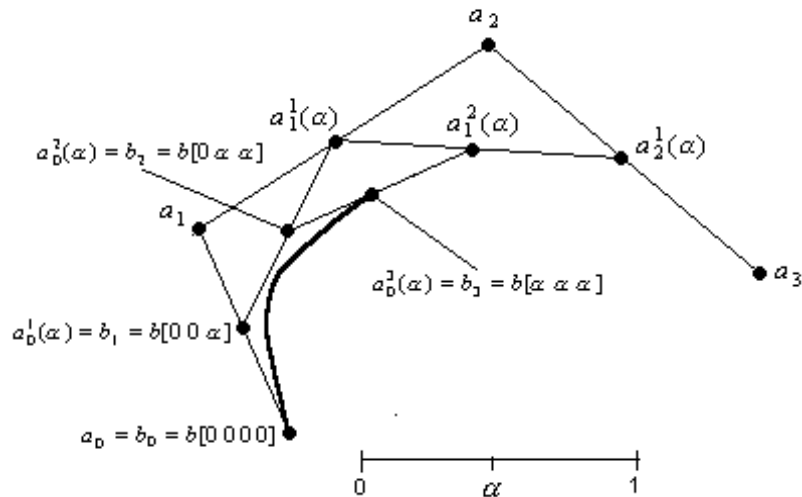


Figura 3.6: Subcurva de Bézier  $a_0^3$  con puntos de control  $b_0, b_1, b_2, b_3$  sobre el intervalo  $[0, \alpha]$ .

Esto en general es cierto ya que la función blossom por definición se obtiene al evaluar en cada nivel del algoritmo de Casteljau un valor distinto. Así este algoritmo no solo calcula el valor  $a^k(\alpha)$  sino que también los puntos de control de la subcurva  $a_0^k(t)$  de donde (3.30) también se puede escribir como:

$$b_i = a_0^i(\alpha) \quad (3.31)$$

Por otro lado la propiedad de simetría de las curvas de Bézier nos indica que las curvas formadas por los puntos de control  $a_0, \dots, a_k$  y  $a_k, \dots, a_0$  sobre  $[0, 1]$  son iguales (solo que están construidas en orden inverso), así podemos aplicar argumento anterior y deducir que los puntos de control que forma a la subcurva (que denotaremos por  $a_1^k(t)$ ) definida en el intervalo  $[\alpha, 1]$  están dados por:

$$b_{k+i} = a_i^{k-i}(\alpha) \quad (3.32)$$

para  $i = 0, \dots, k$ . En la figura (3.7) se observan esta curva para el caso  $k = 3$ .

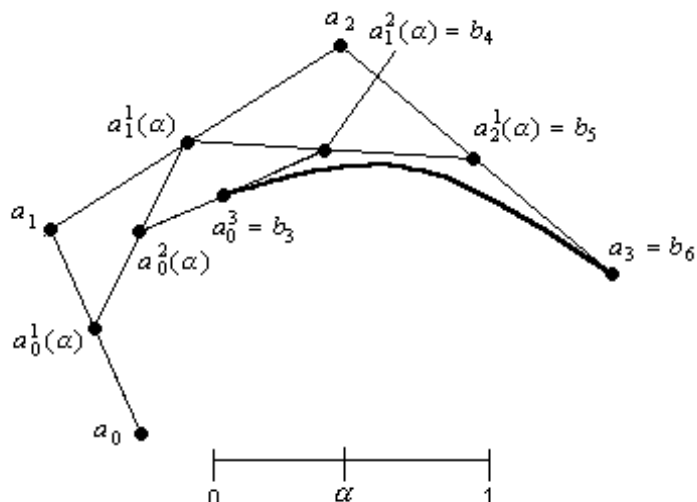


Figura 3.7: Subcurva de Bézier  $a_1^3$  con puntos de control  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $b_5$  y  $b_6$  sobre el intervalo  $[\alpha, 1]$ .

### 3.7 Funciones de Bézier.

Hasta ahora solamente hemos considerado curvas paramétricas de tres dimensiones  $b(t)$ ;  $0 \leq t \leq 1$  sin embargo será útil considerar *curvas funcionales* polinomiales de la forma  $y = f(x) = \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(x)$  en donde  $b_i \in \mathfrak{R}$ . Esta curva (planar) se puede escribir en forma paramétrica haciendo:

$$b(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Así nuestro objetivo es encontrar el polígono de control de  $b(t)$ . Para ésto utilizaremos la identidad:

$$\sum_{i=0}^k \frac{i}{k} B_i^k(t) = t$$

la cual se deduce de la definición de los polinomios de Bernstein y de:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \frac{i}{k} \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i} &= \sum_{i=1}^k \frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} t^i (1-t)^{k-i} \\ &= t \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{k-i} = t((1-t) + t)^{k-1} = t \end{aligned}$$

Entonces (3.33) se puede escribir como:

$$b(t) = \begin{bmatrix} t \\ \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^k \frac{i}{k} B_i^k(t) \\ \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^k \begin{bmatrix} \frac{i}{k} \\ b_i \end{bmatrix} B_i^k(t)$$

De donde el polígono de control de  $f(t) = \sum_{i=0}^k b_i B_i^k(t)$  está dado por los puntos  $(\frac{i}{k}, b_i)$ ;  $i = 0, \dots, k$ .

Para distinguir entre el caso paramétrico y el no paramétrico  $f(t)$  se llama *función de Bézier* y los puntos  $b_i$  (reales) *ordenadas de Bézier*.

Como las curvas de Bézier son invariantes bajo transformaciones afines es fácil considerar la función de Bézier sobre cualquier cualquier intervalo  $[\alpha, \beta]$  tomando los valores de las abscisas:

$$\alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{k}; \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

para  $x \in [\alpha, \beta]$  y así la función de Bézier está dada por:

$$b^k(x) = \sum_{i=0}^k \begin{bmatrix} \alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{k} \\ b_i \end{bmatrix} B_i^k\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right).$$

# Capítulo 4

## Curvas Spline en la Forma de Bézier.

En el capítulo1 comenzamos a hablar de la curva spline cúbica con la construcción del spline paramétrico, en este capítulo continuaremos el estudio de estas curvas de manera más general por medio de su representación en la forma de Bézier. Así discutiremos las condiciones necesarias para lograr ciertos ordenes de diferenciabilidad continua, en especial la continuidad de la primer y segunda derivada ( $C^1$  y  $C^2$ ) y concluiremos con la descripción de las curvas spline cuadráticas y cúbicas.

### 4.1 Curvas Spline.

Una curva spline de grado  $k$  es una curva formada por secciones de curvas polinomiales de a lo más grado  $k$  las cuales en su unión tienen  $k - 1$  derivadas continuas (son de  $C^{k-1}$ ).

Por ejemplo en la figura (4.1) se muestra una curva spline cúbica formada por 5 secciones de curvas polinomiales de a lo más grado 3,  $s_0, s_1, s_2, s_3$  y  $s_4$ , las cuales se unen con continuidad de  $C^2$ .

**Definición 4.1.** Dada una sucesión de nodos *estrictamente creciente*  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$

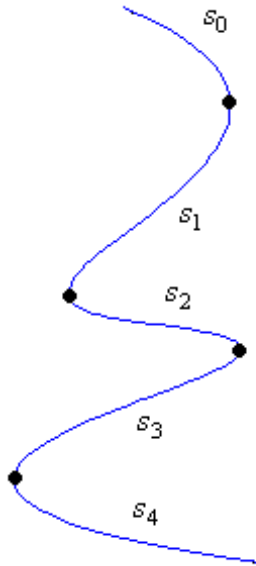


Figura 4.1: Curva spline cúbica formada por 5 secciones de curvas polinomiales que se unen con continuidad de  $C^2$ .

y entero positivo  $k$ , una *curva spline*  $s$  de grado  $k$  es un mapeo de  $[\varepsilon_0, \varepsilon_L]$  a  $E^3$  el cual a cada intervalo  $[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}]$  mapea a un segmento de curva polinomial de grado  $k$  (denotado por  $s_i$  para  $i = 0, 1, \dots, L - 1$ ) los cuales se unen con continuidad  $C^{k-1}$ .

*Los segmentos individuales de una curva spline se puede representar por medio de curvas de Bézier definidas cada una por un conjunto de puntos de control  $b_0, \dots, b_k$  sobre los intervalos  $[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}]$  para  $i = 0, \dots, L - 1$ .*

Por ejemplo para la curva de la figura (4.1) se pueden escoger puntos de control  $b_0, \dots, b_5$  de tal forma que esta curva se pueda representar por medio de 5 curvas de Bézier como se muestra en la figura (4.2).

Una curva formada por secciones de curvas de Bézier es llamada *curva de Bézier por piezas* y la colección de todos los polígonos de cada una de las curvas es llamado *polígono de Bézier por piezas*.

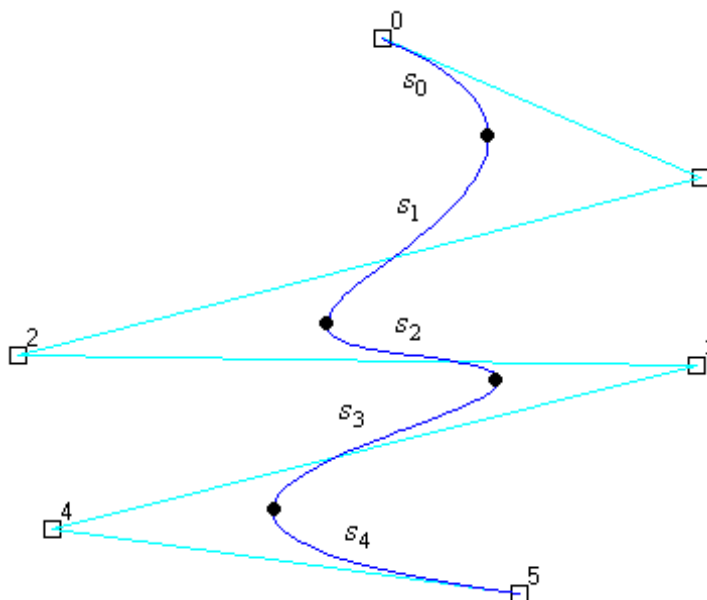


Figura 4.2: Curva spline representada por medio de 5 curvas de Bézier.

Así una curva spline de grado  $k$  representada en la forma de Bézier es una curva Bézier por piezas en la cual cada par de curvas se unen con una continuidad de  $C^{k-1}$ .

## 4.2 Condiciones de Continuidad de las Curvas de Bézier por Pedazos.

Ahora estudiaremos las condiciones necesarias para lograr que la unión de las curvas que forman una curva de Bézier por pedazos tenga ciertos grados de diferenciabilidad continua.

**Ejemplo 4.1.** Supongamos que tenemos una curva de Bézier  $s$  de grado 3 con puntos de control  $a_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$  y  $a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  definida sobre el intervalo  $[\varepsilon_0, \varepsilon_2] = [0, 1]$ .

Así si tomamos  $\varepsilon_1 = \frac{2}{3}$  entonces del proceso de subdivisión descrito en la sección 3.6 podemos formar dos subcurvas de Bézier de grado 3,  $s_0$  y  $s_1$  sobre los intervalos

$[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  y  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  calculando sus puntos de control por medio de (3.31) y (3.32), así tenemos:

$$\begin{array}{l}
 \text{Puntos de control de } s_1 \text{ en } [\varepsilon_0, \varepsilon_1] \\
 b_0 = a_0^0(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{20}{3} \\ \frac{42}{9} \\ \frac{60}{9} \\ \frac{130}{27} \\ \frac{140}{27} \end{bmatrix} \\
 b_1 = a_0^1(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{20}{3} \\ \frac{42}{9} \\ \frac{60}{9} \\ \frac{130}{27} \\ \frac{140}{27} \end{bmatrix} \\
 b_2 = a_0^2(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} \frac{42}{9} \\ \frac{60}{9} \\ \frac{130}{27} \\ \frac{140}{27} \end{bmatrix} \\
 b_3 = a_0^3(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} \frac{130}{27} \\ \frac{140}{27} \end{bmatrix}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Puntos de control } s_2 \text{ en } [\varepsilon_1, \varepsilon_2] \\
 b_3 = a_0^3(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} \frac{130}{27} \\ \frac{140}{27} \\ \frac{44}{9} \\ \frac{40}{9} \\ \frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 b_4 = a_1^2(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} \frac{44}{9} \\ \frac{40}{9} \\ \frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 b_5 = a_1^2(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 b_6 = a_3^0(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Estas curvas y sus respectivos puntos de control se presentan en la figura (4.3), aquí también se puede observar que estos puntos son el resultado del cálculo del punto  $a_0^3(\varepsilon_1) = b_3$  sobre la curva de Bézier  $s$  por medio del algoritmo de Casteljau.

