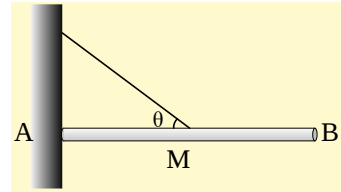


Μια ισορροπία και... μισή.

Μια ομογενής λεπτή δοκός AB, μήκους L και βάρους w, ισορροπεί σε οριζόντια θέση όπως στο σχήμα, στηριζόμενη σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ είναι δεμένη με νήμα στο μέσον της M, νήμα το οποίο σχηματίζει γωνία $\theta=45^\circ$ με τη ράβδο.

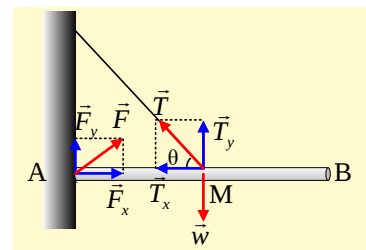


- Να εξετάσετε αν ο τοίχος μπορεί να είναι λείος ή απαιτείται να είναι τραχύς για να ασκηθεί στη ράβδο δύναμη τριβής.
- Να μελετήσετε την ισορροπία του τμήματος MB της ράβδου, αντιμετωπίζοντάς το σαν ένα ανεξάρτητο στερεό σώμα, το οποίο δεν δένεται με το νήμα.

Απάντηση:

- Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όπου $\vec{F}$ η δύναμη από τον τοίχο. Από την ισορροπία της ράβδου παίρνουμε:

$$\Sigma \vec{F}=0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau=0 \quad (2)$$



όπου η εξίσωση (2) εφαρμόζεται ως προς οποιοδήποτε σημείο. Ας την εφαρμόσουμε ως προς το σημείο στήριξης A, θεωρώντας τις αριστερόστροφες ροπές θετικές:

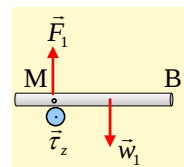
$$T_y \cdot \frac{L}{2} - w \cdot \frac{L}{2} = 0 \rightarrow T_y = w \quad (3)$$

Οπότε επιστρέφοντας στην εξίσωση (1) για την κατακόρυφη διεύθυνση παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_y + T_y - w = 0 \rightarrow F_y = 0$$

Αλλά αν η δύναμη από τον κατακόρυφο τοίχο, είναι κάθετη στον τοίχο, (η F_x) τότε δεν απαιτείται κάποια δύναμη παράλληλη στον τοίχο, όπως μια τριβή και η δοκός ισορροπεί είτε ο τοίχος είναι λείος, είτε όχι.

- Στο σχήμα φαίνεται μόνο το τμήμα της δοκού που μας ενδιαφέρει, το οποίο έχει βάρος $\frac{1}{2} w$, αφού πρόκειται για ομογενή δοκό. Αλλά τότε από τη συνθήκη ισορροπίας της, έχουμε τις εξισώσεις:



$$\Sigma \vec{F}=0 \quad (1\alpha) \quad \text{και} \quad \Sigma \tau=0 \quad (2\alpha)$$

Από την (1α) προκύπτει ότι το τμήμα AM ασκεί στο άλλο μισό MB, κατακόρυφη δύναμη, όπως στο σχήμα, με μέτρο $F_1 = w_1 = \frac{1}{2} w$. Ενώ για να ισχύει και η εξίσωση (2α), ως προς το M, απαιτείται να υπάρχει και κάποια άλλη ροπή, εκτός αυτής του βάρους:

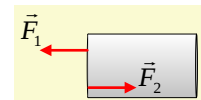
$$\tau_w + \tau_{F_1} + \tau_z = 0 \rightarrow \tau_z = -\tau_w = +\frac{w}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{wL}{8}$$

Η ροπή αυτή είναι πέρα από τις ροπές των δυνάμεων που έχουν σχεδιαστεί και είναι ροπή ζεύγους ή ζευγών δυνάμεων που ασκούνται στην επιφάνεια της τομής του τμήματος MB. Με άλλα λόγια αν κόβαμε το τμήμα MB, για να ισορροπεί αυτό σε οριζόντια θέση, θα πρέπει στην επιφάνεια της τομής να ασκήσουμε:

- 1) Μια κατακόρυφη δύναμη ίση με το $\frac{1}{2} w$.
- 2) μια ροπή αριστερόστροφη που να εξουδετερώνει τη ροπή του βάρους, ως προς το σημείο M.

Σχόλιο για καθηγητές:

Αν πάρουμε την τομή της ράβδου στο σημείο M, τότε το τμήμα MB δέχεται ζεύγη δυνάμεων, όπως στο σχήμα, όπου η δύναμη $\vec{F}_1$ είναι δύναμη εφελκυσμού (τράβηγμα προς τα αριστερά, αφού η ροπή του βάρους του τμήματος MB, τείνει να λυγίσει τη δοκό και να απομακρύνει μεταξύ τους τα σημεία δεξιά και αριστερά της τομής, τα οποία βρίσκονται από το μέσον της τομής και πάνω) και μια δύναμη θλίψης (συμπίεσης) $\vec{F}_2$, ίσου μέτρου προς τα δεξιά (αφού τα σημεία κάτω από το μέσον συμπιέζονται). Προφανώς δεν έχουμε μόνο αυτό το ζεύγος δυνάμεων, αλλά πολλά ζεύγη, η συνολική ροπή των οποίων είναι η ροπή που υπολογίσαμε παραπάνω...



dmargaris@gmail.com