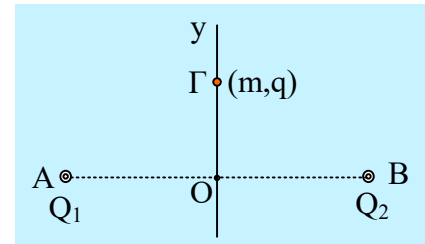


Μια ταλάντωση ή μια AAT;

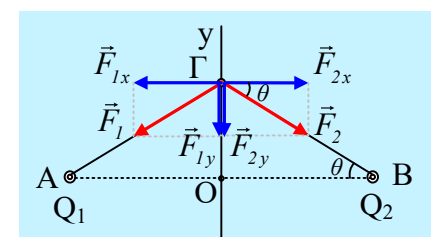
Δύο σημειακά ίσα αρνητικά φορτία $Q_1=Q_2=Q=-1\mu\text{C}$ είναι στερεωμένα στα σημεία A και B, όπου $(AB)=2a=8\text{cm}$. Ένα μεταλλικό σφαιρίδιο μάζας $m=1\text{g}$ το οποίο φέρει φορτίο $q=+1\text{nC}$, αφήνεται ελεύθερο στο σημείο Γ, πάνω στην μεσοκάθετο Ογ του τμήματος AB, σε απόσταση $(ΟΓ)=x_1=3\text{cm}$, όπως στο σχήμα. Αν το πείραμα γίνεται εκτός πεδίου βαρύτητας και $k=9\cdot 10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2$:



- Να αποδείξετε ότι η σφαίρα θα κινηθεί πάνω στην μεσοκάθετο της AB, υπολογίζοντας και την αρχική της επιτάχυνση.
- Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει η σφαίρα (την ταχύτητα αυτή την αποκτά σε χρόνο $t_1=0,12\text{s}$).
- Υποστηρίζεται ότι η παραπάνω κίνηση της σφαίρας είναι AAT. Να εξηγήσετε γιατί η άποψη αυτή δεν είναι σωστή.
- Να αποδείξετε ότι αν το σημείο Γ πλησιάσει αρκετά το O, τότε η κίνηση μπορεί να θεωρηθεί AAT, με καλή προσέγγιση.
- Να υπολογιστεί το % σφάλμα στον υπολογισμό της μέγιστης ταχύτητας που αποκτά η σφαίρα και στον χρόνο απόκτησής της, αν η αρχική κίνηση θεωρηθεί AAT.

Απάντηση:

- Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις F_1 και F_2 οι οποίες ασκούνται στο σφαιρίδιο από τα δύο φορτία στα A και B. Οι δυνάμεις αυτές έχουν ίσα μέτρα, αφού το σημείο Γ ισαπέχει από τα A και B:



$$F_1 = F_2 = k \frac{|Q|q}{r^2}$$

Όπου $r = \sqrt{a^2 + x_1^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ cm} = 5\text{cm}$. Αλλά τότε στην διεύθυνση x:

$$\Sigma F_x = F_{2x} - F_{1x} = F_2 \sin\theta - F_1 \sin\theta = 0$$

Ενώ στην διεύθυνση της μεσοκαθέτου:

$$\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \eta\mu\theta + F_2 \eta\mu\theta = 2k \frac{|Q|q}{r^2} \eta\mu\theta = 2k \frac{|Q|q}{r^2} \cdot \frac{x_1}{r} \quad (1)$$

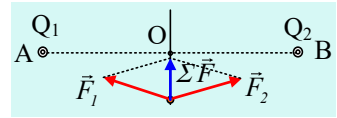
Αλλά αν η συνισταμένη δύναμη έχει την διεύθυνση της μεσοκαθέτου, με φορά προς το O, την

ίδια κατεύθυνση θα έχει και η επιτάχυνση, με μέτρο:

$$\Sigma F_y = m a_r \rightarrow a_r = 2k \frac{|Q|q}{mr^3} \cdot x_1 \rightarrow$$

$$a_r = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-6} \cdot 10^{-9}}{10^{-3} \cdot 5^3 \cdot 10^{-6}} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2 = 4,32 \text{ m/s}^2.$$

