(a) La longitud de un elemento diferencial de línea en una curva alabeada tridimensional es

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Tenemos dos funciones, $y = y(x)$, $z = z(x)$, como funciones dependientes con respecto a las cuales hemos de minimizar el funcional

$$J[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2}$$

con las condiciones de contorno $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, z(x_1) = z_1, z(x_2) = z_2$. Con

$$f(y, z, y', z'; x) = \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2}$$

las ecuaciones de Euler son:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} = 0$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \quad \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

que dan lugar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} y''(1 + z'^2) - y'z'z'' &= 0 \\ -y'z'y'' + z''(1 + y'^2) &= 0 \end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones $y'' = f_1(y', z')$, y $z'' = f_2(y', z')$ y así poder integrar, hemos de despejar de las dos ecuaciones y'', z''. Como son dos ecuaciones homogeneas, las soluciones serán distintas de la trivial $y'' = z'' = 0$ si el determinante del sistema es nulo. El determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 + z'^2 & -y'z' \\ -y'z' & 1 + y'^2 \end{vmatrix} = 1 + z'^2 + y'^2 = 0$$

pero esta condición nunca se puede cumplir. Por lo tanto, la única solución posible es

$$\begin{aligned} y'' = 0 \quad &\rightarrow \quad y(x) = ax + b \\ z'' = 0 \quad &\rightarrow \quad z(x) = cx + d \end{aligned}$$

que representan una línea recta. Las constantes a, b, c y d se ajustan imponiendo las condiciones $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y2, z(x_1) = z_1$ y $z(x_2) = z_2$.

(b) Escribamos primero el funcional que da la longitud de una trayectoria que va desde un punto de la superficie del cilindro, dado por las coordenadas cilíndricas (a, ϕ_1, z_1) a otro punto dado por (a, ϕ_2, z_2). La longitud de un elemento diferencial es

$$dl = \sqrt{a^2 d\phi^2 + dz^2} = d\phi\sqrt{a^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2}$$

Entonces

$$f(z,z') = \sqrt{a^2 + z'^2}$$

y la ecuación de Euler es

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{d\phi}\frac{\partial f}{\partial z'} = 0 \quad \rightarrow \quad z''(a^2 + z'^2) - z'^2 z'' = a^2 z'' = 0$$

de donde $z'' = 0$ y

$$z(\phi) = a\phi + b$$

que corresponde a la ecuación de una hélice de radio constante (igual a a). Las constantes a y b se obtienen de imponer las condiciones $z(\phi_1) = z_1$, $z(\phi_2) = z_2$.

2. *Obtener las ecuaciones de Euler en el caso de un funcional que depende de N variables dependientes $\{y_i(x)\}$, $i = 1, 2, ..., N$,*

$$J[y_1, y_2, ..., y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y_1, y_1', y_2, y_2', ..., y_N, y_N'; x)$$

cuando (a) no hay condiciones de ligadura; (b) las variables se encuentran sometidas a M condiciones de ligadura

$$g_j(y_1, y_2, ..., y_N) = 0, \quad j = 1, 2, ..., M$$

(a) Tomando variaciones en el funcional:

$$\delta J[y_1, y_2, ..., y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta f(y_1, y_2, ..., y_N) = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\delta y_i' \right)$$

Ahora $\delta y_i' = \frac{d}{dx}\delta y_i$, e integrando los términos que contienen parciales con respecto a las y_i' teniendo en cuenta que $\delta y_i = 0$ en los extremos del intervalo,

$$\delta J[y_1, y_2, ..., y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \delta y_i$$

Las variaciones δy_i son independientes y arbitrarias (excepto por el hecho de que se han de anular en los extremos del intervalo), por lo que podemos igualar a cero cada uno de los términos entre paréntesis, obteniendo las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, ..., N$$

(b) Tomando directamente variaciones en el funcional:

$$\delta J[y_1, y_2, ..., y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta f(y_1, y_2, ..., y_N) = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\delta y_i' \right)$$

Ahora $\delta y_i' = \frac{d}{dx}\delta y_i$, e integrando los términos que contienen parciales con respecto a las y_i' teniendo en cuenta que $\delta y_i = 0$ en los extremos del intervalo,

$$\delta J[y_1, y_2, ..., y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \delta y_i$$

