1. *Una cuenta de masa m desliza sin rozamiento sobre un anillo circular de radio a. El anillo se encuentra en un plano vertical y es obligado a girar alrededor del diámetro vertical con velocidad angular constante ω. Escribir el lagrangiano y la ecuación de movimiento. Encontrar la posición de equilibrio de la cuenta, y calcular la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de este punto. ¿Cuál es la constante de movimiento del problema? ¿Coincide con la energía del sistema? ¿Es la energía del sistema constante? Demostrar que, para velocidades angulares $\omega > \omega_c$, con $\omega_c = \sqrt{g/a}$, existe un punto de equilibrio estable en el que la cuenta no se encuentra en su punto más bajo y, por tanto, el movimiento de la cuenta es cualitativamente distinto.*

Tomemos como coordenada generalizada el ángulo polar θ referido al eje fijo z. Con respecto a ejes fijos xyz, las coordenadas cartesianas son

$$
\begin{aligned}
x &= a \sin\theta \cos\phi \\
y &= a \sin\theta \sin\phi \\
z &= a \cos\theta
\end{aligned}
$$

siendo $\omega = d\phi/dt$ la velocidad angular de rotación del alambre. Las velocidades cartesianas son:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a\left(\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\cos\phi - \omega\sin\theta\sin\phi\right) \\
\frac{dy}{dt} &= a\left(\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\sin\phi + \omega\sin\theta\cos\phi\right) \\
\frac{dz}{dt} &= -a\frac{d\theta}{dt}\sin\theta
\end{aligned}
$$

de manera que la energía cinética es

$$
T = \frac{1}{2}ma^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \omega^2\sin^2\theta\right]
$$

La energía potencial, debida a la gravedad, es $U = mga\cos\theta$, con lo cual el lagrangiano es

$$
L = \frac{1}{2}ma^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \omega^2\sin^2\theta\right] - mga\cos\theta
$$

La ecuación de Lagrange es

$$
\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\theta'} = 0 \quad \rightarrow \quad ma^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mga\sin\theta
$$

o sea,

$$
\frac{d^2\theta}{dt^2} = (\omega^2\cos\theta + \omega_c^2)\sin\theta
$$

donde hemos definido $\omega_c^2 \equiv g/a$. El punto de equilibrio θ_e se obtiene buscando que la derivada segunda sea nula, $d^2\theta/d\theta^2 = 0$. Entonces

$$
(\omega^2\cos\theta_e + \omega_c^2)\sin\theta_e = 0
$$

que ciertamente se verifica para $\theta_e = \pi$. Sin embargo, si $\omega^2 \cos\theta_e + \omega_c^2 = 0$ existe otra solución dada por

$$\theta_e = \arccos\left(-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)$$

siempre que $\omega > \omega_c$ (de manera que el argumento del arccos sea menor o igual a 1 y exista el ángulo en cuestión). Por tanto, el punto de equilibrio para $\omega < \omega_c$ es $\theta_e = \pi$. Si $\omega > \omega_c$ aparece un nuevo punto de equilibrio dado por $\cos\theta_e = -(\omega_c/\omega)^2$.

Vamos a hacer ahora una aproximación armónica para resolver la ecuación de movimiento.

- $\omega < \omega_c$. Escribamos $\theta = \pi - \eta$, donde η es el ángulo medido desde la posición más baja de la cuenta. Entonces

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \sin\theta = \sin\eta \approx \eta, \quad \cos\theta = -\cos\eta \approx -1$$

  y la ecuación queda

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + (\omega_c^2 - \omega^2)\eta = 0$$

  Nótese que, en este caso, el prefactor del término lineal en η es positivo, por lo que la solución oscila de manera armónica alrededor del punto de equilibrio estable $\theta = \pi$ (si $\omega > \omega_c$ el prefactor sería negativo, lo que corresponde a movimiento exponencial: el punto $\theta = \pi$ deja de ser estable y pasa a ser inestable).

- $\omega > \omega_c$. Escribamos ahora $\theta = \theta_e - \eta$. Entonces

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{d^2\eta}{dt^2},$$

$$\sin\theta = \sin(\theta_e - \eta) \approx \sin\theta_e - \eta\cos\theta_e,$$

$$\cos\theta = \cos(\theta_e - \eta) \approx \cos\theta_e + \eta\sin\theta_e$$

  y la ecuación es

$$-\frac{d^2\eta}{dt^2} = \left[\omega^2(\cos\theta_e + \eta\sin\theta_e) + \omega_c^2\right](\sin\theta_e - \eta\cos\theta_e)$$

$$= \left(\omega^2\cos\theta_e + \omega_c^2\right)\sin\theta_e + \eta\left[\omega^2\left(\sin^2\theta_e - \cos^2\theta_e\right) - \omega_c^2\cos\theta_e\right]$$

