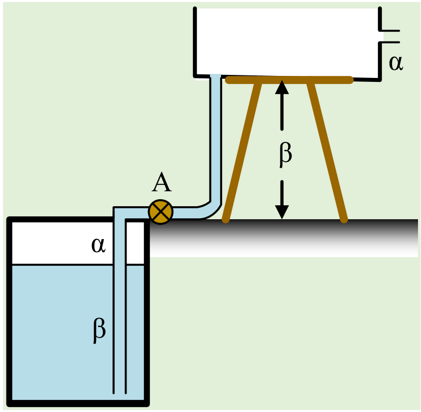
Με μια αντλία γεμίζουμε ένα ντεπόζιτο



Ένα ορθογώνιο ντεπόζιτο με βάση $S=1m^2$ στηρίζεται σε βάση ευρισκόμενο σε ύψος β=3m από το έδαφος και πρόκειται να το γεμίσουμε με νερό, με τη βοήθεια μιας αντλίας, η οποία παίρνει νερό από δεξαμενή, όπως στο σχήμα. Η άντληση θα γίνει με τη βοήθεια σωλήνα σταθερής διατομής $A_1=2cm^2$, ο οποίος βυθίζεται κατά β στο νερό, ενώ η επιφάνεια του νερού στη δεξαμενή βρίσκεται κατά α=1m, κάτω από την επιφάνεια του εδάφους. Αν η παροχή είναι σταθερή και ίση με 0,4L/s, ενώ το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό πυκνότητας $\rho=1.000kg/m^3$ και $g=10m/s^2$, να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα με την οποία φθάνει το νερό στο ντεπόζιτο καθώς και η πίεση στην έξοδο της αντλίας, μόλις σταθεροποιηθεί η ροή.

ii) Η αρχική ισχύ της αντλίας.

iii) Αν για να αποφύγουμε την υπερχείλιση του ντεπόζιτου έχουμε συνδέσει σωλήνα σε ύψος α, από όπου το νερό εκρέει, να αποδείξετε ότι η ισχύς της αντλίας δεν παραμένει σταθερή. Να κάνετε στη συνέχεια τη γραφική παράσταση της ισχύος της αντλίας, σε συνάρτηση με το χρόνο από 0-50min.

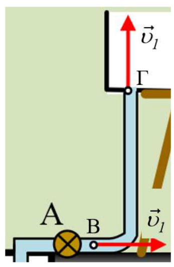
iv) Αν χρησιμοποιούσαμε διαφορετικό σωλήνα με διατομή $A_2=4cm^2$, ενώ είχαμε ξανά την ίδια παροχή, ποια θα ήταν η τελική ισχύς της αντλίας και η τελική πίεση στην έξοδο της αντλίας.

Δίνεται ότι η δεξαμενή επικοινωνεί με την ατμόσφαιρα, με αποτέλεσμα η πίεση στην επιφάνεια του νερού να είναι ίση με την ατμοσφαιρική, ενώ ο σωλήνας εκροής προς αποφυγή της υπερχείλισης, έχει ικανή διατομή για την εκροή του νερού και της σταθεροποίησης της στάθμης του νερού στο δοχείο.

Απάντηση:

i) Από την παροχή του σωλήνα, παίρνουμε:

$$\Pi = A_1\upsilon_1 \to \upsilon_1 = \frac{\Pi}{A_1} = \frac{0,4\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-4}} m/s = 2m/s$$



Αφού ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή, η ταχύτητα ροής διατηρεί σταθερό μέτρο σε όλο το μήκος του, άρα και ίδια ταχύτητα έχουμε και στην είσοδο στο ντεπόζιτο (σημείο Γ) και στην έξοδο της αντλίας (σημείο Β). Εφαρμόζουμε τώρα την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Β και Γ και παίρνουμε:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_\Gamma + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \to$$

$$p_B = p_{\alpha\tau} + \rho g\beta = 10^5 Pa + 1.000\cdot 10\cdot 3 Pa = 1,3\cdot 10^5 Pa$$

ii) Η αντλία παρέχει ενέργεια στο νερό για την μετάβασή του από την επιφάνεια της δεξαμενής, σε βάθος α=1m, μέχρι να φτάσει σε ύψος h=β, αυξάνοντας έτσι την δυναμική του ενέργεια, ενώ ταυτόχρονα αυξάνει και την κινητική του ενέργεια κατά $dK=\frac{1}{2}dm\cdot\upsilon_1^2$. Προφανώς το πόσο βυθίζεται ο σωλήνας στο νερό της δεξαμενής δεν παίζει κάποιο ρόλο! Έτσι η ισχύς της αντλίας θα είναι ίση:

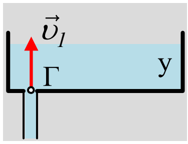
$$P_a=\frac{dW}{dt}=\frac{dK}{dt}+\frac{dU}{dt}=\frac{\frac{1}{2}dm\cdot\upsilon^2}{dt}+\frac{dm\cdot gh}{dt}\rightarrow$$

$$P_a=\frac{\frac{1}{2}\rho dV\cdot\upsilon^2}{dt}+\frac{\rho dV\cdot gh}{dt}=\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)\cdot\frac{dV}{dt}+\rho gh\cdot\frac{dV}{dt}\quad(1)$$

$$P_a=\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2+\rho g\left(\alpha+\beta\right)\right)\cdot\Pi\quad\rightarrow$$

$$P_a=\left(\frac{1}{2}1.000\cdot 2^2+1.000\cdot 10\left(1+3\right)\right)\cdot 0{,}4\cdot 10^{-3}\,P\alpha=16{,}8W$$

iii) Έστω κάποια στιγμή t, που το νερό στο ντεπόζιτο έχει ύψος y, όπως στο διπλανό σχήμα.