Diferenciando estas condiciones,

$$\delta g_j = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \delta y_i = 0 \tag{1}$$

de donde, por ejemplo, podemos despejar δy_i, con $i = N - M + 1, N - M + 2, ..., N$, en términos de δy_i, con $i = 1, 2, ..., N - M$, tomando estas últimas como variaciones independientes. Vamos a escribir las variables dependientes como $\delta \tilde{y}_i \equiv \delta y_{N-M+i}$, $i = 1, 2, ..., M$, e introduzcamos las siguientes notaciones vectoriales:

- $\delta \mathbf{y}$: vector de dimensión $N - M$ cuyas componentes son las variaciones de las coordenadas independientes.

- $\delta \tilde{\mathbf{y}}$: vector de dimensión M cuyas componentes son las variaciones de las coordenadas dependientes.

- a: matriz de dimensiones $M \times (N - M)$ cuyas componentes son

$$a_{ji} \equiv \frac{\partial g_j}{\partial y_i}, \quad j = 1, 2, ..., M, \quad i = 1, 2, ..., N - M$$

- $\tilde{a}$: matriz de dimensiones $M \times M$ cuyas componentes son

$$\tilde{a}_{ji} \equiv \frac{\partial g_j}{\partial \tilde{y}_i}, \quad j = 1, 2, ..., M, \quad i = 1, 2, ..., M$$

La ecuación (1) se puede escribir en notación vectorial

$$\tilde{a}\delta\tilde{\mathbf{y}} + a\delta\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \tilde{a}\delta\tilde{\mathbf{y}} = -a\delta\mathbf{y},$$

de donde podemos despejar $\delta\tilde{\mathbf{y}}$:

$$\delta\tilde{\mathbf{y}} = -\tilde{a}^{-1}a\delta\mathbf{y}$$

Escribamos ahora la variación del funcional δJ también en notación vectorial. Tenemos:

$$\delta J[y_1, y_2, ..., y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\sum_{i=1}^{N-M} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \delta y_i + \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_i'} \right) \delta \tilde{y}_i \right]$$

Introduciendo los vectores

$$\Delta\mathbf{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}, \quad \Delta\tilde{\mathbf{f}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_i'},$$

(de $N - M$ y M dimensiones, respectivamente) entonces $\delta J = 0$ se puede escribir de la forma

$$\delta J[y_1, y_2, ..., y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\Delta\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{y} + \Delta\tilde{\mathbf{f}} \cdot \delta\tilde{\mathbf{y}} \right]$$

e introduciendo la relación entre las variaciones dependientes y las independientes,

$$\delta J[y_1, y_2, ..., y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\Delta\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{y} - \Delta\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{a}^{-1}a\delta\mathbf{y} \right] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\Delta\mathbf{f} - \Delta\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{a}^{-1}a \right] \cdot \delta\mathbf{y} = 0$$

Multiplicando esta ecuación vectorial por la matriz a^{-1} por la derecha,

$$\Delta \mathbf{f}\cdot a^{-1} = \Delta\tilde{}$$

$$\mathbf{f}\cdot \tilde{a}^{-1}$$

Ambos miembros de esta ecuación son iguales a la misma función de x, que llamamos $-\lambda$ (y que es un vector de M componentes). Por tanto,

$$\Delta \mathbf{f}\cdot a^{-1} = -\lambda$$

$$\Delta\tilde{}$$

$$\mathbf{f}\cdot \tilde{a}^{-1} = -\lambda$$

Multiplicando la primera ecuación por a por la derecha y la segunda por $\tilde{a}$ por la derecha también,

$$\Delta \mathbf{f} = -\lambda a \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{f} + \lambda a = 0$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{f}} = -\lambda\tilde{a} \quad \rightarrow \quad \Delta\tilde{\mathbf{f}} + \lambda\tilde{a} = 0$$

Pasando ahora a notación normal, por componentes,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_{k=1}^{M}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, ..., N-M$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}_i'} + \sum_{k=1}^{M}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial \tilde{y}_i} = 0, \quad i = 1, ..., M$$

y deshaciendo el cambio de índices involucrado en la definición de $\delta\tilde{y}_i$, tenemos finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_{k=1}^{M}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, ..., N$$