  Ahora, por la propia definición de θ_e,

$$\omega^2\cos\theta_e + \omega_c^2 = 0$$

  y el término porporcional a η se puede reescribir como sigue:

$$\cos\theta_e = -\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \quad \to \quad \cos^2\theta_e = \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4$$

$$\sin^2\theta_e = 1 - \cos^2\theta_e = 1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4$$

$$\sin^2\theta_e - \cos^2\theta_e = 1 - 2\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4$$

y

$$\omega^2\left(\sin^2\theta_e-\cos^2\theta_e\right)-\omega_c^2\cos\theta_e=\omega^2\left[1-2\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4\right]+\omega_c^2\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2=\frac{\omega^4-\omega_c^4}{\omega^2}$$

de manera que

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{\omega^4-\omega_c^4}{\omega^2}\eta=0$$

Nótese que, en este caso, el prefactor del término lineal en η es positivo, por lo que la solución oscila de manera armónica alrededor del punto de equilibrio estable $\theta=\theta_e$ (si $\omega<\omega_c$ el prefactor sería negativo, lo que corresponde a movimiento exponencial: el punto $\theta=\pi$ deja de ser estable –deja de ser de hecho un punto de equilibrio).

Las frecuencias de oscilación (al cuadrado) son:

- en el caso $\omega<\omega_c$:
$$\omega_0^2\equiv\omega_c^2-\omega^2$$
- en el caso $\omega>\omega_c$:
$$\omega_1^2\equiv\frac{\omega^4-\omega_c^4}{\omega^2}$$

2. *Supóngase el funcional*

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}dx f(y,y';x)$$

cuya variable dependiente $y(x)$ se encuentra sometida a una ligadura dada en términos de una integral.

$$c=\int_{x_0}^{x_1}dx g(y(x))$$

Se puede demostrar que el extremo de este problema viene dado por las variaciones del funcional

$$\int_{x_0}^{x_1}dx[f(y,y';x)+\lambda g(y(x))]$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Utilizar esta idea para calcular la forma que adopta la superficie de un fluido de densidad ρ_0 y masa total M que rota en un recipiente cilíndrico de radio R con velocidad angular ω. En este caso el funcional a extremizar es la energía potencial total del fluido en el sistema de referencia que rota, sometido a la ligadura de que la masa total es contante e igual a M.

Ayuda: en el sistema rotante, una porción de fluido de masa dm se ve sometido a dos fuerzas, la gravitatoria $-gdm\hat{\mathbf{e}}_z$, hacia abajo, y la centrífuga, $dm\omega^2\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho$, donde ρ es la distancia al eje (distancia radial en coordenadas cilíndricas) y $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ el correspondiente vector unitario. A ambas fuerzas se les puede asociar un potencial: a la primera el potencial gravitatorio, $dmgz$, siendo z la altura desde el origen de potencial, y a la segunda el potencial centrífugo, que es $-(dm\omega^2\rho^2)/2$, como se puede comprobar derivando con respecto a ρ y cambiando de signo. La energía potencial total del fluido será la suma de ambas.

Escribamos primero el funcional que nos da la energía potencial U. Para ello, escojamos coordenadas cilíndricas (ρ,ϕ,z), situando el eje z a lo largo del eje del recipiente cilíndrico, y midamos la altura de la superficie del fluido sobre la base del cilindro mediante una función $h(\rho)$ (claramente, debido a la simetría del problema, esta altura sólo va a depender de ρ, siendo independiente de ϕ). La energía potencial de un pequeño elemento de masa dm se compone de dos partes: una, la parte gravitatoria, que es igual a $dmgh(\rho)$; otra, la parte centrífuga, que lleva un potencial asociado $-(dm\omega^2\rho^2)/2$. La energía potencial total del fluido se obtendrá integrando la suma de ambos términos:

$$U[h] = \rho_0 \int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{h(\rho)} dz \left[gz - \frac{\omega^2\rho^2}{2}\right] = \pi\rho_0 \int_0^R d\rho\rho \left[gh^2(\rho) - \omega^2\rho^2 h(\rho)\right]$$

donde hemos tenido en cuenta que $dm = \rho_0 dv$, siendo $\rho_0 = M/V$ la densidad (constante) del fluido, V su volumen, y dv el elemento diferencial de volumen. La restricción sobre la función $h(\rho)$ es que la masa total del fluido ha de ser constante:

$$M = \rho_0 \int_0^R d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{h(\rho)} dz = 2\pi\rho_0 \int_0^R d\rho\rho h(\rho)$$