Ερχόμενοι στην παροχή του σωλήνα έχουμε:

$$\Pi=\frac{\Delta V}{\Delta t}=A_1\upsilon_1\rightarrow\frac{Sy}{t-0}=A_1\upsilon_1\rightarrow y=\frac{A_1\upsilon_1}{S}t\quad(2)$$

Και η εξίσωση (1) για την ισχύ της αντλίας, παίρνει τη μορφή:

$$P_{a,t}=\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)\cdot\frac{dV}{dt}+\rho gh\cdot\frac{dV}{dt}\quad\rightarrow$$

$$P_{a,t}=\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)\cdot\Pi+\rho g\left(\alpha+\beta+y\right)\cdot\Pi\ (3)\rightarrow$$

$$P_{a,t}=\left(\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)\cdot\Pi+\rho g\left(\alpha+\beta+\frac{A_1\upsilon_1}{S}t\right)\cdot\Pi\rightarrow$$

$$P_{a,t}=\left(\frac{1}{2}1.000\cdot 2^2\right)\cdot 0{,}4\cdot 10^{-3}\,Pa+1.000\cdot 10\left(1+3+\frac{2\cdot 10^{-4}\cdot 2}{1}t\right)\cdot 0{,}4\cdot 10^{-3}\,Pa\rightarrow$$

$$P_{a,t}=\left(16{,}8+16\cdot 10^{-4}t\right)\quad(S.I.)$$

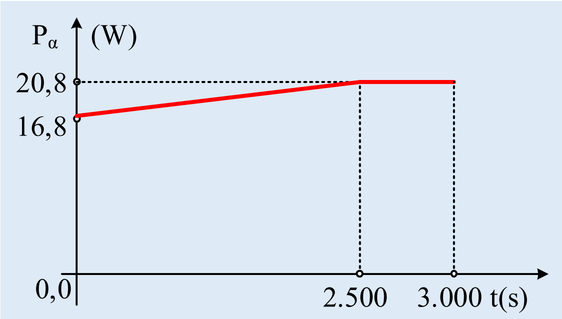
Η παραπάνω εξίσωση ισχύει, μέχρι το νερό να φτάσει σε ύψος y_1=α=1m, όπου το νερό θα αρχίσει να εκρέει από τον σωλήνα και θα πάψει η άνοδος της στάθμης. Οπότε με αντικατάσταση στην (2) y=α παίρνουμε:

$$y=\frac{A_1\upsilon_1}{S}t_1=\alpha\rightarrow t_1=\frac{\alpha S}{A_1\upsilon_1}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 10^{-4}\cdot 2}s=2.500s$$

Αφού από κει και πέρα η ισχύς σταθεροποιείται στην τιμή:

$$P_{a,t_1} = 16,8 + 16 \cdot 10^{-4} t_1 = 16,8 + 16 \cdot 10^{-4} \cdot 2.500W = 20,8W$$

Με βάση τα παραπάνω, η ζητούμενη γραφική παράσταση έχει τη μορφή:



iv) Αν αλλάζαμε διατομή σωλήνα, διατηρώντας την ίδια παροχή, αυτό θα είχε ως συνέχεια την ταχύτητα ροής:

$$\Pi = A_2 \upsilon_2 \rightarrow \upsilon_2 = \frac{\Pi}{A_1} = \frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} m/s = 1m/s$$

Αλλά από την εξίσωση (3) θα έχουμε για την τελική ισχύ της αντλίας:

$$P_{a,2} = \left(\frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2\right) \cdot \Pi + \rho g\left(\alpha + \beta + y\right) \cdot \Pi \rightarrow$$

$$P_{a,2} = \left(\frac{1}{2} 1.000 \cdot 1^2\right) \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} Pa + 1.000 \cdot 10\left(1 + 3 + 1\right) \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} Pa = 20,2W$$

Μόλις το ύψος του νερού στο ντεπόζιτο γίνει y=α=1m, στο σημείο Γ, όπου φτάνει η φλέβα του νερού, επικρατεί πίεση:

$$p_{\Gamma,\tau\varepsilon\lambda} = p_{\alpha\tau} + \rho g y = p_{\alpha\tau} + \rho g a$$

Εφαρμόζουμε τώρα ξανά την εξίσωση Bernoulli, μεταξύ των σημείων Β και Γ:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 = p_{\Gamma,\tau\varepsilon\lambda} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \rightarrow$$

$$p_B = p_{a\tau} + \rho g a + \rho g \beta = 10^5 Pa + 1.000 \cdot 10 \cdot (3+1) Pa = 1,4 \cdot 10^5 Pa$$

dmargaris@gmail.com