3. *Una cuenta se puede mover a lo largo de un alambre horizontal de masa despreciable y longitud muy grande. El alambre gira con velocidad angular constante ω alrededor de un punto sobre un eje vertical; este punto suponemos es el origen. En el instante inicial la distancia de la cuenta al origen es q_0, y su velocidad radial es nula. Calcular el movimiento en el tiempo de la cuenta.*

Tomamos como coordenada generalizada la distancia q desde el origen hasta la posición de la cuenta. Las coordenadas cartesianas son:

$$x = q\cos\phi, \quad y = q\sin\phi$$

donde $\phi = \omega t$ es el ángulo polar. Derivando, obtenemos la velocidad cartesiana inercial:

$$\dot{x} = \dot{q}\cos\phi - q\omega\sin\phi, \quad \dot{y} = \dot{q}\sin\phi + q\omega\cos\phi$$

La energía cinética será

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2+q^2\omega^2)$$

y la ecuación de Lagrange para q es

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = mq\omega^2 - m\ddot{q} = 0$$

La ecuación de movimiento,

$$\ddot{q} - q\omega^2 = 0$$

tiene como soluciones exponenciales reales, que podemos poner como funciones hiperbólicas:

$$q(t) = A\cosh \omega t + B \sinh \omega t$$

Ajustamos ahora las condiciones iniciales:

$$q_0 = A, \quad 0 = B\omega, \quad \longrightarrow \quad A = q_0, \quad B = 0$$

y la solución es

$$q(t) = q_0 \cosh \omega t$$

Por tanto, la distancia de la cuenta al centro crece exponencialmente; la fuerza responsable es la fuerza centrífuga.

4. *Una partícula se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza* $f = -Ar^{\alpha-1}$ *dirigida hacia el origen.* A *y* α *son constantes. Escoger coordenadas generalizadas de manera conveniente, y tomar el cero de energía potencial en el origen. Encontrar las ecuaciones de movimiento de Lagrange, y decir si el momento angular y la energía total se conservan.*

Al ser una fuerza central (dirigida siempre hacia un mismo punto, que tomamos como el origen) el momento angular se conserva, ya que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = rf\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0}$$

Otra forma de verlo es que, como veremos, el lagrangiano no depende de la coordenada angular medida en el plano, con lo cual el momento angular con respecto a un eje normal al plano se conserva.

Además, la fuerza es conservativa. Como

$$\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{e}}_r = -Ar^{\alpha-1}(\hat{\mathbf{e}}_x \cos\phi + \hat{\mathbf{e}}_y \sin\phi) = -A\frac{(x, y)}{r^{2-\alpha}}$$

tenemos

$$|\nabla \times \mathbf{f}| = -A\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r^{2-\alpha}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^{2-\alpha}}\right) = -A\frac{(\alpha-2)}{r^{3-\alpha}}\left(\frac{xy}{r} - \frac{yx}{r}\right) = 0$$

Por tanto, la energía se conserva.

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]$$

La energía potencial la obtenemos a base de integrar la fuerza:

$$U = -\int_0^r drf(r) = A\int_0^r drr^{\alpha-1} = \frac{A}{\alpha}r^\alpha$$

El lagrangiano es pues

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] - \frac{A}{\alpha}r^\alpha$$

Obtengamos ahora las dos ecuaciones de Lagrange, asociadas a cada una de las coordenadas generalizadas:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial r'} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \phi'} = 0,$$

con $r' \equiv dr/dt$, $\theta' \equiv d\theta/dt$. Calculando las derivadas,

$$mr\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - Ar^\alpha - m\frac{d^2r}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\phi}{dt}\right) = 0$$

La segunda ecuación, que resulta del hecho de que L no depende de ϕ (ésta es una *coordenada ignorable*) indica que $mr^2 d\phi/dt$ es una constante. Esta constante es el momento angular:

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}| = mr|\hat{\mathbf{e}}_r \times (v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi)| = mrv_\phi = mr^2\frac{d\phi}{dt}$$