El funcional a extremizar es por tanto:

$$F[h] = \pi\rho_0 \int_0^R d\rho\rho \left[gh^2(\rho) - \omega^2\rho^2 h(\rho) + 2\lambda h(\rho)\right]$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Obtengamos ahora la ecuación de Lagrange, teniendo en cuenta que la función f es

$$f(h, h') = gh^2(\rho) - \omega^2\rho^2 h(\rho) + 2\lambda h(\rho)$$

(la constante $\pi\rho_0$ no contribuye a la ecuación de Lagrange y se puede quitar de la definición de f). Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial h} - \frac{d}{d\rho}\frac{\partial f}{\partial h'} = 0$$

y como

$$\frac{\partial f}{\partial h} = 2gh(\rho) + \omega^2\rho^2 + 2\lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial h'} = 0$$

obtenemos la ecuación

$$2gh(\rho) - \omega^2\rho^2 + 2\lambda = 0$$

de donde podemos despejar $h(\rho)$:

$$h(\rho) = \frac{\omega^2\rho^2}{2g} - \frac{\lambda}{g}$$

Para obtener la constante λ utilizamos la ligadura:

$$M = 2\pi\rho_0 \int_0^R d\rho\rho h(\rho) = 2\pi\rho_0 \int_0^R d\rho\rho \left[\frac{\omega^2\rho^2}{2g} - \frac{\lambda}{g}\right] = \frac{\pi R^2\rho_0}{g}\left[\frac{\omega^2 R^2}{4} - \lambda\right]$$

de donde

$$\lambda = \frac{\omega^2 R^2}{4} - \frac{Mg}{\pi R^2\rho_0}$$

y, finalmente,

$$h(\rho) = \frac{\omega^2\rho^2}{2g} + h_0$$

siendo h_0 la altura del fluido en el eje (es decir, cuando $\rho = 0$):

$$h_0 = \frac{M}{\pi R^2\rho_0} - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Como vemos, la altura $h(\rho)$ corresponde a un paraboloide.

3. *Sea una partícula de masa m que se mueve en el seno de un campo de fuerzas conservativo dado por una función energía potencial U. Encontrar el hamiltoniano, y demostrar, utilizando coordenadas cartesianas, que las ecuaciones canónicas se reducen a las ecuaciones de Newton.*

Como el campo es conservativo, la energía se conserva. Además, el hamiltoniano H va a ser la energía mecánica total. El lagrangiano es

$$L = T - U = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x, y, z)$$

Calculemos primero los momentos generalizados:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

El hamiltoniano será:

$$H = T + U = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + U(x, y, z) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + U(x, y, z)$$

Las ecuaciones canónicas son:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

o sea,

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

y

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Pero ahora, si despejamos los momentos de las Ecns. (1) y los sustituimos en las Ecns. (1), obtenemos las ecuaciones de Newton:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z$$

4. *Una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo la influencia de una fuerza*

$$F(x, t) = \frac{k}{x^2}e^{-t/\tau}$$

donde k y τ son constantes positivas. Obtener el lagrangiano y el hamiltoniano, comparando éste último con la energía total y discutiendo la conservación de la energía en este sistema.

Obtengamos, de manera formal, la energía potencial $U(x, t)$ asociada a esta fuerza:

$$U(x, t) = -\int F(x, t)dx = \frac{k}{x}e^{-t/\tau}$$

El lagrangiano será por tanto

$$L(x, \dot{x}; t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{x} e^{-t/\tau}$$

Observemos que $\partial L / \partial t \neq 0$ en este sistema. El hamiltoniano, por tanto, no es una cantidad conservada. Además, la energía de este sistema no se conserva, ya que U depende de t explícitamente, y la cantidad

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{k}{x} e^{-t/\tau}$$

varía en el tiempo. El hamiltoniano es

$$H = \dot{x} p_x - L = m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{k}{x} e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{k}{x} e^{-t/\tau}$$

que sí que coincide con la energía. En este sistema el hamiltoniano y la energía son iguales, pero no se conservan en el tiempo.

5. *Una cuenta de masa m se mueve por la acción de la gravedad a lo largo de la curva espiral dada por $z = k\phi$, $\rho =$constante, donde k es una constante y ρ, ϕ, z son las coordenadas cilíndricas. Obtener las ecuaciones canónicas de movimiento.*

El lagrangiano, usando corrdenadas cilíndricas, es

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Incorporemos las ligaduras a base de eliminar $\rho = a$ (el radio de la espiral) y $z = k\phi$. Tenemos:

$$L = \frac{1}{2} m (a^2 + k^2) \dot{\phi}^2 - mgk\phi$$

de donde el problema depende de una sóla coordenada generalizada, ϕ. Su momento asociado es

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(a^2 + k^2) \dot{\phi}$$

de donde

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{a^2 + k^2}$$

El hamiltoniano es $H = T + U$, ya que el sistema es claramente conservativo. Tenemos:

$$H = \frac{1}{2} m (a^2 + k^2) \dot{\phi}^2 + mgk\phi = \frac{p_\phi^2}{2m(a^2 + k^2)} + mgk\phi$$