En general para un entero mayor que cero  $k$ , dado un conjunto de puntos de Bézier  $a_0, \dots, a_k$  los cuales determinan una curva de Bézier  $a^k(x) = \sum_{i=0}^k a_i B_i^k(x)$ , para  $x \in [\varepsilon_0, \varepsilon_2]$ , si  $\varepsilon_1 \in [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  los puntos de control de las subcurvas de Bézier  $s_0$  y  $s_1$ , definidas en los intervalos  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  y  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  están dados por

$$\begin{aligned}
 b_i &= a_0^i(\varepsilon_1) \\
 b_{k+i} &= a_i^{k-i}(\varepsilon_1)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

para  $i = 0, \dots, k$ .

En la figura (4.4) se muestra la mismas curvas  $s_0$  y  $s_1$ , sin embargo ahora se

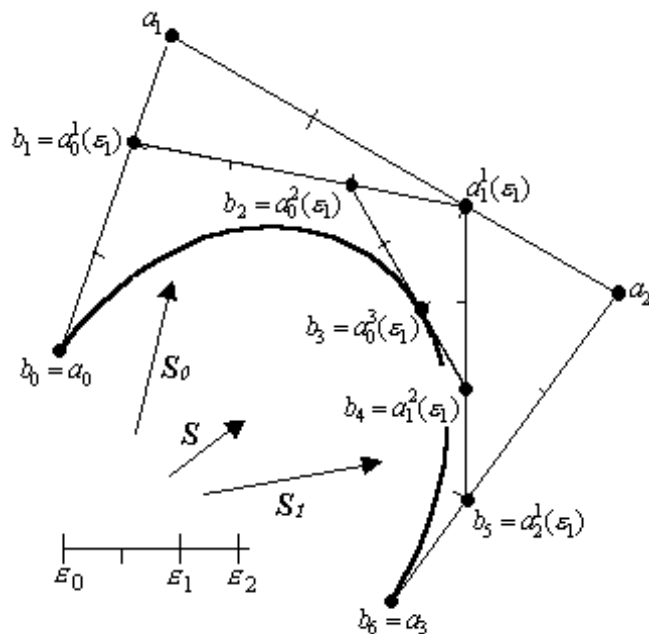


Figura 4.3: Curva de Bézier  $s$  en  $[\varepsilon_0, \varepsilon_2]$  formada por dos subcurvas  $s_0$  y  $s_1$  definidas en  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  y  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ .

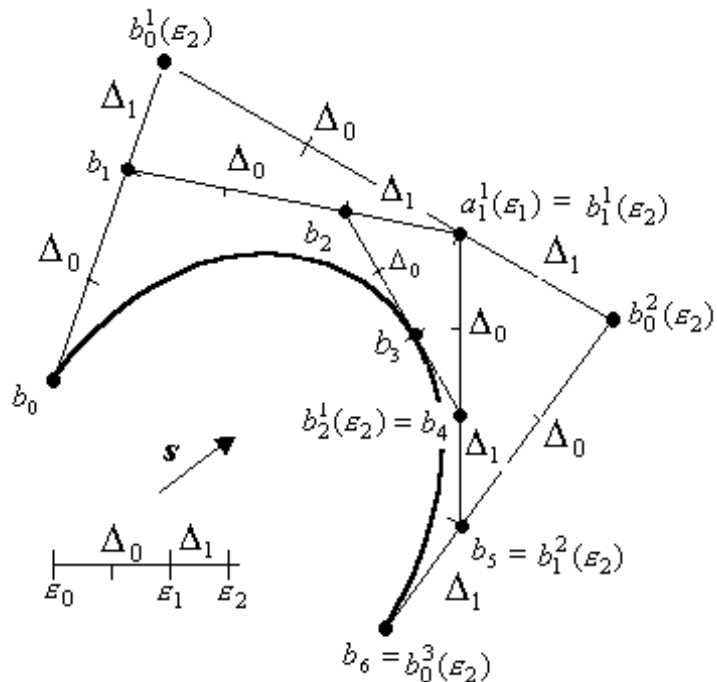


Figura 4.4: Curva de Bézier  $s$  en donde las distancias entre los puntos de control de los polígonos de Bézier se muestran explícitamente, en donde  $\Delta_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$ .

presentan explícitamente las distancias entre los puntos que forman el polígono de control, en donde  $\Delta_i = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$ . Aquí podemos observar que los puntos  $b_2, b_3, b_4$  son colineales y que la distancia de  $b_2$  a  $b_3$  y  $b_3$  a  $b_4$  están en proporción de  $\Delta_0 : \Delta_1$ , así la línea recta que pasa entre  $b_2$  y  $b_3$  según la definición de la interpolación lineal (3.5) está dada por:

$$l(x) = b_2 \left( \frac{\varepsilon_1 - x}{\Delta_0} \right) + b_3 \left( \frac{x - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) \quad \forall x$$

la cual para  $x = \varepsilon_2$  cumple:

$$l(\varepsilon_2) = b_4 = b_2 \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) + b_3 \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) = b_2^1(\varepsilon_2).$$

Lo mismo sucede con los puntos  $b_1, b_2$  y  $a_1^1(\varepsilon_1)$  de donde la línea recta que pasa por  $b_1, b_2$  cumple que si  $x = \varepsilon_2$

$$l(\varepsilon_2) = a_1^1(\varepsilon_1) = b_1 \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) + b_2 \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) = b_1^1(\varepsilon_2)$$

y para los puntos  $b_1^1(\varepsilon_2), b_2^1(\varepsilon_2)$  y  $b_5$ :

$$l(\varepsilon_2) = b_5 = b_1^1(\varepsilon_2) \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) + b_2^1(\varepsilon_2) \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) = b_1^2(\varepsilon_2)$$

repetiendo el argumento para las tercias  $b_0, b_1, b_0^1(\varepsilon_2), b_0^1(\varepsilon_2), b_1^1(\varepsilon_2), a_2$  y  $b_0^2(\varepsilon_2), b_1^2(\varepsilon_2), b_6$  deducimos que:

$$\begin{aligned} l(\varepsilon_2) &= b_0^1(\varepsilon_2) = b_0 \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) + b_1 \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) \\ l(\varepsilon_2) &= b_0^2(\varepsilon_2) = b_0^1(\varepsilon_2) \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) + b_1^1(\varepsilon_2) \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) \\ l(\varepsilon_2) &= b_6 = b_0^2(\varepsilon_2) \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) + b_1^2(\varepsilon_2) \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) = b_0^3(\varepsilon_2) \end{aligned}$$

de donde concluimos que:

$$b_4 = b_2^1(\varepsilon_2)$$

$$b_5 = b_1^2(\varepsilon_2)$$

$$b_6 = b_0^3(\varepsilon_2)$$

En la siguiente proposición generaliza este resultado.

**Proposición 4.1:** Sea un entero mayor que cero  $k$  y dos conjuntos de puntos de control  $b_0, \dots, b_k$  y  $b_k, \dots, b_{2k}$  de  $E^3$  de dos curvas de Bézier  $s_0$  y  $s_1$  de grado  $k$  definidos respectivamente en  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  y  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  las cuales forman una curva de Bézier por piezas de grado  $k$  definida en  $[\varepsilon_0, \varepsilon_2]$  con puntos de control  $a_0, \dots, a_k$ . Si el conjunto de puntos  $b_0, \dots, b_k, \dots, b_{2k}$  están generados por (4.1) entonces:

$$b_{k+i} = b_{k-i}^i(x) \text{ para } i = 0, \dots, k \quad \text{con} \quad x = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \quad (4.2)$$

**Demostración** (Por inducción sobre  $i$ ):

Para  $i = 0$ , (4.2) se cumple claramente.

Si  $i = 1$  por (4.1)  $b_{k+1} = a_1^{k-1}(\varepsilon_1)$  y así debemos mostrar que  $b_{k-1}^1(x) = a_1^{k-1}(\varepsilon_1)$ ,

ahora como:

$$b_{k-1}^1(x) = \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) b_{k-1} + \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) b_k$$

entonces de nuevo por (4.1) ésto es igual a:

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) a_0^{k-1}(\varepsilon_1) + \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) a_0^k(\varepsilon_1) \\ &= \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) a_0^{k-1}(\varepsilon_1) + \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) \left[ \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0} \right) a_0^{k-1}(\varepsilon_1) + \left( \frac{\Delta_0}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0} \right) a_1^{k-1}(\varepsilon_1) \right] \\ &= 0 \cdot a_0^{k-1} + a_1^{k-1}(\varepsilon_1) = a_1^{k-1}(\varepsilon_1) \end{aligned}$$

Ahora supongamos que (4.2) es cierto para  $i - 1$ , es decir:

$$a_{i-1}^{k-i+1}(\varepsilon_1) = b_{k+i-1} = b_{k-i+1}^{i-1}(x)$$

por demostrar para  $i$ , por (4.1):

$$b_{k+i} = a_i^{k-i}(\varepsilon_1)$$

entonces debemos probar que:

$$b_{k-i}^i(x) = a_i^{k-i}(\varepsilon_1)$$

como

$$b_{k-i}^i(x) = \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) b_{k-i}^{i-1}(x) + \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) b_{k-i+1}^{i-1}(x)$$

y de nuevo por (4.1) esto es igual a:

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) a_{i-1}^{k-i}(\varepsilon_1) + \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) a_{i-1}^{k-i+1}(\varepsilon_1) \\ &= \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\Delta_0} \right) a_{i-1}^{k-i}(\varepsilon_1) + \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) \left[ \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0} \right) a_{i-1}^{k-i}(\varepsilon_1) + \left( \frac{\Delta_0}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0} \right) a_i^{k-i}(\varepsilon_1) \right] \\ &= 0 \cdot a_{i-1}^{k-i}(\varepsilon_1) + a_i^{k-i}(\varepsilon_1) = a_i^{k-i}(\varepsilon_1) \end{aligned}$$

■

Una última observación en la figura (4.4) es que las curvas  $s_0$  y  $s_1$  coinciden en  $\varepsilon_1$  es decir  $s_0(\varepsilon_1) = b_3 = s_1(\varepsilon_1)$ . Esto es cierto también para la primera, segunda y tercera derivada, como veremos a continuación:

**Ejemplo 4.2** De (3.22)  $s_0$  y  $s_1$  se pueden escribir como:

$$s_0(x) = \sum_{i=0}^3 b_i B_i^3 \left( \frac{x-0}{\frac{2}{3}-0} \right) = \sum_{i=0}^3 b_i B_i^3 \left( \frac{3}{2}x \right)$$

para  $x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$

$$s_1(x) = \sum_{i=0}^3 b_{k+i} B_i^3 \left( \frac{x - \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \sum_{i=0}^3 b_{k+i} B_i^3 (3x - 2)$$

para  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ .

Y así de (3.28) tenemos que la  $r$ -ésima derivada de  $s_0$  y  $s_1$  están dadas por:

$$s_0^{(r)}(x) = \left( \frac{3}{2} \right)^r \sum_{i=0}^{3-r} \Delta^r b_i B_i^{3-r} \left( \frac{3x}{2} \right)$$

$$s_1^{(r)}(x) = (3)^r \sum_{i=0}^{3-r} \Delta^r b_{i+3} B_i^{3-r} (3x - 2)$$

para  $r = 1, 2, 3$ .

Y así evaluando  $\varepsilon_1 = \frac{2}{3}$  tenemos que :

$$s_0^r \left( \frac{2}{3} \right) = \left( \frac{3}{2} \right)^r \sum_{i=0}^{3-r} \Delta^r b_i B_i^{3-r} (1) = \left( \frac{3}{2} \right)^r \Delta^r b_{3-r}$$

$$s_1^r \left( \frac{2}{3} \right) = (3)^r \sum_{i=0}^{3-r} \Delta^r b_{i+3} B_i^{3-r} (0) = (3)^r \Delta^r b_3$$

Entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\left( \frac{3}{2} \right) \Delta^1 b_2 = \left( \frac{3}{2} \right) (b_3 - b_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{20}{9} \end{bmatrix} = 3(b_4 - b_3) = 3\Delta^1 b_3$$

$$\left( \frac{9}{4} \right) \Delta^2 b_1 = \left( \frac{9}{4} \right) (b_3 - 2b_2 + b_1) = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix} = 9(b_5 - 2b_4 + b_3) = 9\Delta^2 b_3$$

$$\left( \frac{27}{8} \right) \Delta^3 b_0 = \left( \frac{27}{8} \right) (b_3 - 3b_2 + 3b_1 - b_0) = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = 27 \cdot (b_6 - 3b_5 + 3b_4 - b_3) = 27 \cdot \Delta^3 b_3$$

La siguiente proposición generaliza este resultado.