5. *Un péndulo simple de masa m y longitud l se encuentra suspendido de un punto enganchado a un soporte que se mueve a lo largo del eje horizontal x de acuerdo a la ecuación $x(t) = a\cos\omega t$. Suponemos que el péndulo sólo oscila en un plano vertical que contiene al eje x.*

   a. *Escribir el lagrangiano y la ecuación de Lagrange*

   b. *Demostrar que, en aproximación armónica, la ecuación de Lagrange se reduce a la de un oscilador armónico forzado, calculando el movimiento estacionario correspondiente. ¿Cómo depende la amplitud del movimiento oscilatorio estacionario de l, a y ω? ¿Qué ocurre si ω es muy próximo a la frecuencia de oscilación natural del péndulo?*

Tomemos como coordenada generalizada el ángulo que forma el péndulo con la vertical. Las coordenadas cartesianas de la masa pendular m son x', y', con

$$x' = a\cos\omega t + l\sin\theta, \quad y' = l\cos\theta$$

y la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) = \frac{1}{2}m[(-a\omega \sin \omega t + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2]$$
$$= \frac{1}{2}m[l^2\dot{\theta}^2 - 2al\omega\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + a^2\omega^2\sin^2\omega t] = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mal\omega\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + a^2\omega^2\sin^2\omega t$$

La energía potencial es

$$U = -mgl\cos\theta$$

donde el origen está situado en el eje x. El lagrangiano es por tanto

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mal\omega\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + a^2\omega^2\sin^2\omega t + mgl\cos\theta$$

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \rightarrow \quad mal\omega\dot{\theta}\sin\theta\sin\omega t - mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} - mal\omega\dot{\theta}\sin\theta\sin\omega t + mal\omega^2\cos\theta\cos\omega t = 0$$

y, simplificando,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = \frac{\omega^2 a}{l}\cos\theta\cos\omega t$$

donde $\omega_0^2 \equiv g/l$. En aproximación armónica $\sin\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$, con lo cual la ecuación es

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{\omega^2 a}{l}\cos\omega t$$

es decir, la ecuación de un oscilador armónico forzado. El movimiento estacionario corresponde a la solución particular de la ecuación no homogenea. Para calcularla probamos la solución

$$\theta_e(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Sustituyendo

$$-\omega^2 A\cos\omega t - \omega^2 B\sin\omega t + \omega_0^2 A\cos\omega t + \omega_0^2 B\sin\omega t = \frac{\omega^2 a}{l}\cos\omega t$$

e identificando coeficientes obtenemos $B = 0$ y

$$A = \frac{\omega^2 a/l}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

de donde

$$\theta_e(t) = \frac{a/l}{1 - \omega_0^2/\omega^2}\cos(\omega t - \pi)$$

Si $\omega = \omega_0$, la frecuencia natural de oscilación del péndulo, éste entra en resonancia ya que su amplitud se va a infinito. En el caso de ser muy próxima la amplitud será muy grande. Como comentario final, digamos que en este problema concreto, en el que no existe rozamiento, la solución transitoria en realidad no desaparece nunca, de manera que los términos *transitorio* y *estacionario* no son muy estrictos. (en la realidad, sin embargo, siempre existe un rozamiento, *de la masa del otro péndulo. Suponer que ambos péndulos se mueven en el mismo plano, y que sus longitudes y masas son iguales. Encontrar las ecuaciones de movimiento de Lagrange.*

Tomemos como coordenadas generalizadas los ángulos que forma cada péndulo con la vertical, θ_1 y θ_2. Las coordenadas cartesianas de cada masa son:

$$\begin{aligned} x_1 &= l\sin\theta_1 \\ y_1 &= -l\cos\theta_1 \\ x_2 &= l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2 \\ y_2 &= -l\cos\theta_1 - l\cos\theta_2 \end{aligned}$$

así que

$$\frac{dx_1}{dt} = l\frac{d\theta_1}{dt}\cos\theta_1$$

$$\frac{dy_1}{dt} = l\frac{d\theta_1}{dt}\sin\theta_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = l\frac{d\theta_1}{dt}\cos\theta_1 + l\frac{d\theta_2}{dt}\cos\theta_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = l\frac{d\theta_1}{dt}\sin\theta_1 + l\frac{d\theta_2}{dt}\sin\theta_2$$

y la energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2\right] \\ &= \frac{ml^2}{2}\left[2\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right] \end{aligned}$$

