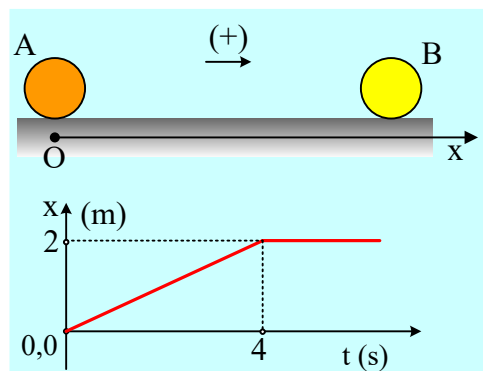


Μια ακόμη κρούση δύο σφαιρών.

Δύο σφαίρες, με ίσες ακτίνες, κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να στρέφονται. Η σφαίρα Α, μάζας $m_1=2\text{kg}$ τη στιγμή $t=0$, περνά από μια θέση Ο, την οποία θεωρούμε ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα ($x=0$) και στο διάγραμμα δίνεται η θέση της σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου τη στιγμή $t_1=4\text{s}$, οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά.



- i) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας, που οφείλεται στην κρούση.
- ii) Αν η κρούση είναι ελαστική να υπολογιστεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κάθε σφαίρας, λόγω κρούσης.
- iii) Αν η Β σφαίρα έχει μάζα $m_2=0,4\text{kg}$:
 - α) Ποια η θέση της Β σφαίρας τη στιγμή $t=0$.
 - β) Να γίνει η γραφική παράσταση της θέσης της Β σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη στιγμή $t_2=10\text{s}$.
- iv) Αν η απόσταση των δυο σφαιρών τη στιγμή $t=0$ είναι $d=3\text{m}$, να υπολογιστεί η μάζα της Β σφαίρας.

Απάντηση:

- i) Με βάση το διάγραμμα που μας δίνεται, συμπεραίνουμε ότι η Α σφαίρα κινείται προς την θετική κατεύθυνση, μέχρι τη στιγμή $t_1=4\text{s}$, με σταθερή ταχύτητα:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1}{t_1} = \frac{2\text{m}}{4\text{s}} = 0,5 \text{ m/s}$$

Ενώ μηδενίζεται η ταχύτητά της μετά την κρούση. Συνεπώς για την μεταβολή της ορμής της θα έχουμε:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \rightarrow \Delta p_1 = 0 - m v_1 = -2 \cdot 0,5 \text{ kgm/s} = -1 \text{ kgm/s}$$

Αλλά η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή στη διάρκεια της κρούσης, συνεπώς η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι μηδενική συνεπώς:

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \rightarrow \Delta \vec{p}_2 = -\Delta \vec{p}_1 = +1 \text{ kgm/s}$$

- ii) Αν η κρούση των δύο σφαιρών είναι ελαστική, τότε η κινητική ενέργεια πριν και μετά την

κρούση παραμένει η ίδια, συνεπώς η μεταβολή της είναι μηδενική, οπότε:

$$\Delta K_1 = K'_1 - K_1 = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}2 \cdot 0,5^2 = -0,25J \text{ και}$$

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 = 0 \rightarrow \Delta K_2 = -\Delta K_1 = +0,25J$$

iii) Για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κεντρική ελαστική κρούση τους, ισχύουν οι εξισώσεις:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (1)$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (2)$$

Με αντικατάσταση των τιμών στο S.I. (για ευκολία...) στην (1) παίρνουμε:

$$0 = \frac{2 - 0,4}{2 + 0,4} 0,5 + \frac{2 \cdot 0,4}{2 + 0,4} v_2 \rightarrow v_2 = -1 \text{ m/s}$$

α) Η παραπάνω ταχύτητα συνδέεται με την μετατόπιση της Β σφαίρας και με δεδομένο ότι τη χρονική στιγμή t_1 φτάνει στη θέση $x_1=4\text{m}$, θα έχουμε:

$$v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_{02}}{t_1} \rightarrow$$

$$x_{02} = x_1 - v_2 t_1 = 2\text{m} - (-1) \cdot 4\text{m} = 6\text{m}$$

β) Η ταχύτητα της σφαίρας Β, μετά την κρούση, υπολογίζεται από την εξίσωση (2):

$$v_2' = \frac{2 \cdot 2}{2 + 0,4} \cdot 0,5 \text{ m/s} + \frac{0,4 - 2}{2 + 0,4} (-1) \text{ m/s} = 1,5 \text{ m/s}$$

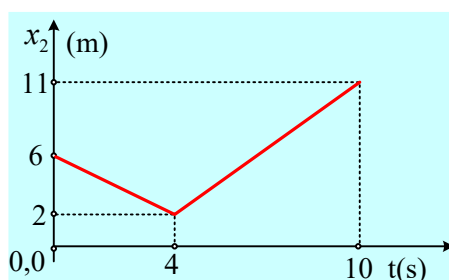
Η εξίσωση θέσης της Β σφαίρας μετά την κρούση, για $4\text{s} < t \leq 10\text{s}$ είναι:

$$x_2 = x_1 + v_2'(t - t_1) = 2 + 1,5(t - 4) = -4 + 1,5t \quad (\text{S.I.})$$

Όπου τη στιγμή 10s το σώμα φτάνει στη θέση:

$$x_2 = -4\text{m} + 1,5 \cdot 10\text{m} = 11\text{m}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι δυο κινήσεις, πριν και μετά την κρούση, είναι ευθύγραμμες και ομαλές, σχεδιάζουμε τη ζητούμενη γραφική παράσταση, παίρνοντας το διάγραμμα.



iv) Αν η αρχική απόσταση των δύο σφαιρών είναι $d=3m$, αφού η Α σφαίρα βρίσκεται στη θέση $x=0$, τότε η αρχική θέση της Β είναι $x_{0B} = 3m$, οπότε για την ταχύτητά της v_2 έχουμε:

$$v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_{0B}}{t_1} = \frac{2m - 3m}{4s} = -0,25m/s$$

Έτσι με αντικατάσταση στο (S.I.) στην εξίσωση (1), θα πάρουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \rightarrow (S.I.)$$

$$0 = \frac{2 - m_2}{2 + m_2} 0,5 + \frac{2m_2}{2 + m_2} (-0,25) \rightarrow$$

$$(2 - m_2) 0,5 + 2m_2 (-0,25) = 0 \rightarrow$$

$$1 - 0,5m_2 - 0,5m_2 = 0 \rightarrow$$

$$m_2 = 1kg$$

dmargaris@gmail.com