**Proposición 4.2:** Dado un entero positivo  $k$  y sean dos curvas de Bézier  $s_0$  y  $s_1$  de grado  $k$  cuyos puntos de control son  $b_0, b_1, \dots, b_k$  y  $b_k, b_{k+1}, \dots, b_{2k}$  definidas sobre los intervalos  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  y  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  respectivamente, las cuales forma una curva de Bézier de dos piezas  $s$  de grado  $k$ , entonces  $s$  es  $r - veces$  es  $C^r$  en  $\varepsilon_1$  si :

$$b_{k+i} = b_{k-i}^i \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right) \quad \text{para } i = 0, \dots, r, \quad (4.3)$$

**Demostración:**

Para facilitar la notación de la demostración escribimos;  $\varepsilon_2 - \varepsilon_0 = \Delta_0 + \Delta_1$ . Así por (3.21)  $s_0$  y  $s_1$  se pueden escribir como:

$$s_0(x) = \sum_{i=0}^k b_i B_i^k \left( \frac{x - \varepsilon_0}{\Delta_0} \right)$$

$$s_1(x) = \sum_{i=0}^k b_{k+i} B_i^k \left( \frac{x - \varepsilon_1}{\Delta_1} \right)$$

para  $x \in [\varepsilon_0, \varepsilon_2]$

Y por (3.28), (3.24) tenemos que:

$$\frac{d^r}{d\varepsilon^r} s_1(\varepsilon_1) = \left( \frac{1}{\Delta_0} \right)^r \Delta^r b_{k-r}$$

$$\frac{d^r}{d\varepsilon^r} s_2(\varepsilon_1) = \left( \frac{1}{\Delta_1} \right)^r \Delta^r b_k$$

Así la demostración de la proposición se reduce a probar que:

$$b_{k+i} = b_{k-i}^i \left( \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0} \right) \Rightarrow \Delta_1^r \Delta^r b_{k-r} = \Delta_0^r \Delta^r b_k; \quad i = 0, \dots, r \quad (4.4)$$

Por inducción sobre  $r$

Si  $r = 0$  se cumple trivialmente.

Si  $r = 1$  por demostrar:

$$\Delta_1 \Delta^1 b_{k-1} = \Delta_0 \Delta^1 b_k$$

pero por hipótesis:

$$\begin{aligned} \Delta_0 \Delta^1 b_k &= \Delta_0 (b_{k+1} - b_k) = \Delta_0 (b_{k-1}^1 (\frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0}) - b_k) \\ &= \Delta_0 (-\frac{\Delta_1}{\Delta_0} b_{k-1} + \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0} b_k - \frac{\Delta_0}{\Delta_0} b_k) = \Delta_1 \Delta^1 b_{k-1} \end{aligned}$$

Ahora supongamos que se cumple para  $r - 1$  es decir:

$$\Delta_1^{r-1} \Delta^{r-1} b_{k-r+1} = \Delta_0^{r-1} \Delta^{r-1} b_k$$

y demostremos para  $r$ , como

$$\Delta_0^r \Delta^r b_k = \Delta_0^r (\Delta^{r-1} b_{k+1} - \Delta^{r-1} b_k) = \Delta_0 (\Delta_0^{r-1} \Delta^{r-1} b_{k+1} - \Delta_0^{r-1} \Delta^{r-1} b_k)$$

y por hipótesis de inducción esto es igual a:

$$\Delta_0 (\Delta_1^{r-1} \Delta^{r-1} b_{k-r+2} - \Delta_1^{r-1} \Delta^{r-1} b_{k-r+1}) = \Delta^{r-1} (\Delta_0 \Delta^{r-1} b_{k-r+2} - \Delta_0 \Delta^{r-1} b_{k-r+1})$$

usando (3.27) esta expresión se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} &\Delta_1^{r-1} \left( \Delta_0 \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \Delta^1 b_{k-j} - \Delta_0 \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \Delta^1 b_{k-j-1} \right) \\ &= \Delta_1^{r-1} \left( \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \Delta_0 \Delta^1 b_{k-j} - \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \Delta_0 \Delta^1 b_{k-j-1} \right) \end{aligned}$$

por el caso cuando  $r = 1$  tenemos que:

$$\begin{aligned} &\Delta_1^{r-1} \left( \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \Delta_1 \Delta^1 b_{k-j-1} - \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \Delta_1 \Delta^1 b_{k-j-2} \right) \\ &= \Delta_1^r \left( \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \Delta^1 b_{k-j-1} - \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \Delta^1 b_{k-j-2} \right) \end{aligned}$$

y de nuevo por (3.27) tenemos que:

$$\Delta_1^r(\Delta^{r-1}b_{k-r+1} - \Delta^{r-1}b_{k-r}) = \Delta_1^r\Delta^r b_{k-r}$$

■

#### 4.2.1 Continuidad de $C^1$ y $C^2$ .

**Continuidad de  $C^1$ .** Para la construcción de las curvas spline cuadráticas y cúbicas es necesario que tener claro las implicaciones que tienen condiciones de continuidad de  $C^1$  y  $C^2$ , a continuación las estudiaremos más a fondo.

Sea  $s$  una curva de Bézier de dos piezas de grado  $k$  (para un entero positivo  $k$ ) definida sobre el intervalo  $[\varepsilon_0, \varepsilon_2]$  la cual está formada por dos subcurvas de Bézier  $s_0$  y  $s_1$  de grado  $k$  con puntos de control  $b_0, \dots, b_k$  y  $b_k, \dots, b_{2k}$ , definidas en los intervalos  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  y  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  respectivamente.

Así según (4.4) la condición que garantiza la continuidad  $s$  y su primer de derivada en  $\varepsilon_1$  es:

$$\Delta_1\Delta^1 b_{k-1} = \Delta_0\Delta^1 b_k \quad (4.5)$$

la cual nos indica que los puntos  $b_{k-1}, b_k, b_{k+1}$  deben ser colineales y que la distancia de los  $b_k$  a  $b_{k-1}$  y la de  $b_{k+1}$  a  $b_k$  está en proporción de  $\Delta_0 : \Delta_1$ , de donde la línea recta que pasa por  $b_{k-1}$  y  $b_{k+1}$  cumple que (figura 4.5):

$$b_k = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1}\right) b_{k-1} + \left(\frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1}\right) b_{k+1} \quad (4.6)$$

Es importante mencionar que la simple colinealidad de tres puntos de Bézier  $b_{k-1}, b_k, b_{k+1}$  no es suficiente para garantizar la continuidad  $C^1$  en  $\varepsilon_1$  ya que esta

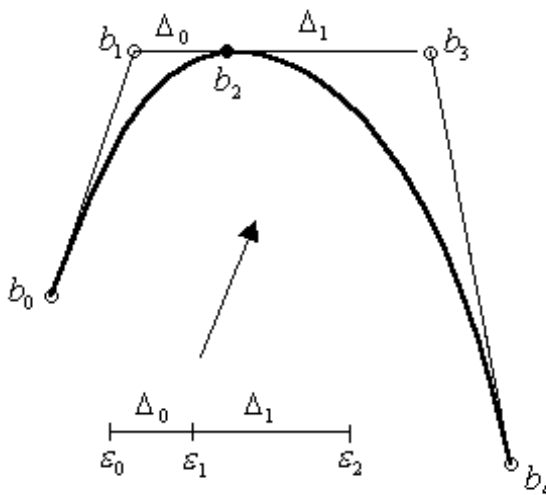


Figura 4.5: Condición de continuidad de  $C^1$ .

continuidad esta basada en una relación entre el dominio y el rango y la colinealidad de los tres puntos es puramente un fenómeno del rango. Sin información adicional del dominio de la curva no se puede hacer ninguna afirmación a cerca de la diferenciabilidad. Sin embargo la colinealidad garantiza una tangente variable continua.

**Continuidad de  $C^2$ .** Ahora supongamos que  $s$  es de  $C^1$  en  $\varepsilon_1$  y deseamos lograr la continuidad de  $C^2$ .

Así según (4.4) para  $r = 2$ , continuidad de  $C^2$  se tienen siempre que:

$$\Delta_1^2 \Delta^2 b_{k-2} = \Delta_0^2 \Delta^2 b_k \quad (4.7)$$

lo cual es cierto siempre que:

$$b_{k+1} = b_{k-2}^2 \left( \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0} \right)$$

lo cual indica que las curvas con puntos de control  $b_0, \dots, b_{k-1}, b_k$  y  $b_k, b_{k+2}, \dots, b_{2k}$  definidos sobre  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  y  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  describen la misma curva global sobre el intervalo

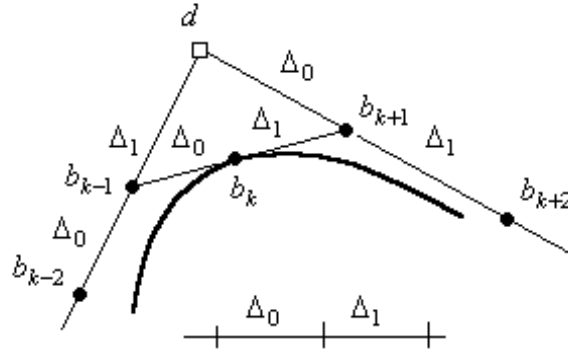


Figura 4.6: Curvas de Bézier cuadráticas  $s_0$  y  $s_1$  definidas respectivamente en los intervalos  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$  y  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  que se unen con continuidad de  $C^2$  en  $\varepsilon_1$ .

$[\varepsilon_0, \varepsilon_2]$  y por lo tanto debe existir un polígono  $b_0, \dots, b_{k-2}, d, b_{k+2}, \dots, b_{2k}$  que describe la curva global en  $[\varepsilon_0, \varepsilon_2]$ .

Así la condición de  $C^2$  para una curva  $s$  de  $C^1$  en  $\varepsilon_1$  se tienen si existe un punto  $d$  tal que (figura 4.6):

$$\begin{aligned} b_{k-1} &= \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1} \right) b_{k-2} + \left( \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1} \right) d \\ b_{k+1} &= \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1} \right) d + \left( \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1} \right) b_{k+2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

En ejemplo 4.1,  $d = a_1^1(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{20}{3} \end{bmatrix}$   $b_0 = a_0^1(\varepsilon_1)$  y  $b_4 = a_2^1(\varepsilon_1)$  con  $\varepsilon_1 = \frac{2}{3}$

entonces:

$$\begin{aligned} b_2 &= \begin{bmatrix} \frac{42}{9} \\ \frac{60}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}d = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{20}{3} \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{20}{3} \end{bmatrix} \\ b_4 &= \begin{bmatrix} \frac{44}{9} \\ \frac{40}{9} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}b_4 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{20}{3} \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las condiciones (4.8) nos proporciona una forma fácil para probar si una curva es  $C^2$  en un punto de ruptura  $\varepsilon_i$ , simplemente construimos dos puntos auxiliares  $d_-$ ,  $d_+$  del lado derecho e izquierdo y checamos su igualdad, es decir comprobando que:

$$d_- = \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_1} b_{k+1} - \frac{\Delta_0}{\Delta_1} b_{k+2}$$

$$d_+ = \frac{\Delta_0 + \Delta_1}{\Delta_0} b_{k-1} - \frac{\Delta_1}{\Delta_0} b_{k-2}$$

sean iguales.

Por supuesto la otra forma de comprobar la continuidad de  $C^2$  dado por (4.7) sin embargo (4.8) es más práctica ya que ésta compara *puntos* ( $d_-$  y  $d_+$ ) mientras la segunda compara *vectores* ( $\Delta^2 b_0$  y  $\Delta^2 b_2$ ).

### 4.3 Curvas Spline Cuadráticas y Cúbicas.

Una vez caracterizadas las condiciones necesarias para la continuidad de  $C^1$  y  $C^2$  a continuación estudiaremos la construcción de las curvas spline cuadráticas y cúbicas.

#### Curvas Spline Cuadráticas.

Dada una sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  estrictamente crecientes, por definición (definición 4.1) una curva spline cuadrática está formada por secciones de curvas polinomiales de grado 2 las cuales se unen con una continuidad de  $C^1$ .

Así para representar este spline en la forma de Bézier se necesitan tres puntos de control por cada segmento de curva, en donde cada par se deben unir con una continuidad de  $C^1$ .

Como cada punto de unión de las curvas tiene un subíndice par (ya que la numeración comienza desde cero) éstos se denotarán por  $b_{2i}$  y según (4.6) deberán calcularse

por:

$$b_{2i} = \left( \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \right) b_{2i-1} + \left( \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \right) b_{2i+1} \quad (4.9)$$

para  $i = 1, \dots, L - 2$ . Los puntos  $b_{2i+1}$  son llamados *interiores*.

Así en general una curva spline  $s$  cuadrática está completamente determinada por una sucesión de nodos estrictamente crecientes  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  y un conjunto de puntos  $b_0, b_1, b_3, \dots, b_{2i+1}, \dots, b_{2L-1}, b_{2L}$  ya que los restantes se calculan por (4.9).

El polígono formado por los puntos  $b_0, b_1, b_3, \dots, b_{2i+1}, \dots, b_{2L-1}, b_{2L}$  es llamado *polígono B-spline o polígono "de Boor"* de  $s$ , los cuales también se denotan por  $d_{-1} = b_0, d_0 = b_1, \dots, d_{L-1} = b_{2L-1}, d_L = b_{2L}$ .

Una curva spline descrita en términos del polígono B-spline es llamada *curva B-spline*.

En la figura (4.7) se presenta una curva B-spline cuadrática con ocho puntos de control formada por seis curvas las cuales se unen con una continuidad de  $C^1$ . En la figura (4.8) se presenta otra curva B-spline cuadrática con la cual se dibujo la letra "s".