La energía potencial es (tomamos el origen en el punto en el que pivota el primer péndulo)

$$U = -2mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2$$

El lagrangiano completo es

$$L = \frac{ml^2}{2}\left[2\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\theta_1}{dt}\frac{d\theta_2}{dt}\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right] + 2mgl\cos\theta_1 + mgl\cos\theta_2$$

de donde obtenemos las ecuaciones de Lagrange para θ_1 y θ_2:

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\theta_1'} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial\theta_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\theta_2'} = 0$$

$$-2ml^2\frac{d^2\theta_1}{dt^2}-ml^2\left[\frac{d^2\theta_2}{dt^2}\cos(\theta_1-\theta_2)-\left(\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{d\theta_2}{dt}\right)\frac{d\theta_2}{dt}\sin(\theta_1-\theta_2)\right]=0$$

$$ml^2\frac{d\theta_1}{dt}\frac{d\theta_2}{dt}\sin(\theta_1-\theta_2)-mgl\sin\theta_2$$

$$-ml^2\frac{d^2\theta_2}{dt^2}-ml^2\left[\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\cos(\theta_1-\theta_2)-\left(\frac{d\theta_1}{dt}-\frac{d\theta_2}{dt}\right)\frac{d\theta_1}{dt}\sin(\theta_1-\theta_2)\right]=0$$

y simplificando,

$$\begin{cases} 2\dfrac{d^2\theta_1}{dt^2}+\dfrac{d^2\theta_2}{dt^2}\cos(\theta_1-\theta_2)+\left(\dfrac{d\theta_2}{dt}\right)^2\sin(\theta_1-\theta_2)=-2\dfrac{g}{l}\sin\theta_1 \\ \\ \dfrac{d^2\theta_1}{dt^2}\cos(\theta_1-\theta_2)+\dfrac{d^2\theta_2}{dt^2}-\left(\dfrac{d\theta_1}{dt}\right)^2\sin(\theta_1-\theta_2)=-\dfrac{g}{l}\sin\theta_2 \end{cases}$$

De aquí se pueden despejar las derivadas segundas, obteniéndose

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=\frac{\dfrac{g}{l}\left[\dfrac{1}{2}\sin\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\sin\theta_1\right]-\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{d\theta_1}{dt}\right)^2\cos(\theta_1-\theta_2)+\left(\dfrac{d\theta_2}{dt}\right)^2\right]\sin(\theta_1-\theta_2)}{1-\dfrac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2}=\frac{\left[\left(\dfrac{d\theta_1}{dt}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\theta_2}{dt}\right)^2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]\sin(\theta_1-\theta_2)+\dfrac{g}{l}\left[\sin\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)-\sin\theta_2\right]}{1-\dfrac{1}{2}\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

Estas ecuaciones no lineales se pueden linealizar haciendo la aproximación armónica, es decir, suponiendo ángulos pequeños y despreciando potenciales cuadráticas y superiores:

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+\frac{2g}{l}\theta_1=\frac{g}{l}\theta_2$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2}+\frac{2g}{l}\theta_2=\frac{2g}{l}\theta_1$$

7. *Se tiene un péndulo simple de masa m y longitud b, que pivota en un soporte sin masa que se mueve en la dirección horizontal con aceleración a (Fig. 1). Obtener las ecuaciones de movimiento y encontrar el periodo de las oscilaciones pequeñas alrededor del punto de equilibrio. Repetir el problema si el soporte se mueve hacia arriba con la misma aceleración.*

Supongamos el primer caso planteado, en el que el soporte del péndulo se mueve en horizontal con aceleración constante a. Puesto que su masa es nula, no lo incluimos explícitamente en la dinámica. Tomemos como coordenada generalizada el ángulo θ. La relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) con respecto a un sistema inercial y θ es

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2+b\sin\theta$$
$$y=-b\sin\theta$$

Fig. 1 

Fig. 2 

donde el origen de este sistema está sobre la línea a lo largo de la cual se mueve el soporte. Derivando con respecto a t,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at + b\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$
$$\frac{dy}{dt} = -b\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}m\left[\left(v_0 + at + b\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right)^2 + b^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin^2\theta\right]$$
$$= \frac{1}{2}m\left[(v_0+at)^2 + b^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2b(v_0+at)\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right]$$

y la energía potencial $U = -mgb\cos\theta$, con lo cual el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m\left[(v_0+at)^2 + b^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2b(v_0+at)\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right] + mgb\cos\theta$$