- ii) Το σφαιρίδιο επιταχύνεται μέχρι να φτάσει στο μέσον Ο του τμήματος ΑΒ, όπου και αποκτά την μέγιστη ταχύτητά του, αφού μετά κινούμενο προς τα κάτω θα δεχτεί δυνάμεις όπως στο σχήμα και θα επιβραδυνθεί. Εφαρμόζουμε τώρα την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σφαιρίδιο μεταξύ των θέσεων Γ και Ο και έχουμε:



$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$

$$0 + 2k \frac{Qq}{r} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 + 2k \frac{Qq}{a} \rightarrow$$

$$v_{max} = \sqrt{4k \frac{Qq}{m} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{(-10^{-6}) \cdot 10^{-9}}{10^{-3}} \cdot \left(\frac{1}{0,05} - \frac{1}{0,04} \right)} \text{ m/s}$$

$$v_{max} = \sqrt{0,18} \text{ m/s} \approx 0,42 \text{ m/s}$$

- iii) Σε μια τυχαία θέση, που το σφαιρίδιο απέχει κατά x από την θέση ισορροπίας Ο, θα έχουμε με βάση την εξίσωση (1) και λαμβάνοντας θετική την αρχική απομάκρυνση (προς τα πάνω):

$$\Sigma F = -2k \frac{|Q|q}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -2k \frac{|Q|q}{(\sqrt{a^2 + x^2})^3} \cdot x \quad (2)$$

Βλέπουμε ότι η τελευταία εξίσωση (2) δεν είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$, αφού και στον παρονομαστή του κλάσματος περιέχεται επίσης η απομάκρυνση x. Συνεπώς η κίνηση ΔΕΝ είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

- iv) Αν τώρα η αρχική απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας δεν είναι 3cm, αλλά είναι πολύ μικρότερη από την απόσταση $a=4\text{cm}$, π.χ. είναι $x=0,1\text{a}$, τότε η ρίζα που εμφανίζεται στην εξίσωση (2) γίνεται:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{4^2 + 0,4^2} \text{ cm} = \sqrt{16,16} \text{ cm} = 4,02 \text{ cm!} \approx a!$$

Με άλλα λόγια η απόσταση r του σφαιριδίου από τα δυο φορτία είναι σχεδόν σταθερή και ίση με a και η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\Sigma F = -2k \frac{|Q|q}{a^3} \cdot x = -Dx$$

Συνεπώς η κίνηση είναι ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς:

$$D = 2k \frac{|Q|q}{\alpha^3} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-6} \cdot 10^{-9}}{4^3 \cdot 10^{-6}} \text{ N/m} = 0,28 \text{ N/m}$$

ν) Με βάση τα παραπάνω, αν η κίνηση θεωρηθεί ΑΑΤ θα έχει γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0,28}{10^{-3}}} \text{ rad/s} = \sqrt{280} \text{ rad/s} = 16,8 \text{ rad/s}$$

Οπότε με πλάτος $A = x_1 = 3\text{cm}$, το σφαιρίδιο θα αποκτούσε μέγιστη ταχύτητα μέτρου:

$$v_{\max} = \omega A = 16,8 \cdot 0,03 \text{ m/s} = 0,5 \text{ m/s}$$

Ενώ παραπάνω υπολογίσαμε $v_{\max}=0,42 \text{ m/s}$, συνεπώς το % σφάλμα που θα κάναμε, θα ήταν ίσο:

$$\sigma_1 = \frac{|v_{\max} - v_{\max}|}{v_{\max}} 100\% = \frac{0,5 - 0,43}{0,43} 100\% = 16,3\%$$

Ενώ θα χρειαζόταν χρόνο ίσο με το 1/4 της περιόδου για να αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητα:

$$\tau_1 = \frac{1}{4} T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{3,14}{2 \cdot 16,8} \text{ s} = 0,09 \text{ s}$$

Συνεπώς το % σφάλμα στο χρόνο απόκτησης της μέγιστης ταχύτητας, θα ήταν:

$$\sigma_2 = \frac{|t_1 - \tau_1|}{t_1} 100\% = \frac{0,12 - 0,09}{0,12} 100\% = 25\%$$

dmargaris@gmail.com