Una importante propiedad que las curvas de Bézier no comparten con las curvas B-spline, es el *control local*. En una curva de Bézier el cambio de un vértice de control afecta a la curva completa (este es un cambio global) . Sin embargo el cambio de un vértice de control en curva cuadrática B-spline afecta a lo más tres segmentos de curva.

La propiedad control local es una de las principales razones que ha hecho que las curvas B-spline sean tan populares, por ejemplo en el caso de diseño de fuentes es muy

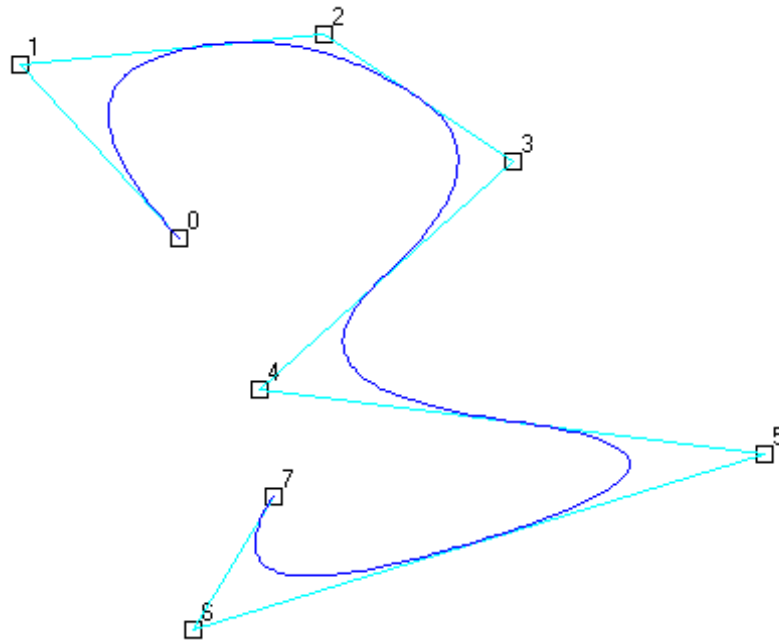


Figura 4.7: Curva B-spline cuadrática formada por el polígono de Boor,  $d_{-1}, \dots, d_6$ .

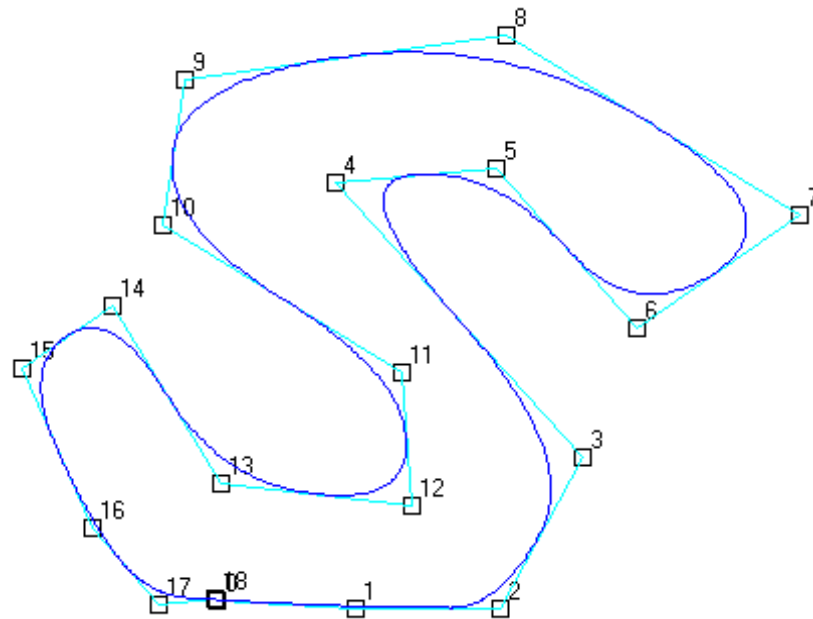


Figura 4.8: Curva B-spline cuadrática formada por el polígono de Boor  $d_{-1}, \dots, d_{17}$ .

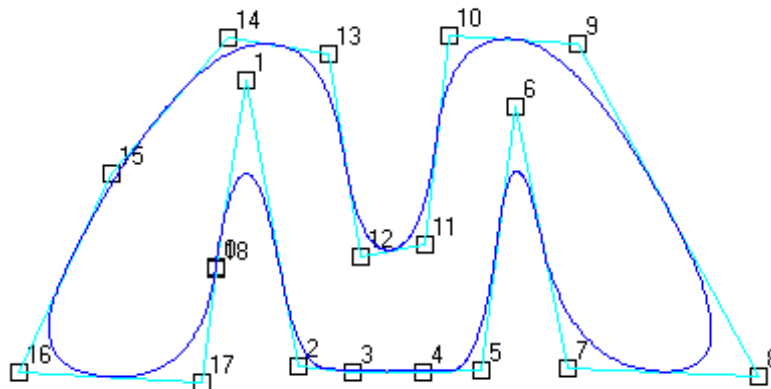


Figura 4.9: Curva de B-spline la cual contiene un segmento de línea recta formada por los puntos  $d_3$ ,  $d_4$  y  $d_5$ .

importante que los cambios en la fuente sean locales y no afecten diseño completo.

Otra consecuencia del control local es la de poder incluir segmentos de línea recta en una curva cuadrática B-spline, ya que si tres vértices de control son colineales el segmento cuadrático determinado por ellos es lineal. En constraste una curva de Bézier simple no puede contener segmentos lineales a menos de que ella misma sea lineal.

Por ejemplo en la figura (4.9) se presenta una curva B-spline cuadrática la cual dibuja la letra "m" en donde existe un segmento de recta formada por los puntos de control  $d_3$ ,  $d_4$  y  $d_5$ .

### Curvas B-spline Cuadráticas Cerradas.

Dada una sucesión de nodos estrictamente crecientes  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  y un poligono de Boor formado por los puntos  $d_{-1}, d_0, d_1, \dots, d_{2L-1}, d_{2L}$ . Una curva B-spline cuadrática cerrada  $s$  es una curva cuadrática B-spline si :

$$s(\varepsilon_0) = d_{-1} = d_{2L} = s(\varepsilon_L)$$

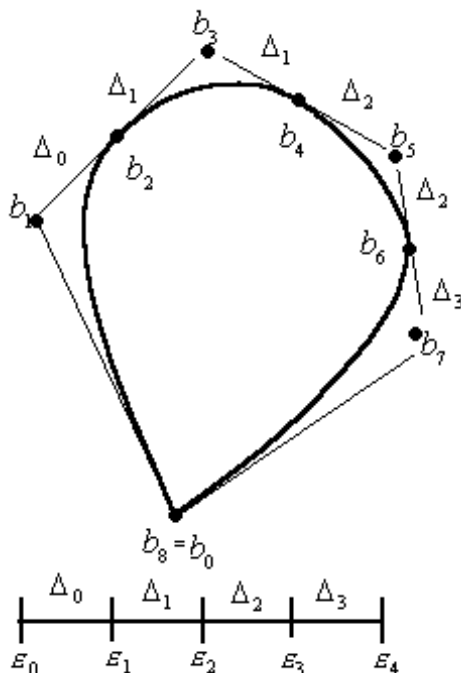


Figura 4.10: Curva B-spline cuadrática cerrada.

Por ejemplo en la figura (4.10) se muestra una curva B-spline cuadrática cerrada, definida por la sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^4$  y los puntos  $d_{-1} = b_0, d_0 = b_1, d_1 = b_3, d_2 = b_5, d_3 = b_7$ .

Para lograr que la curva B-spline cerrada sea de  $C^1$  en  $b_0$  según (4.5) los puntos  $b_1, b_0, b_{L-1}$  deben de ser colineales y estar en proporción de  $\Delta_0 : \Delta_{L-1}$  y así por (4.6) tenemos que:

$$b_0 = b_{2L} = \frac{\Delta_{L-1}}{\Delta_0 + \Delta_{L-1}} b_{2L-1} + \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_{L-1}} b_1$$

por ejemplo en la figura (4.11) se presenta la misma curva de la figura (4.10) sin embargo aquí la unión en los extremos es de  $C^1$ .

### Curvas Spline Cúbicas.

Dada una sucesión de nodos estrictamente creciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$ , una curva spli-

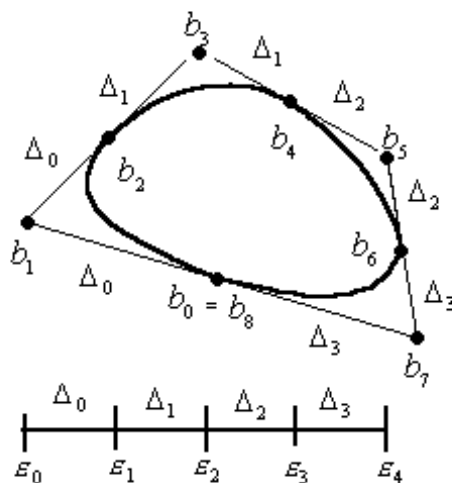


Figura 4.11: Curva B-spline cuadrática de cerrada en la cual la unión en los extremos es de  $C^1$ .

ne cúbica por definición es una curva formada por secciones de curvas polinomiales cúbicas las cuales se unen con una continuidad de  $C^2$ .

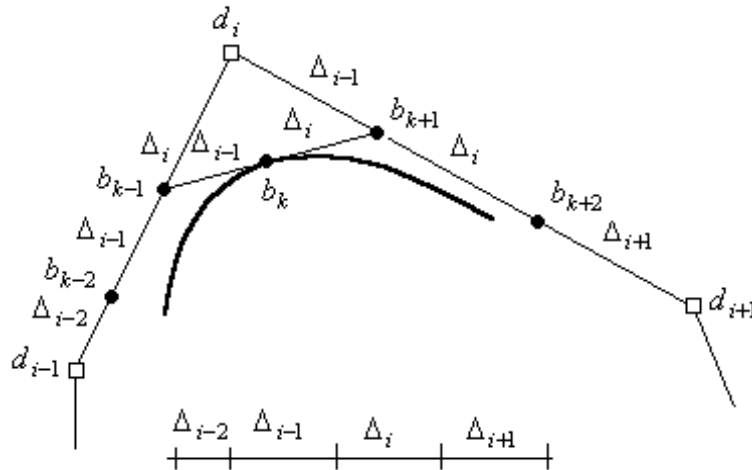
Así para representar una curva spline cúbica en la forma de Bézier necesitamos, cuatro puntos de control por cada sección de curva en donde cada par de curvas se deben unir con una continuidad de  $C^2$ .

Como cada cuarto punto de unión tiene un subíndice impar (pues comienza la numeración desde cero) estos puntos se pueden denotar como  $b_{3i}$  y así para lograr la continuidad de  $C^1$  de (4.6)  $b_{3i}$  se deben calcular como:

$$b_{3i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} b_{3i-1} + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} b_{3i+1} \quad (4.10)$$

para  $i = 1, \dots, L - 1$ .

Para la continuidad de  $C^2$  según (4.8) deben de existir puntos auxiliares  $d_i$  de tal



Figura~4.12: Condición de continuidad de  $C^2$  en una curva de B-spline.

forma que la distancia de los puntos  $b_{3i-1}$  a  $b_{3i}$  y  $d_i$  a  $b_{3i+1}$  y la distancia de los puntos  $b_{3i-1}$  a  $d_i$  y  $b_{3i+1}$  a  $b_{3i+2}$  estén en proporción de  $\Delta_{i-1} : \Delta_i$  (figura 4.12).

De donde estos puntos se calculan por :

$$\begin{aligned}
 b_{3i-2} &= \left( \frac{\Delta_{i-1} + \Delta_i}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} \right) d_{i-1} + \left( \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} \right) d_i \\
 b_{3i-1} &= \left( \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} \right) d_{i-1} + \left( \frac{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1}}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} \right) d_i
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

para  $i = 2, \dots, L - 2$ .

Para el caso de la primer curva que forma al B-spline cúbico, los puntos  $b_0$  y  $b_1$  son cualesquiera pero para lograr que la distancia entre  $b_2$  y  $b_1$  y  $d_1$  y  $b_2$  esté en una proporción de  $\Delta_0 : \Delta_1$ ,  $b_2$  se debe calcular como:

$$b_2 = \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1} \right) b_1 + \left( \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1} \right) d_1 \tag{4.12}$$

Lo mismo pasa para la última curva, aquí los puntos  $b_{3L-1}$  y  $b_{3L}$  son arbitrarios y

$b_{3L-2}$  se debe calcular por:

$$b_{3L-2} = \frac{\Delta_{L-1}}{\Delta_{L-2} + \Delta_{L-1}} d_{L-1} + \frac{\Delta_{L-2}}{\Delta_{L-2} + \Delta_{L-1}} d_L \quad (4.13)$$

Así en general una curva spline cúbica está completamente determinada por una sucesión de nodos estrictamente creciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^L$  y un conjunto de puntos  $d_{-1}, d_0, \dots, d_L, d_{L+1}$  los cuales forma el polígono "de Boor" donde :

$$d_{-1} = b_0$$

$$d_0 = b_1$$

$$d_L = b_{3L-1}$$

$$d_{L+1} = b_{3L}$$

calculando los puntos de control restantes de las curvas que forman al B-spline cúbico por medio de (4.10), (4.11) (4.12) y (4.13).

