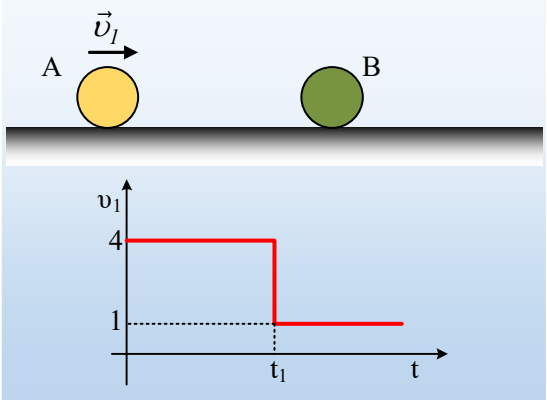
Μια κεντρική κρούση δύο σφαιρών

Δύο σφαίρες με ίσες ακτίνες κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, χωρίς να στρέφονται. Στο διάγραμμα δίνεται η ταχύτητα της Α σφαίρας μάζας m_1=1kg, όπου τη στιγμή t_1 έχουμε μια κεντρική κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών.



i) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας, που οφείλεται στην κρούση.

ii) Να παρασταθεί γραφικά η ορμή της Β σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο, αν

α) πριν την κρούση έχει ταχύτητα προς τα δεξιά και ορμή μέτρου p_2=6kg·m/s.

β) πριν την κρούση έχει ταχύτητα προς τα αριστερά και ορμή μέτρου p_2=2kg·m/s.

iii) Να υπολογισθεί η αύξηση της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Β, στην α) περίπτωση, αν η κρούση μεταξύ των σφαιρών είναι ελαστική.

iv) Να υπολογιστεί η μάζα της σφαίρας Β, αν έχουμε ελαστική κρούση και αρχικά η σφαίρα ήταν ακίνητη.

Απάντηση:

i) Θεωρούμε την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, οπότε για τη μεταβολή της ορμής της Α σφαίρας έχουμε:

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 \xrightarrow{\text{αλγεβρικά}} \Delta p_1 = p_1' - p_1 = m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 \rightarrow$$
$$\Delta p_1 = m_1\upsilon_1' - m_1\upsilon_1 = 1\cdot 1kg\cdot m/s - 1\cdot 4kg\cdot m/s = -3kg\cdot m/s$$

Ενώ από την διατήρηση της ορμής του συστήματος έχουμε:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \rightarrow \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \vec{p}_1' \rightarrow$$
$$\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι η μεταβολή της ορμής της Β σφαίρας, είναι αντίθετη της μεταβολής της ορμής της Α σφαίρας, οπότε:

$$\Delta p_2 = +3kg\cdot m/s$$

ii) Για την παραπάνω μεταβολή της ορμής ισχύει:

$$\Delta p_2 = p_2' - p_2 \rightarrow p_2' = \Delta p_2 + p_2$$

α) Αν η σφαίρα αρχικά κινείται προς τα δεξιά, τότε:

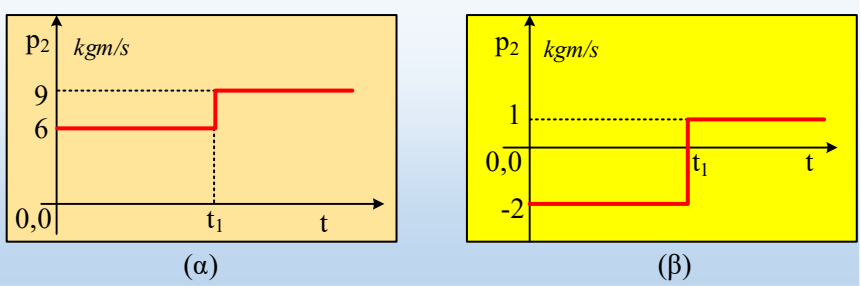
$$p_2' = \Delta p_2 + p_2 = 3kg\cdot m/s + 6kg\cdot m/s = 9kg\cdot m/s$$

Και η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα (α).

β) Αν η σφαίρα αρχικά κινείται προς τα αριστερά, τότε:

$$p_2' = \Delta p_2 + p_2 = 3kg \cdot m/s - 2kg \cdot m/s = 1kg \cdot m/s$$

Και η γραφική παράσταση είναι όπως στο (β) σχήμα.



iii) Αν η κρούση είναι ελαστική, η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών πριν την κρούση, είναι ίση με την αντίστοιχη μετά την κρούση. Αλλά τότε η Β σφαίρα κέρδισε τόση κινητική ενέργεια, όση έχασε η Α σφαίρα. Απλά κάποιο μέρος της κινητικής ενέργειας της Α, μεταφέρθηκε στην Β.

$$\Delta K_2 = -\Delta K_1 = -\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2\right) = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 \rightarrow$$

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2}1 \cdot 4^2 J - \frac{1}{2}1 \cdot 1^2 J = 7,5J$$

iv) Η ταχύτητα της Α σφαίρας μετά την κεντρική και ελαστική της κρούση με την ακίνητη σφαίρα Β, δίνεται από την εξίσωση:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \xrightarrow{\text{αντικατάσταση}} 1 = \frac{1 - m_2}{1 + m_2}4 \rightarrow$$

$$1 + m_2 = 4 - 4m_2 \rightarrow m_2 = 0,6kg$$

dmargaris@gmail.com