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\theta'} = 0,$$

$$-mb(v_0+at)\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - mgb\sin\theta - mb^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - mba\cos\theta + mb(v_0+at)\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 0,$$

o sea,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{a}{b}\cos\theta + \frac{g}{b}\sin\theta = 0$$

El punto de equilibrio de este movimiento, θ_e, ocurre cuando $d^2\theta/dt^2 = 0$,

$$\frac{a}{b}\cos\theta_e + \frac{g}{b}\sin\theta_e = 0 \quad\rightarrow\quad \tan\theta_e = -\frac{a}{g}$$

Hacemos ahora una aproximación armónica escribiendo $\theta \equiv \theta_e + \eta$ y considerando $|\eta| << 1$:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{a}{b}\cos(\theta_e+\eta) + \frac{g}{b}\sin(\theta_e+\eta) = \frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(\frac{a}{b}\cos\theta_e + \frac{g}{b}\sin\theta_e\right) + \left(\frac{g}{b}\cos\theta_e - \frac{a}{b}\sin\theta_e\right)\eta + ... = 0$$

El término constante es nulo según 2), así que

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(\frac{g}{b}\cos\theta_e - \frac{a}{b}\sin\theta_e\right)\eta \approx 0$$

$$\cos^2\theta_e + \sin^2\theta_e = 1$$

de donde se obtiene

$$\cos\theta_e = \frac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}, \quad \sin\theta_e = -\frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}}$$

La solución con los signos del seno y coseno cambiados es también posible matemáticamente, pero no físicamente, ya que el ángulo θ_e es de esperar sea negativo para a positivo. Esto hace que el factor sea siempre positivo, lo que corresponde a oscilaciones armónicas alrededor del ángulo de equilibrio. Finalmente,

$$\frac{g}{b}\cos\theta_e - \frac{a}{b}\sin\theta_e = \frac{\sqrt{g^2+a^2}}{b}$$

con lo cual la frecuencia angular de oscilación ω_0 viene dada por

$$\omega_0^2 = \frac{\sqrt{g^2+a^2}}{b}$$

(cuando $a = 0$, es decir, el soporte se encuentra en reposo, recuperamos el resultado conocido para un péndulo armónico).

Supongamos ahora que el soporte se mueve hacia arriba con aceleración constante a. Situando el origen en un sistema inercial, las coordenadas cartesianas de la masa son

$$x = b\sin\theta, \quad y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - b\cos\theta$$

Las velocidades cartesianas son

$$\frac{dx}{dt} = b\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 + at + b\frac{d\theta}{dt}\sin\theta$$

y la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m\left[(v_0+at)^2 + b^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2b(v_0+at)\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right]$$

La energía potencial es

$$U = mg\left(y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - b\cos\theta\right)$$

y el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\left[(v_0+at)^2 + b^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2b(v_0+at)\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right] - mg\left(y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - b\cos\theta\right)$$

$$mb(v_0 + at)\frac{d\theta}{dt}\cos\theta - mgb\sin\theta - mb^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - mba\sin\theta - mb(v_0 + at)\frac{d\theta}{dt}\cos\theta = 0$$

Simplificando,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g+a}{b}\sin\theta = 0$$

de manera que el péndulo se mueve como si el soporte estuviera inmóvil pero la masa se encontrara sometida a una gravedad efectiva con aceleración $g + a$. El ángulo de equilibrio es $\theta = 0$, y la aproximación armónica conduce a un movimiento armónico simple de frecuencia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g+a}{b}}.$$

8. *Con referencia al problema 7, suponer ahora que el soporte tiene masa m_1 y que puede moverse sin fricción en la dirección horizontal (Fig. 2). Obtener las ecuaciones de movimiento y resolverlas haciendo una aproximación armónica.*

Tomemos como coordenadas generalizadas la posición de la masa m_1 a lo largo de la línea horizontal, x_1, y el ángulo que forma el péndulo con la vertical. Las coordenadas de la masa del péndulo son

$$x = x_1 + b\sin\theta, \quad y = -b\cos\theta$$

y la energía cinética

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx_1}{dt} + b\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right)^2 + b^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin^2\theta\right] \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m)\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mb^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mb\frac{dx_1}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta \end{aligned}$$