En la figura (4.13) se presenta el B-spline cúbico formado por los mismos puntos de control del B-spline cuadrático de la figura (4.7) aquí podemos observar que esta curva es más acentuada que la cuadrática ya que las uniones son más suaves, ésto mismo se observa en al comparar las dos "s" que se presentan en las figuras (4.8) y (4.14).

El control local en el caso de las curvas B-splines cúbicas no es tan local como para las cuadráticas. Ya que al mover un vértice de control  $d_i$  se ven afectados cuatro segmentos de la curva.

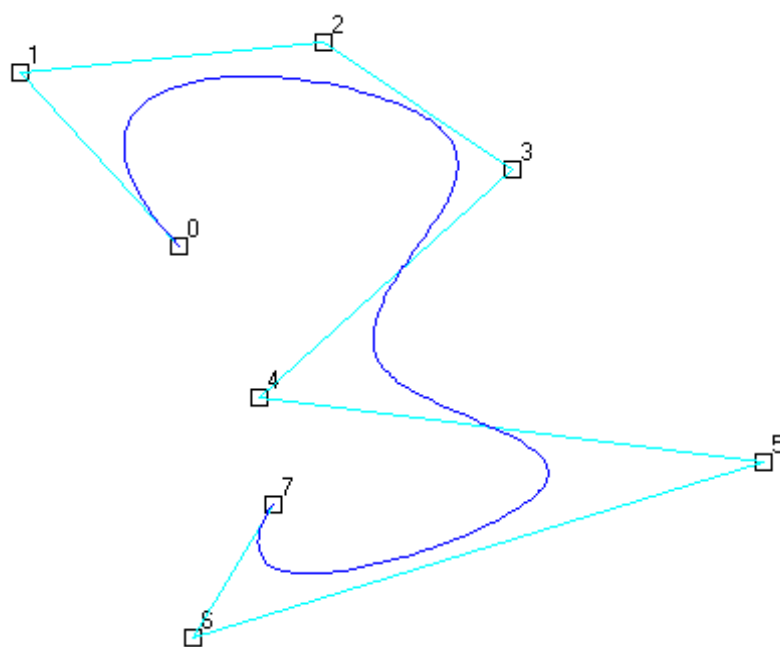


Figura 4.13: Curva B-spline cúbica formada por el polígono de Boor,  $d_{-1}, \dots, d_6$ .

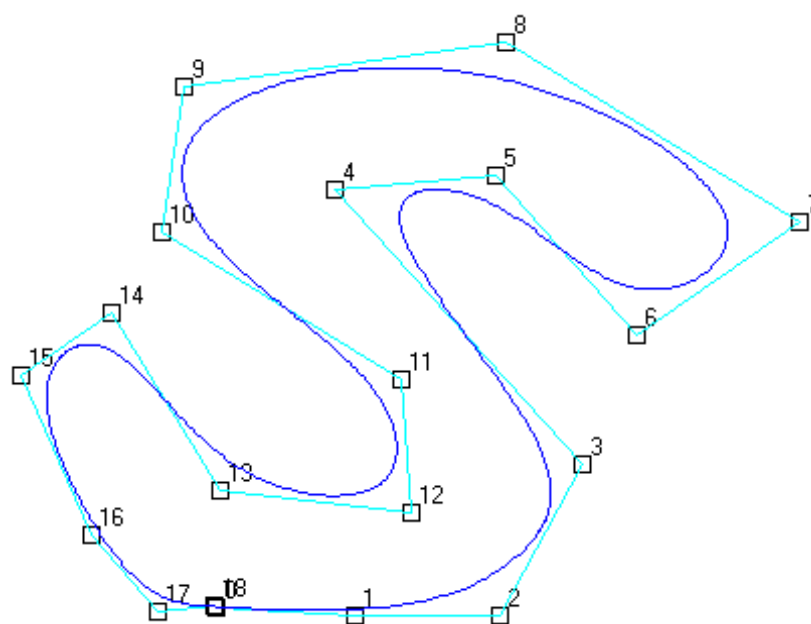


Figura 4.14: Curva B-spline cúbica formada por el polígono de Boor  $d_0, \dots, d_{17}$ .



# Capítulo 5

## Curvas B-splines.

En el capítulo anterior se habló de las curvas B-spline cuadráticas y cúbicas como aquellas curvas spline en la forma de Bézier formadas por el polígono de Boor o B-spline, en este capítulo podremos generalizar este concepto por medio del algoritmo de Boor a partir de cual también profundizaremos la teoría de estas curvas. Así discutiremos la diferenciabilidad continua de una curva B-spline, las implicaciones de la inserción repetida de nodos y el blossom B-spline.

### 5.1 El Algoritmo de Boor.

El algoritmo de Boor publicado por Carl de Boor en 1972 [6] define completamente las curvas B-spline análogamente a como el algoritmo de Casteljaou define las curvas de Bézier, este algoritmo está basado en el efecto que tiene la inserción repetida de un nodo sobre el polígono de control B-spline.

Por simplicidad la descripción de este algoritmo se hará en términos de curvas funcionales discutidas en la sección 2.2, sin embargo la generalización paramétrica también será discutida.

Continuaremos usando la variable  $k$  para denotar el grado de las curvas y  $L$

denotará la cantidad de segmentos de curva que forman el spline. La sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^{L+2k-2}$  estará formada por una sucesión de nodos no decrecientes en contraste con los capítulos anteriores en donde la sucesión  $\varepsilon$  estaba formada por números estrictamente creciente<sup>1</sup>, así puede suceder que  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} = \dots = \varepsilon_{i+m-1}$ , en este caso se dice que  $\varepsilon_i$  tiene multiplicidad  $m$  y en particular si  $m = 1$  también se dice que  $\varepsilon_i$  es de multiplicidad simple.

El intervalo  $[\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{L+k-1}]$  será llamado intervalo dominio o de definición y los nodos contenidos en éste son llamados nodos dominio.

**Definición 5.1.** Sean  $k$  y  $L$  dos entero positivos y una sucesión de nodos no decreciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^{L+2k-2}$ . Las  $k + L$  abscisas de Greville se definen como:

$$\tau_i = \frac{1}{k} (\varepsilon_i + \dots + \varepsilon_{i+k-1}); \quad i = 0, \dots, L + k - 1. \quad (5.1)$$

Así dado  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^{L+2k-2}$  y un conjunto de ordenadas de Boor  $d_i$  sobre las abscisas de Greville podemos definir un polígono B-spline  $P$  formado por los puntos  $(\tau_i, d_i)$  para  $i = 0, \dots, L + k - 1$ <sup>2</sup> (donde los  $\tau_i$  se calculan 5.1), el cual es una función lineal por pedazos con puntos de ruptura en las abscisas de Greville, por ejemplo observemos la figura (5.1).

### 5.1.1 Inserción de Nodos.

Iniciaremos la discusión del efecto que tiene la inserción de nodos sobre el polígono B-spline por medio del siguiente ejemplo.

#### Ejemplo 5.1.

<sup>1</sup> Excepto en la sección en donde discutimos las funciones B-spline y diferencias divididas, ya que estas últimas por definición permiten nodos repetidos.

<sup>2</sup> Sin embargo los subíndices de este polígono son diferentes a los polígonos B-spline definidos en el capítulo 4 en este caso empiezan en 0 y terminan en  $L + k - 1$ .

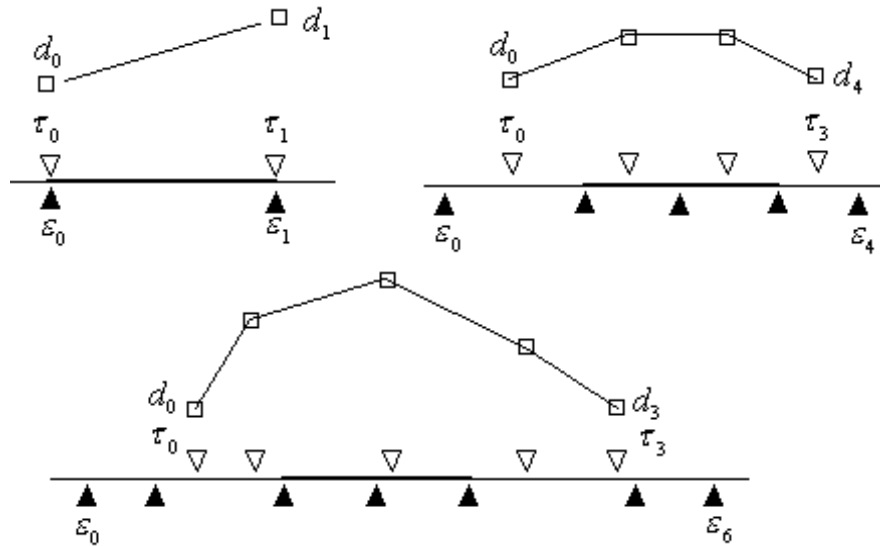


Figura 5.1: Abscisas de Greville para varias sucesiones de nodos y grados con su correspondiente polígono  $P$ , para la figura superior izquierda  $k = 1, L = 1$ , la superior derecha  $k = 2, L = 2$  y la inferior  $k = 3, L = 2$ .

Sean  $k = 2, L = 3$ , una sucesión de nodos no decreciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^5$  y un conjunto de ordenadas de Boor  $\{d_i\}_{i=0,\dots,4}$ , así de (5.1) calculamos las abscisas de Greville como  $\tau_i = \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}}{2}$  para  $i = 0, \dots, 4$ , de donde el polígono B-spline  $P$  está formado por los puntos  $\{(\tau_i, d_i)\}_{i=0,\dots,4}$ .

Ahora supongase que deseamos insertar el punto  $x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2] \subset [\varepsilon_1, \varepsilon_4]$  como un nuevo nodo de la sucesión  $\varepsilon$ , entonces para este caso se generan dos nuevas abscisas de Greville (que denotaremos por  $\tau_1^x$  y  $\tau_2^x$ ) dadas por:

$$\begin{aligned} \tau_1^x &= \frac{\varepsilon_1 + x}{2} \\ \tau_2^x &= \frac{x + \varepsilon_2}{2} \end{aligned} \tag{5.2}$$

de donde sus correspondientes ordenadas de Boor se calculan por la interpolaciones

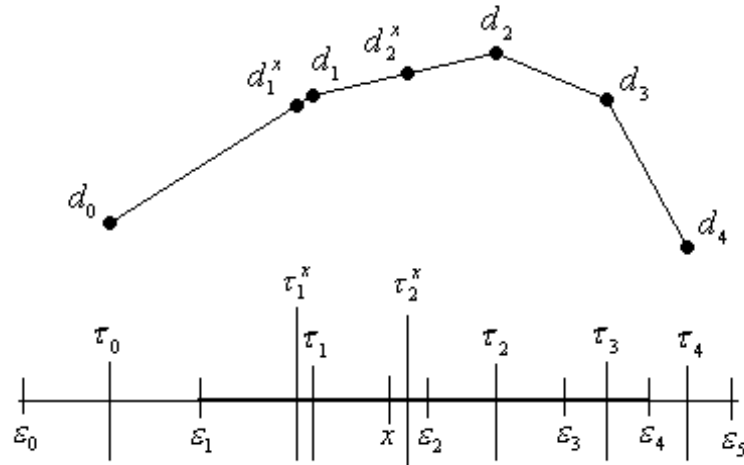


Figura 5.2: Polígono B-spline al insertar el punto  $x$  en la sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^6$ .

lineales (denotadas por  $d_1^x$  y  $d_2^x$ ) (figura 5.2):

$$\begin{aligned} d_1^x &= \frac{\tau_1 - \tau_1^x}{\tau_1 - \tau_0} d_0 + \frac{\tau_1^x - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} d_1 \\ d_2^x &= \frac{\tau_2 - \tau_3^x}{\tau_2 - \tau_1} d_1 + \frac{\tau_2^x - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} d_2 \end{aligned}$$

y de (5.1) y (5.2) estas ecuaciones se pueden escribir respectivamente como:

$$\begin{aligned} d_1^x &= \frac{\varepsilon_2 - x}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0} d_0 + \frac{x - \varepsilon_0}{\varepsilon_2 - \varepsilon_0} d_1 \\ d_2^x &= \frac{\varepsilon_3 - x}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} d_1 + \frac{x - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} d_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

De donde la nueva sucesión de nodos que incluye a  $x$  dada por  $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = x, \varepsilon_3 = \varepsilon_2, \varepsilon_4 = \varepsilon_3, \varepsilon_5 = \varepsilon_4, \varepsilon_6 = \varepsilon_5)$  forma un nuevo polígono B-spline (denotado por  $P^x$ ) definido por los puntos  $\{(\tau_i^x, d_i^x)\}_{i=0, \dots, 5}$  con:

$$\begin{aligned} \tau_0^x &= \tau_0, \quad d_0^x = d_0 \\ \tau_1^x &= \frac{\varepsilon_1 + x}{2}, \quad \tau_2^x = \frac{x + \varepsilon_2}{2} \end{aligned}$$

$$\tau_i^x = \tau_{i-1}, d_i^x = d_{i-1}$$

para  $i = 3, 4, 5$ .

