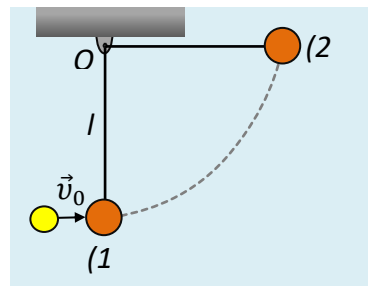


Ελαστική κρούση, ορμή και στροφορμή.

Μια σφαίρα A, μάζας $M=3\text{kg}$ ηρεμεί στη θέση (1), δεμένη στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου μη ελαστικού νήματος μήκους $l=0,8\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί σε σταθερό σημείο O. Σε μια στιγμή μια δεύτερη σφαίρα B, μάζας $m=1\text{kg}$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα A, έχοντας οριζόντια ταχύτητα u_0 ελάχιστα πριν την κρούση. Μετά την κρούση, η A σφαίρα φτάνει με μηδενική ταχύτητα στη θέση (2), με το νήμα οριζόντιο.

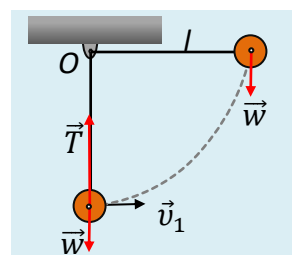


- Να υπολογισθεί η ορμή και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της A σφαίρας, ελάχιστα μετά την κρούση στη θέση (1), καθώς και στη θέση (2).
- Τι ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας B, μεταφέρεται στην σφαίρα A κατά την κρούση;
- Να υπολογιστεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας A, ως προς το σημείο O, στη θέση (3) όπου απέχει κατακόρυφα κατά $h=0,6\text{m}$ από τη θέση (1), κατά την άνοδό της.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

- Έστω $\vec{v}_1$ η ταχύτητα που αποκτά η A σφαίρα μετά την κρούση, στη θέση (1). Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την αρχική θέση (1) ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ των θέσεων (1) και (2).

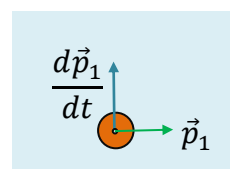


$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} M v_1^2 + 0 = 0 + M g l \rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,8} \text{m/s} = 4 \text{m/s}$$

Συνεπώς στη θέση (1) έχει ορμή ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη, εδώ την κεντρομόλο (συνισταμένη τάσης και βάρους), είναι διάνυσμα



κατακόρυφο με κατεύθυνση προς το Ο, όπως στο διπλανό σχήμα. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$p_1 = Mv_1 = 3 \cdot 4 \text{ kgm/s} = 12 \text{ kgm/s}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \Sigma F = M \frac{v_1^2}{l} = 3 \cdot \frac{4^2}{0,8} \text{ kgm/s}^2 = 60 \text{ kgm/s}^2.$$

Στη θέση (2) προφανώς η ορμή είναι μηδενική, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είναι ίσος με το βάρος της σφαίρας, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$\frac{dp_{1,2}}{dt} = \Sigma F = Mg = 3 \cdot 10 \text{ kgm/s}^2 = 30 \text{ kgm/s}^2.$$

ii) Για την ταχύτητα που αποκτά η Α σφαίρα μετά την κρούση, ισχύει:

$$v_1 = \frac{2m}{m+M} v_0 \rightarrow v_0 = \frac{m+M}{2m} v_1 = \frac{1+3}{2 \cdot 1} 4 \text{ m/s} = 8 \text{ m/s}$$

Για το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται, ισχύει:

$$\pi = \frac{K_{1,A}}{K_{0,B}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} M v_1^2}{\frac{1}{2} m v_0^2} \cdot 100\% = \frac{3 \cdot 4^2}{1 \cdot 8^2} \cdot 100\% = 75\%$$

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε πάρει τη σφαίρα Α στη θέση (3), όπου το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη. Παίρνουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων (1), όπου $U=0$ και (3):

$$K_1 + U_1 = K_3 + U_3 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} M v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} M v_1'^2 + Mgh \rightarrow$$

$$v_1' = \sqrt{v_1^2 - 2gh} = \sqrt{4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 0,6} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s}$$

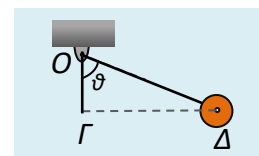
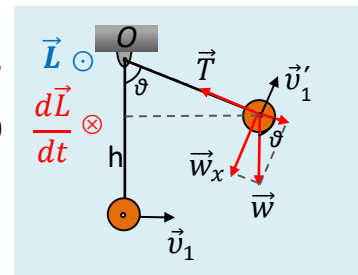
Η στροφορμή της σφαίρας ως προς το Ο, είναι διάνυσμα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τον αναγνώστη (βλέπε σχήμα), με μέτρο:

$$L = M v_1' l = 3 \cdot 2 \cdot 0,8 \text{ kg m}^2/\text{s} = 4,8 \text{ kg m}^2/\text{s}.$$

Αντίθετη κατεύθυνση, με τη στροφορμή, έχει το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής, με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = w_x \cdot l = Mg \cdot \eta \mu \theta \cdot l \quad (1)$$

Όπου για τη γωνία θ, έχουμε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΔ:



$$\cos\theta = \frac{(OG)}{(OD)} = \frac{0,2}{0,8} = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Και με αντικατάσταση στην (1):

$$\frac{dL}{dt} = 3 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot 0,8 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = 6\sqrt{15} \text{ kgm}^2/\text{s}^2.$$

dmargaris@gmail.com