Las ecuaciones canónicas serán:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m(a^2 + k^2)}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -mgk$$

que son fácilmente integrables:

$$p_\phi = -mgkt + c_1, \quad \phi = \int dt \frac{-mgkt + c_1}{m(a^2 + k^2)} = \frac{c_2 + c_1 t}{m(a^2 + k^2)} - \left[\frac{gk}{2(a^2 + k^2)} \right] t^2$$

La coordenada $z = k\phi$ es pues

$$z = \frac{k(c_2 + c_1 t)}{m(a^2 + k^2)} - \frac{1}{2}\left(\frac{gk^2}{a^2 + k^2}\right)t^2$$

Las constantes c_1, c_2 se ajustan con las condiciones iniciales del problema. Vemos pues que el tipo de movimiento es uniformemente acelerado, como el de una partícula en caida libre, pero con una aceleración negativa dada por

$$\frac{gk^2}{a^2 + k^2}$$

es decir, la de la gravedad pero disminuida en un factor $k^2/(a^2 + k^2) < 1$ (recordar que k es el *paso* de la espiral, es decir, lo que avanza en vertical la espiral por cada vuelta; cuanto mayor sea k, mayor será la aceleración. k positivo corresponde a una espiral que se enrosca alrededor del eje z en el sentido positivo -contrario a las agujas del reloj, visto desde el eje z positivo-, mientras que si k es negativo la espiral tiene sentido negativo -el de las agujas del reloj-). Nótese que la aceleración es siempre menor que g, independientemente del signo de k, esto es, del sentido de rotación de la partícula; ésto es lógico, puesto que la mayor aceleración corresponde a una partícula en caida libre.

6. *Una partícula de masa m, cuya posición está dada por una coordenada generalizada q, con $q > 0$, se encuentra en el seno de un campo de energía potencial $U(q) = kq$, siendo k una constante. Su posición inicial es q_0 y su momento generalizado inicial es p_0. Resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi para este problema, hallando por tanto la función principal de Hamilton S. A partir de ella, obtener $q(t)$ y $p(t)$ en función de t y las constantes iniciales q_0, p_0. A la vista de la solución y del tipo de potencial, ¿a qué sistema físico podría corresponder este problema?*

El campo de fuerzas en el que se mueve la partícula es conservativo, por lo que el hamiltoniano será

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + U(q) = \frac{p^2}{2m} + q$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + q + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Como H no depende de t, probamos la solución

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t$$

donde α es una constante, que de hecho es el momento transformado P. Tenemos entonces la ecuación para W:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + q = \alpha$$

Despejando W:

$$W(q, \alpha) = \int dq\sqrt{2m(\alpha - q)} = \sqrt{2m}\int dq\sqrt{\alpha - q}$$

La nueva coordenada Q, implícita en la transformación canónica generada por S, es una constante, que llamamos β:

$$Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha} \equiv \beta$$

Entonces:

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} - t = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\sqrt{2m}\int dq\sqrt{\alpha - q}\right] - t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dq}{\sqrt{\alpha - q}} - t = -\sqrt{2m}\sqrt{\alpha - q} - t$$

Despejando q,

$$q = \alpha - \frac{(\beta + t)^2}{2m}$$

Relacionemos ahora α, β con q_0, p_0. Primero, usando la relación $p = \partial S/\partial q$ en $t = 0$:

$$p_0 = \left.\frac{\partial S}{\partial q}\right|_0 = \left.\frac{\partial W}{\partial q}\right|_0 = \sqrt{2m}\sqrt{\alpha - q_0}$$

de donde

$$\alpha = \frac{p_0^2}{2m} + q_0 = E$$

que reconocemos como la energía inicial (y por tanto, como la energía constante E). Entonces

$$q = \frac{p_0^2}{2m} + q_0 - \frac{\beta^2}{2m}$$

Como $q(0) = q_0$, sustituyendo en la solución:

$$q_0 = \frac{p_0^2}{2m} + q_0 - \frac{\beta^2}{2m}, \quad \beta = \pm p_0$$

y, finalmente, la solución es

$$q = \frac{p_0^2}{2m} + q_0 - \frac{(p_0 \mp t)^2}{2m} = q_0 \pm \frac{p_0 t}{m} - \frac{t^2}{2m}$$

Este tipo de movimiento podría corresponder al de un cuerpo en el seno del campo gravitatorio terrestre cerca de la superficie, donde el campo se puede considerar constante y la energía potencial es proporcional a la altura (q jugaría el papel de altura sobre la superficie). La aceleración sería negativa (en las unidades de este problema, $g = 1$). El término $\pm p_0 t/m$ correspondería a una velocidad inicial hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.