Este proceso se puede describir en forma algorítmica como sigue.

### Algoritmo de inserción de nodos.

Dada una sucesión de nodos no decrecientes  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^{L+2k-2}$  (para  $k$  y  $L$  enteros positivos) y un conjunto de ordenadas de Boor  $\{d_i\}_{i=0, \dots, L+k-1}$  las cuales forman un polígono B-spline  $P$  con los puntos  $\{(\tau_i, d_i)\}_{i=0, \dots, L+k-1}$  si insertamos un nuevo nodo  $x \in [\varepsilon_I, \varepsilon_{I+1}] \subset [\varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_{L+k-1}]$  en  $\varepsilon$  se genera un nuevo polígono  $P^x$  formado por los puntos  $\{(\tau_i^x, d_i^x)\}_{i=0, \dots, L+k}$  los cuales se calculan por medio del siguiente algoritmo:

1. Obtener el mayor  $I$  tal que  $\varepsilon_I \leq x < \varepsilon_{I+1}$ .

Si  $x = \varepsilon_I$  y  $\varepsilon_I$  es de multiplicidad  $k$  entonces **parar**.

Si no:

2. Para  $i = 0, \dots, I - k + 1$

$$\tau_i^x = \tau_i, d_i^x = d_i$$

3. Para  $i = I - k + 2, \dots, I + 1$

$$\tau_i^x = \frac{1}{k}(\varepsilon_i + \dots + \varepsilon_{i+k-2}) + \frac{1}{k}x.$$

$$\begin{aligned} d_i^x &= \frac{\tau_i - \tau_i^x}{\tau_i - \tau_{i-1}} d_{i-1} + \frac{\tau_i^x - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} d_i \\ &= \frac{\varepsilon_{i+k-1} - x}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_{i-1}} d_{i-1} + \frac{x - \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_{i-1}} d_i \end{aligned}$$

4. Para  $i = I + 2, \dots, L + k$

$$\tau_i^x = \tau_{i-1}, d_i^x = d_{i-1}$$

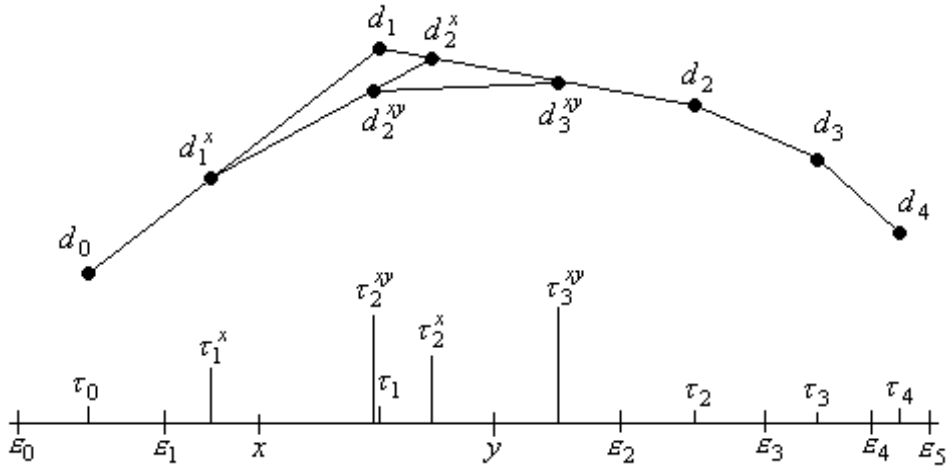


Figura 5.3: Polígono de B-spline al insertar los puntos  $x, y$  en  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^5$ .

5. Renumerar la sucesión de nodos incluyendo  $x$  como  $\varepsilon_{I+1}$
6. Reemplazar  $L$  por  $L + 1$ .

Es importante comprobar que este el algoritmo es consistente, es decir que el proceso no depende del orden en que se inserten los nodos, por ejemplo supongamos que  $k = 2, L = 3$  y así tomemos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^5$  y un conjunto de puntos de Boor  $\{d_i\}_{i=0,\dots,4}$  sobre las abscisas de Greville  $\{\tau_i\}_{i=0,\dots,4}$ .

Si  $x, y \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  entonces observemos que al insertar en  $\varepsilon$  los puntos  $x$  y  $y$  y  $y$  y  $x$  (en ese orden) según el algoritmo de inserción tenemos los polígonos que presentan en las figuras (5.3) y (5.4) respectivamente, aquí se puede apreciar que  $d_2^{xy} = d_2^{yx}$ .

**Proposición 5.1.** Sean  $k$  y  $L$  dos enteros positivos,  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^{L+2k-2}$  una sucesión de nodos creciente y un conjunto de ordenadas de Boor  $\{d_i\}_{i=0,\dots,L+k-1}$ , los cuales forman un polígono B-spline  $P$  con los puntos  $\{(\tau_i, d_i)\}_{i=0,\dots,L+k-1}$ , en donde los valores  $\tau_i$  se calculan con (5.1).

Supongamos que se insertan los puntos  $x$  y  $y \in [\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{L+k-1}]$  en la sucesión de

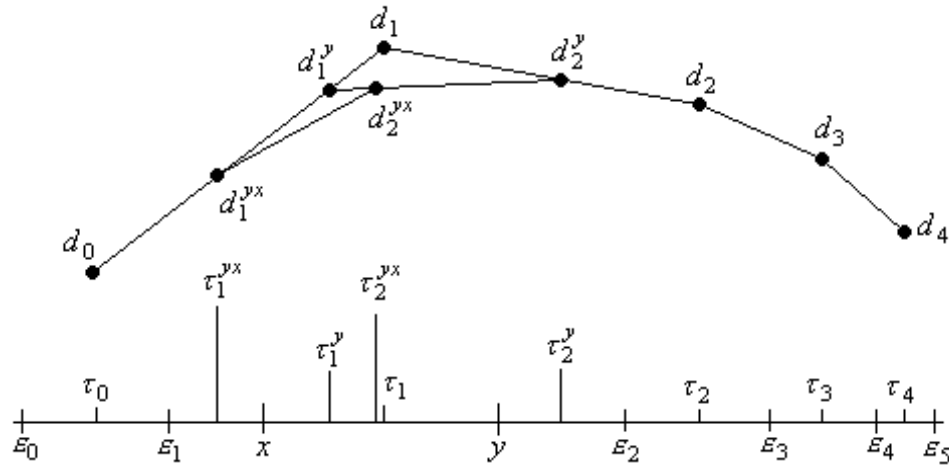


Figura 5.4: Polígono de B-spline al insertar los puntos  $y, x$  en  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^5$ .

nodos  $\varepsilon$  con el algoritmo de inserción. Si  $P^{xy}$  y  $P^{yx}$  denota los polígonos formados al insertar  $x$  y  $y$  y  $y$  y  $x$  respectivamente entonces  $P^{xy} = P^{yx}$ .

### Demostración:

Sea  $x \in [\varepsilon_I, \varepsilon_{I+1}]$ , por el paso 5 del algoritmo de inserción de nodo:

$$d_i^x = \frac{\tau_i - \tau_i^x}{\tau_i - \tau_{i-1}} d_{i-1} + \frac{\tau_i^x - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} d_i \quad (5.4)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+k-1} - x}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_{i-1}} d_{i-1} + \frac{x - \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_{i-1}} d_i$$

para  $i = I - k + 2, \dots, I + 1$ .

De igual forma si  $y \in [\varepsilon_J, \varepsilon_{J+1}]$

$$d_i^y = \frac{\tau_i - \tau_i^y}{\tau_i - \tau_{i-1}} d_{i-1} + \frac{\tau_i^y - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} d_i \quad (5.5)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+k-1} - y}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_{i-1}} d_{i-1} + \frac{y - \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_{i-1}} d_i \quad (5.6)$$

para  $i = J - k + 2, \dots, J + 1$ .

En caso de que  $[\varepsilon_{I-k+2}, \varepsilon_{I+1}] \cap [\varepsilon_{J-k+2}, \varepsilon_{J+1}] = \emptyset$  no hay nada que probar ya que cada proceso de inserción no tiene inferencia sobre el otro y así  $P^{xy} = P^{yx}$ , en caso

contrario:

$$d_{i+1}^{xy} = \frac{\tau_{i+1}^x - \tau_{i+1}^{xy}}{\tau_{i+1}^x - \tau_i^x} d_i^x + \frac{\tau_{i+1}^{xy} - \tau_i^x}{\tau_{i+1}^x - \tau_i^x} d_{i+1}^x = \frac{\varepsilon_{i+k-1} - y}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_i} d_i^x + \frac{y - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_i} d_{i+1}^x$$

donde  $\tau_{i+1}^{xy} = \frac{1}{k} (\varepsilon_{i+1} + \dots + \varepsilon_{i+k-r}) + \frac{1}{k}(x + y)$  y

$$d_{i+1}^{yx} = \frac{\tau_{i+1}^y - \tau_{i+1}^{yx}}{\tau_{i+1}^y - \tau_i^y} d_i^y + \frac{\tau_{i+1}^{yx} - \tau_i^y}{\tau_{i+1}^y - \tau_i^y} d_{i+1}^y = \frac{\varepsilon_{i+k-1} - x}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_i} d_i^y + \frac{x - \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+k-1} - \varepsilon_i} d_{i+1}^y$$

donde  $\tau_{i+1}^{yx} = \frac{1}{k} (\varepsilon_{i+1} + \dots + \varepsilon_{i+k-r}) + \frac{1}{k}(y + x)$ , logrando la igualdad de estas dos últimas expresiones al sustituir  $d_i^x, d_{i+1}^x, d_i^y, d_{i+1}^y$  por (5.4) y (5.5).

■.

Regresemos ahora al ejemplo 5.1 y observemos que si reinsertamos una vez más el nodo  $x$  en  $\varepsilon$  la nueva abscisa de Greville que se genera coincide con  $x$  ya que:

$$\tau_2^{xx} = \frac{\varepsilon_2 + x}{2} = \frac{x + x}{2} = x$$

y la correspondiente ordenada de Boor es:

$$d_2^{xx} = \frac{\tau_2^{xx} - \tau_1^x}{\tau_2^x - \tau_1^x} d_1^x + \frac{\tau_2^{xx} - \tau_2^x}{\tau_2^x - \tau_1^x} d_2^x$$

a partir de este momento cualquier reinsertión de  $x$  no genera nuevas abscisas de Greville ni ordenada de Boor (figura 5.5) se dice entonces que  $d_2^{xx}$  es un punto en la curva B-spline.

En general para grado  $k$  la inserción repetida de un nodo  $x$  después que éste tiene multiplicidad  $k$  no ejerce ningún cambio sobre el polígono asociado B-spline y la correspondiente ordenada de Boor es un punto sobre la curva B-spline. Este hecho

es la clave del algoritmo de Boor, para presentarlo necesitaremos antes la siguiente definición.

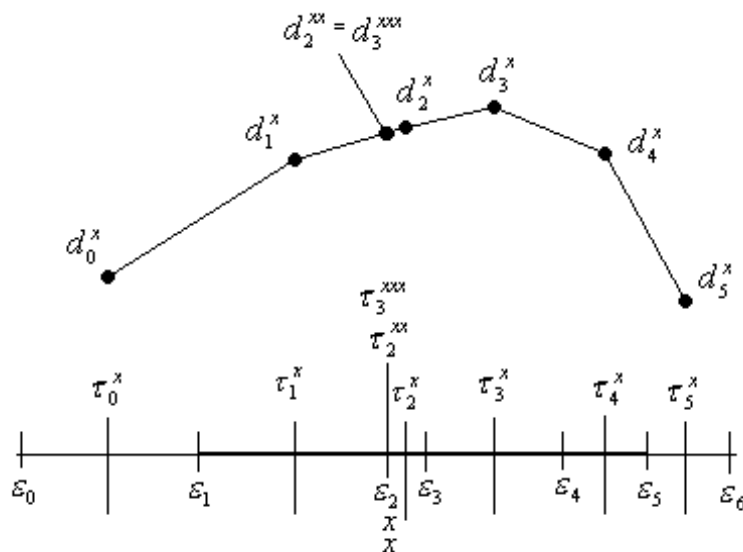


Figura 5.5: Al reinsertar 3 veces o más el nodo  $x$  el polígono B-spline queda sin cambio.

**Definición 5.2:** La abscisa de Greville que se genera al insertar  $r - veces$  un número  $x$  esta dada por

$$\tau_i^r = \frac{1}{k}(\varepsilon_i + \cdots + \varepsilon_{i+k-r-1}) + \frac{1}{k}(x + \cdots + x)$$

con  $i = I - k + r + 1, \dots, I + 1$  y  $\varepsilon_i + \cdots + \varepsilon_{i+k-r-1} = 0$  si  $i < i + k - r - 1$ .

### Algoritmo de Boor.

Si denotamos una curva B-spline de grado  $k$  con polígono de control  $P$  por  $B_k P$  y su valor en el parámetro  $x \in [\varepsilon_I, \varepsilon_{I+1}) \subset [\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{L+k-1}]$  por  $[B_k P](x)$  entonces el algoritmo de Boor se define como:

$$d_i^r(x) = \frac{\tau_i^{r-1} - \tau_i^r}{\tau_i^{r-1} - \tau_{i-1}^{r-1}} d_{i-1}^{r-1}(x) + \frac{\tau_i^r - \tau_{i-1}^{r-1}}{\tau_i^{r-1} - \tau_{i-1}^{r-1}} d_i^{r-1}(x) \quad (5.7)$$

$$= \frac{\varepsilon_{i+k-r} - x}{\varepsilon_{i+k-r} - \varepsilon_{i-1}} d_{i-1}^{r-1}(x) + \frac{x - \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_{i+k-r} - \varepsilon_{i-1}} d_i^{r-1}(x) \quad (5.8)$$

para  $r = 1, \dots, k - m$  y  $i = I - k + r + 1, \dots, I + 1$  y entonces

$$[B_k P](x) = d_{I+1}^{k-m}(x) \quad (5.9)$$

es decir  $d_{I+1}^{k-m}$  es el valor de la curva B-spline en  $x$ . En donde  $m$  denota la multiplicidad de  $x$  y  $d_i^0(x) = d_i$ .

Un importante caso especial del algoritmo de Boor se tiene si la sucesión de nodos tiene la siguiente forma:

$$0 = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{k-1} < \varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} = \dots = \varepsilon_{2k-1} = 1$$

así  $\varepsilon_0$  y  $\varepsilon_k$  tienen multiplicidad  $k$  y las abscisas de Greville para este caso están dadas por:

$$\tau_i = \frac{1}{k} \sum_{j=i}^{i+k-1} \varepsilon_j = \frac{i}{k}; \quad i = 0, \dots, k \quad (5.10)$$

Entonces para  $0 \leq t \leq 1$  y  $I = k - 1$  el algoritmo de Boor queda:

$$d_i^r(t) = \frac{\varepsilon_{i+k-r} - t}{\varepsilon_{i+k-r} - \varepsilon_{i-1}} d_{i-1}^{r-1}(t) + \frac{t - \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_{i+k-r} - \varepsilon_{i-1}} d_i^{r-1}(t)$$

para  $r = 1, \dots, k$  y  $i = r, \dots, k$  en donde  $\varepsilon_{i+k-r} = 1$ ,  $\varepsilon_{i-1} = 0$ , así esta última expresión se puede escribir como:

$$d_i^r(t) = (1 - t)d_{i-1}^{r-1}(t) + td_i^{r-1}(t) \quad (5.11)$$

¡El cual es la formula (3.11) del algoritmo de Casteljaú!<sup>3</sup>, esto muestra que el algoritmo de Casteljaú es un caso particular del de Boor.

La restricción al intervalo  $[0, 1]$  no es esencial ya que todas las construcciones son invariantes bajo transformaciones de parámetros afines. Así si dos nodos adyacentes de cualquier sucesión de nodos tienen multiplicidad  $k$  la correspondiente curva B-spline entre éstos nodos es una curva de Bézier, cuyo el polígono de control es un polígono de Bézier sobre abscisas de Greville igualmente espaciadas.

Así, si en una curva B-spline de grado  $k$  sobre un conjunto arbitrario de nodos se reinserta cada nodo de tal forma que todos tengan multiplicidad  $k$ . El polígono B-spline correspondiente a esta nueva sucesión de nodos es un polígono por piezas de Bézier de la misma curva, esto muestra que las curvas B-spline son polinomios por piezas sobre  $[\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{L+k-1}]$ .

## 5.2 Diferenciabilidad Continua de las Curvas B-spline.

Consideremos la sucesión de nodos:

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_{k-1} \\ &< \varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} = \cdots = \varepsilon_{k+r-1} \\ &< \varepsilon_{k+r} = \varepsilon_{k+r+1} = \cdots = \varepsilon_{2k+r-1} = 1 \end{aligned}$$

Así  $\varepsilon_k$  tiene multiplicidad  $r$  y por (5.11) el algoritmo de Boor está dado por:

$$d_i^r(\varepsilon_k) = (1 - \varepsilon_k)d_{i-1}^{r-1}(\varepsilon_k) + \varepsilon_k d_i^{r-1}(\varepsilon_k)$$

---

<sup>3</sup> Con el subíndice  $i$  corriendo de  $r$  a  $k$ .

para  $r = 1, \dots, k$  y  $i = r, \dots, k$ , los cuales como se menciono anteriormente son  $k - r$  niveles del algoritmo de Casteljau y así de (4.3) los dos segmentos de curva que se unen en  $\varepsilon_k$  son al menos  $k - r$  veces diferenciables.

De nuevo como se dijo antes toda la construcción del B-spline es invariante bajo transformaciones de parámetros afines y este argumento también es válido para cualquier intervalo  $[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}]$ .

Si queremos investigar que tan suave es una curva B-spline en un nodo, podemos forzar a que sus dos vecinos tengan multiplicidad  $k$  ¡sin cambiar la curva! y aplicamos el argumento anterior.

Así una curva B-spline definida por el algoritmo de Boor es (al menos) de  $C^{k-r}$  en los nodos con multiplicidad  $r$ . Y de  $C^{k-1}$  si todos los nodos son simples (mismo resultado que obtuvimos al final del capítulo 2 con las funciones B-spline).

### 5.3 El Caso Paramétrico.

Por supuesto la curva B-spline también puede ser paramétrica, todo lo que tenemos que hacer es usar las curvas funcionales B-spline (todas sobre la misma sucesión de nodos) para cada componente de la curva.

Así dados dos enteros positivos  $L$  y  $k$  una sucesión de nodos no decreciente  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^{L+2k-2}$  y un conjunto de puntos  $d_i = \begin{bmatrix} d_i^x \\ d_i^y \\ d_i^z \end{bmatrix} \in E^3$ , para  $i = 0, \dots, L + k - 1$ , si  $t \in [\varepsilon_I, \varepsilon_{I+1}] \subset [\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{L+k-1}]$  el algoritmo de Boor para la curva paramétrica está dado por:

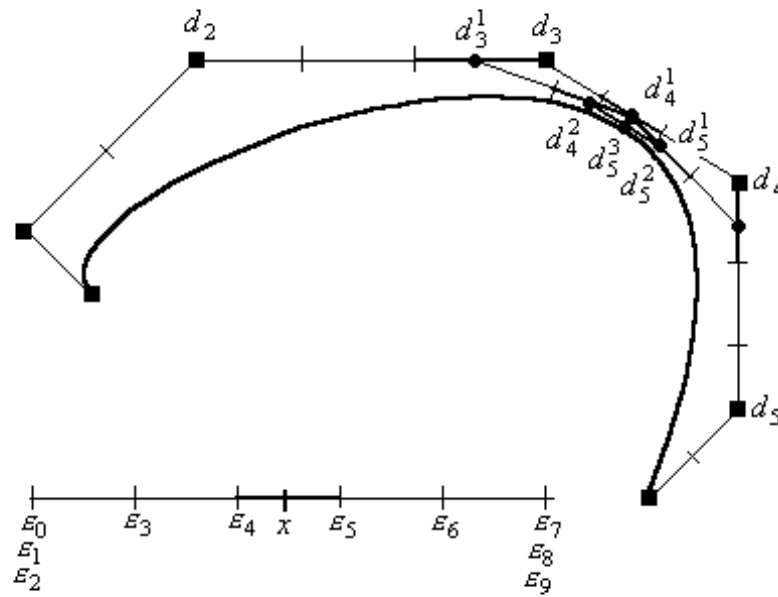


Figura 5.6: La sucesión de nodos es "dibujada" en el polígono de control de la curva paramétrica B-spline con  $k = 3$ ,  $L = 5$ . El intervalo  $[\epsilon_4, \epsilon_5]$  se pinta con línea más negra.

$$\bar{d}_{i,r} = \frac{\epsilon_{i+k-r} - t}{\epsilon_{i+k-r} - \epsilon_{i-1}} \bar{d}_{i-1,r-1}(t) + \frac{t - \epsilon_{i-1}}{\epsilon_{i+k-r} - \epsilon_{i-1}} \bar{d}_{i,r-1}(t)$$

para  $r = 1, \dots, k-m$  y  $i = I-k+r+1, \dots, I+1$ . Aquí  $m$  representa la multiplicidad de  $t$  y  $\bar{d}_{i,r}(t) = \begin{bmatrix} d_{i,r}^x(t) \\ d_{i,r}^y(t) \\ d_{i,r}^z(t) \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} d_{i,0}^x \\ d_{i,0}^y \\ d_{i,0}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_i^x \\ d_i^y \\ d_i^z \end{bmatrix}$ .

Así en el primer nivel del algoritmo de Boor (para  $r = 1$ ) se toman todas las subsucesiones de  $k + 1$  nodos que contienen el intervalo  $[u_I, u_{I+1}]$ , mapeando el valor de  $t$  sobre el polígono formado por los puntos  $d_i$  obteniendo los nuevos puntos  $d_i^1(t) =$

$$\begin{bmatrix} d_{i,1}^x(t) \\ d_{i,1}^y(t) \\ d_{i,1}^z(t) \end{bmatrix}$$
 (para  $i = I - k + 2, \dots, I + 1$ ), éste procedimiento se repite en el siguiente nivel para todas las subsecciones de  $k$  nodos que contienen  $[u_I, u_{I+1}]$  con el polígono formado por los  $d_i^1(t)$  obteniendo así los nuevo puntos  $d_i^2(t) = \begin{bmatrix} d_{i,1}^x(t) \\ d_{i,1}^y(t) \\ d_{i,1}^z(t) \end{bmatrix}$ , etc. En el último nivel se mapea los  $[u_I, u_{I+1}]$  hacia  $d_I^{k-1}(t), d_{I+1}^{k-1}(t)$  para obtener el punto  $d_{I+1}^k$  en la curva B-spline.

Geométricamente el algoritmo de Boor "dibuja" la sucesión de nodos en las rectas que forma el polígono de control en cada nivel hasta evaluar el punto  $t$ , así la subsección de  $k + 1$  nodos  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k$  es mapeada a la recta que pasa por los puntos  $d_0, d_1$  (que se denota  $d_0d_1$ ), los siguientes  $k + 1$  nodos  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}$  son mapeados a  $d_1d_2$  etc.

Por ejemplo en la figura (5.6) se muestran estos mapeos para un B-spline con  $k = 2$  y  $L = 5$ , aquí la multiplicidad del primer y último nodo es de 3, así en la recta formada por los puntos  $d_0$  y  $d_1$  solamente esta "dibujado" el intervalo  $[\varepsilon_2, \varepsilon_3]$  ya que la multiplicidad de  $\varepsilon_0$  hace que se interpole el punto  $d_0$ , lo mismo sucede con  $\varepsilon_7, d_6$  y la recta formada por  $d_6d_7$ .

En las figuras (5.7), (5.8) y(5.9) se muestran tres B-splines de grados 2, 3 y 4 respectivamente.

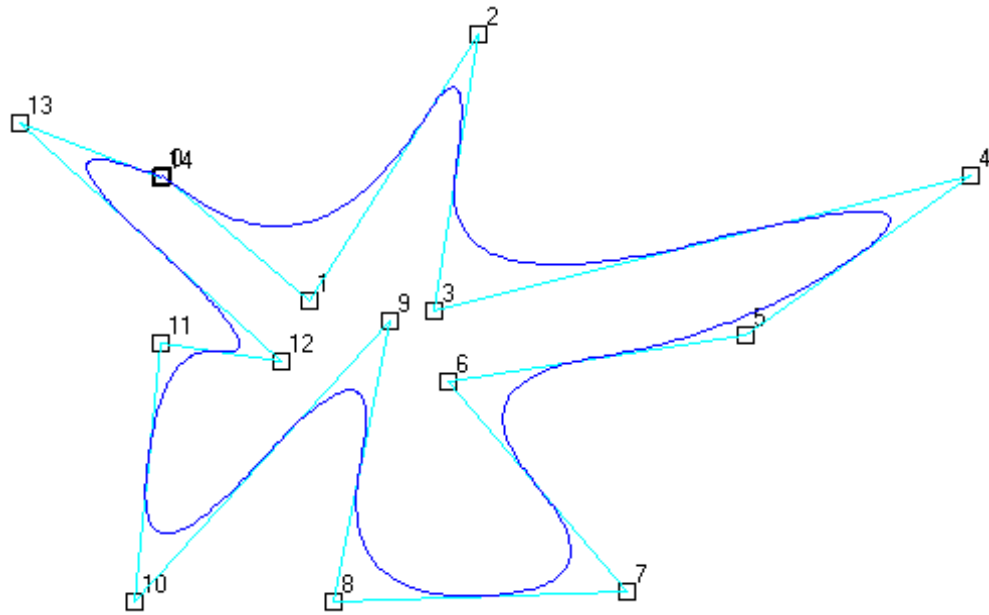


Figura 5.7: B-spline cuadrático formado por 13 secciones de curva sobre la sucesión de nodos:  $\varepsilon = (0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 10)$ .

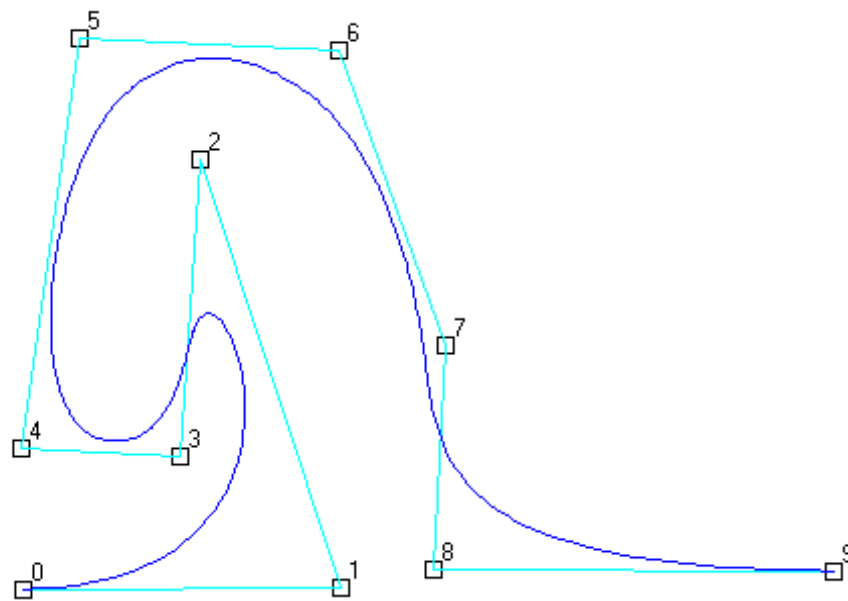


Figura 5.8: B-spline cúbico formado por 7 secciones de curvas con sobre la sucesión de nodos  $\varepsilon = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6)$ .

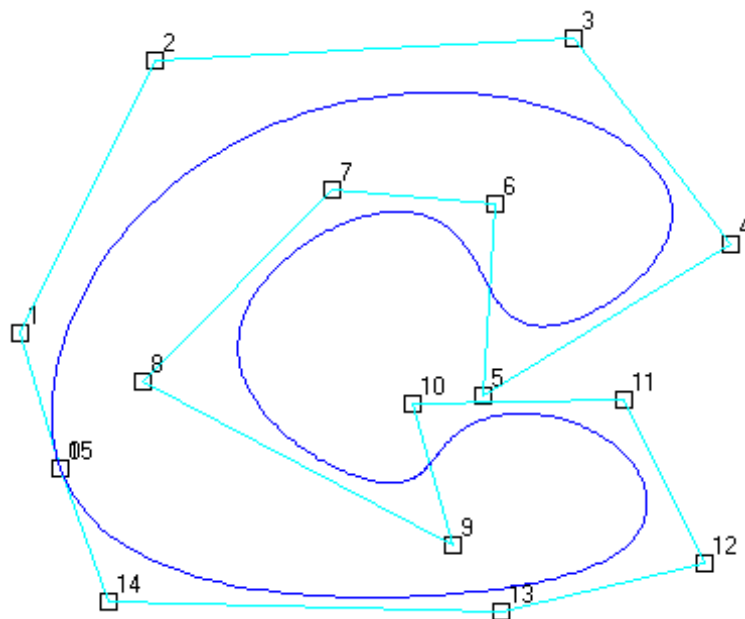


Figura 5.9: B-spline de grado 4 formado por 12 secciones de curvas sobre la sucesión de nodos  $\varepsilon = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 11, 11, 11)$

## 5.4 Inserción de Nodos Repetida.

Se puede insertar más y más nodos dentro de una sucesión de nodos a continuación estudiaremos efecto de este proceso.

Sea una curva B-spline de grado  $k$  definida sobre la sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^{L+2k-2}$  con polígono de control  $P$ . Si  $P^r$  denota el polígono  $P$  formado después de realizar  $r$  inserciones de nodos distintos en  $[\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{L+k-1}]$ , entonces a medida de que se inserte más y más nodos (volviéndose más denso el intervalo dominio  $[\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{L+k-1}]$ ) la sucesión de polígonos formada por estas reinserciones converge a la curva B-spline definida por el polígono  $P$ .

Es decir si:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P^r = [B_k P]$$

en donde  $[B_k P]$  denota a la curva B-spline de grado  $k$  con polígono de control  $k$ .

De la definición de la abscisa de Greville y del algoritmo de Boor sabemos que la curva B-spline sobre un cierto intervalo  $[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}]$  depende solamente de  $k + 1$  puntos de control,  $d_i, \dots, d_{i+k}$ . Así para  $x \in [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}]$

$$\min(d_i, \dots, d_{i+k}) \leq [B_k P](x) \leq \max(d_i, \dots, d_{i+k})$$

por la propiedad de envoltura convexa de la curva de Bézier.

Así debemos probar que para cualquier  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar una  $r$  tal que:

$$|P^r(x) - [B_k P](x)| \leq \varepsilon$$

Ya que  $P^r$  es continua (función lineal por pedazos continua) para cualquier  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $r$  y  $\delta > 0$  tal que si:

$$|\tau_{j+1}^r - \tau_j^r| \leq \delta$$

(en donde  $\tau_j$  representa la  $j$ -ésima abscisa de Greville) entonces:

$$|P^r(\tau_{j+1}^r) - P^r(\tau_j^r)| \leq \varepsilon,$$

Así

$$\max [P^r(\tau_j^r), \dots, P^r(\tau_{j+k}^r)] - \min [P^r(\tau_j^r), \dots, P^r(\tau_{j+k}^r)] \leq k\varepsilon$$

para aquellas  $j$  las cuales  $\tau_j$  tengan como sumandos los valores de  $\varepsilon_i$  y  $\varepsilon_{i+1}$ .

Por otro lado notemos que:

$$\min(d_j^r(t)) \leq [B_k P](t) \leq \max(d_j^r(t))$$

Así,

$$|[B_k P](t) - P_l^r| \leq k\varepsilon; \quad l \in [j, \dots, j+k],$$

lo cual finalmente implica que

$$|[B_k P](t) - P^r(t)| \leq k\varepsilon$$

■

Esto muestra que la inserción repetida de nodos lleva a la obtención de la curva B-spline. Así, si se inserta una cantidad suficiente de nodos a la sucesión el polígono de control resultante puede ser arbitrariamente cercano a la curva. Y entonces en vez de graficar la curva directamente se puede graficar el polígono refinado insertando más nodos donde la curva sea más pronunciada y pocos en donde es lineal.

## 5.5 El Blossom B-spline.

Recordemos que en la sección 3.3 de capítulo 3 se discutió la construcción de la función blossom como una forma conveniente para evaluar una curva de Bézier, éste mismo principio se puede aplicar a curvas B-spline.

**Ejemplo 5.3.** Sea  $k = L = 3$  entonces tomemos una sucesión de nodos no decrecientes  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^7$ . Ahora supongamos que en el  $i$  -ésimo nivel del algoritmo de Boor evaluamos en un punto diferente  $t_i \in [\varepsilon_4, \varepsilon_5]$  (para  $i = 1, 2, 3$ ), ya que los únicos puntos de Boor involucrados en éste proceso son  $d_2, \dots, d_5$  resulta la siguiente tabla (figura 5.10):

$$\begin{array}{rcl}
 d_2 & & \\
 d_3 & d_3^1[t_1] & \\
 d_4 & d_4^1[t_1] & d_4^2[t_1, t_2] \\
 d_5 & d_5^1[t_1] & d_5^2[t_1, t_2] & d_5^3[t_1, t_2, t_3]
 \end{array} \tag{5.12}$$

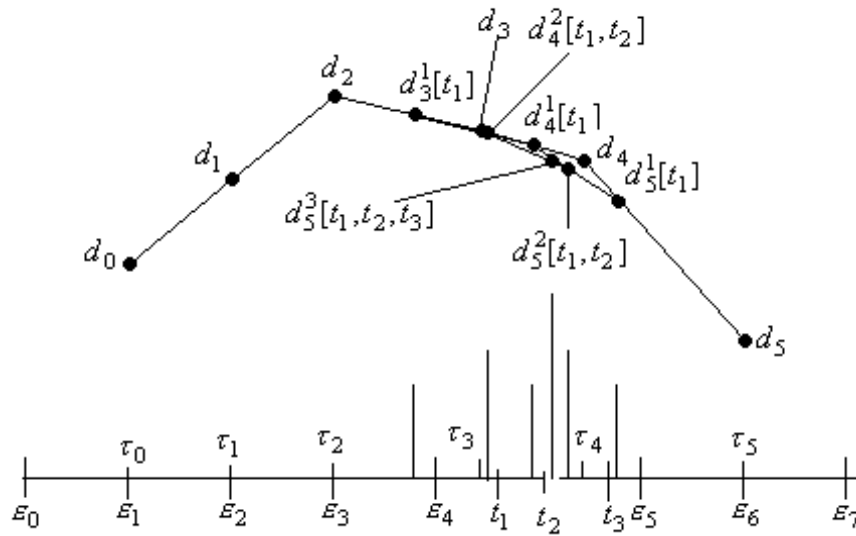


Figura 5.10: Función blossom B-spline para  $k = L = 3$  y una sucesión de nodos  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_0^7$ .

Aquí si todos los  $t_i$  coinciden obtenemos el algoritmo de Boor.

Se usará la notación  $d_4[t_1, t_2, t_3]$  para denotar el punto  $d_5^3[t_1, t_2, t_3]$  con el cual además se puede indicar que se maneja el intervalo  $[\varepsilon_4, \varepsilon_5]$ .

**Definición 5.3.** Definimos blossom B-spline denotado por  $d_I[t_1, \dots, t_k]$  como la función obtenida al aplicar el algoritmo de Boor sobre intervalo  $[\varepsilon_I, \varepsilon_{I+1}]$  con puntos de control  $d_{I-k+1}, \dots, d_{I+1}$  usando diferentes argumentos  $t_i$  en cada  $i$ -ésimo nivel (para  $i = 1, \dots, k$ ) del algoritmo.

Ahora observemos que si en el ejemplo 5.3  $[t_1, t_2, t_3] = [\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4]$  (5.12) tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{c}
 d_2 \\
 d_3 \quad d_2 \\
 d_4 \quad \bullet \quad d_2 \\
 d_5 \quad \bullet \quad \bullet \quad d_2 = d_4 [\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4]
 \end{array}$$

Los símbolos  $\bullet$  indican que estos puntos no son calculados ya que sus valores no contribuyen al resultado final.

De forma similar si ahora  $[t_1, t_2, t_3] = d_4 [\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5]$  (5.12) es igual a:

$$\begin{array}{c}
 d_2 \\
 d_3 \quad \bullet \\
 d_4 \quad d_3 \quad \bullet \\
 d_5 \quad \bullet \quad d_3 \quad d_3 = d_4 [\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5]
 \end{array}$$

y es decir de nuevo recuperamos un punto de control. Continuando de esta manera podemos deducir que  $d_4 = d_4 [\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]$  y  $d_5 = d_4 [\varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7]$  (figura 5.11) este proceso de recuperación de puntos de control es similar a la función blossom para una curva de Bézier.

En general si un segmento de curva de una curva B-spline definida sobre  $[\varepsilon_I, \varepsilon_{I+1}]$  con  $k + 1$  tiene como puntos de control  $d_{I-k+1}, \dots, d_{I+1}$ . Entonces estos están dados por:  $d_{I-k+1+i} = d_I[\varepsilon_{I-k+1+i}, \dots, \varepsilon_{I+i}]$ ;  $i = 0, \dots, k$ .

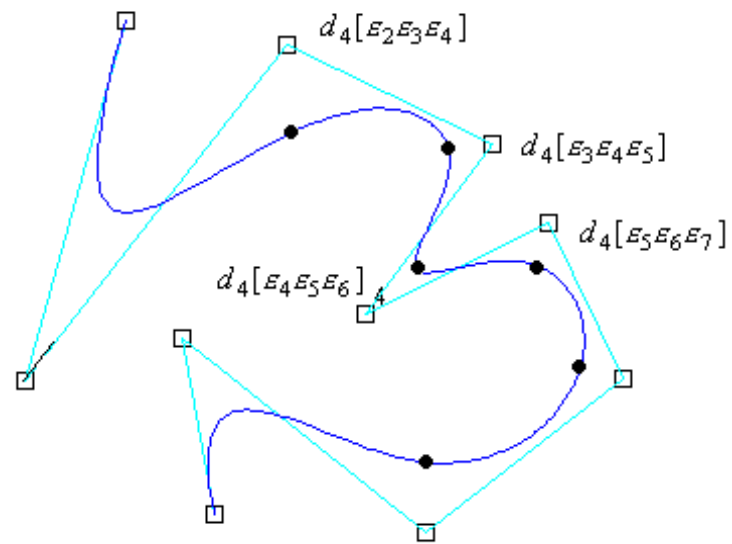


Figura 5.11: Recuperación de los puntos de Boor para un B-spline cúbico por medio de la función blossom B-spline.