La energía potencial es $U = -mgb\cos\theta$, y el lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m)\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mb^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mb\frac{dx_1}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta + mgb\cos\theta$$

Escribamos ahora las ecuaciones de Lagrange para x_1 y θ:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x_1'} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \theta'} = 0$$

$$-mb\frac{dx_1}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta - mgb\sin\theta - mb^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - mb\frac{d^2x_1}{dt^2}\cos\theta + mb\frac{dx_1}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 0$$

Simplificando,

$$\left(1+\frac{m_1}{m}\right)\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta = b\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{b}\frac{d^2x_1}{dt^2}\cos\theta = -\frac{g}{b}\sin\theta$$

Haciendo la aproximación armónica, despreciamos términos en θ^2 y superiores, es decir,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta \approx 0$$

$$\cos\theta \approx 1, \quad \sin\theta \approx \theta$$

con lo cual

$$\left(1+\frac{m_1}{m}\right)\frac{d^2x_1}{dt^2} + b\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{b}\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{g}{b}\theta$$

Despejando las derivadas segundas,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \left(\frac{m}{m_1}\right)g\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(1+\frac{m}{m_1}\right)\frac{g}{b}\theta$$

La segunda ecuación es la de péndulo simple armónico, y se integra fácilmente para dar

$$\theta(t) = A_0\cos(\omega_0 t - \delta), \quad \omega_0^2 = \left(1+\frac{m}{m_1}\right)\frac{g}{b}$$

Una vez obtenida $\theta(t)$ la primera ecuación se integra dos veces para dar $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \frac{mgA_0}{m_1}\left[c_1 + c_2 t - \frac{1}{\omega_0^2}\cos(\omega_0 t - \delta)\right]$$

Por tanto, en aproximación lineal las dos masas se mueven en fase; m_1 se traslada horizontalmente, con una posición media dotada de movimiento uniforme (las constantes c_1 y c_2 se determinan ajustando las condiciones iniciales, que son la posición inicial $x_1(0)$ y la velocidad inicial $v_1(0)$). La frecuencia de movimiento depende de la relación entre masas. Por ejemplo, si las masas son iguales, $\omega_0 = \sqrt{2g/b}$, es decir, $\sqrt{2}$ veces la frecuencia natural del mismo péndulo pero fijo.

l_0. La longitud del hilo de la polea es l. Obtener el lagrangiano, las ecuaciones de movimiento de Lagrange e integrarlas, describiendo el movimiento.

Escojamos como coordenadas generalizadas x, la distancia desde el techo hasta el centro de la polea, e y, la distancia desde este centro hasta la masa m_1. θ, el ángulo que forma un radio arbitrario del disco de la polea con la vertical, se puede poner en términos de y, ya que

$$\frac{dy}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

Las coordenadas (inerciales) de cada masa, medidas desde el techo y hacia abajo, son:

$$\begin{aligned} M &: x \\ m_1 &: x + y \\ m_2 &: x + l - y - \pi R \end{aligned}$$

Las velocidades son por tanto

$$\begin{aligned} M &: \frac{dx}{dt} \\ m_1 &: \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \\ m_2 &: \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

y la energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{I}{R^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + (m_1 - m_2)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

La energía potencial es la debida al muelle y a las tres masas, que se encuentran en el campo gravitatorio terrestre:

$$U = -Mgx - m_1 g(x + y) - m_2(x + l - y - \pi R) + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

donde hemos llamado l_0 a la longitud natural del muelle. El lagrangiano se escribe:

$$L = \frac{1}{2}(M + m_1 + m_2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + (m_1 - m_2)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}$$

$$+Mgx + m_1 g(x + y) + m_2 g(x + l - y - \pi R) - \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

Obtengamos ahora las ecuaciones de Lagrange para x e y:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

$$(m_1 - m_2)g - \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\frac{d^2y}{dt^2} - (m_1 - m_2)\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

De aquí podemos despejar las derivadas segundas, obteniendo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - k(x - l_0)\frac{m_1 + m_2 + I/R^2}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + I/R^2) - (m_1 - m_2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k(x - l_0)\frac{m_1 - m_2}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + I/R^2) - (m_1 - m_2)^2}$$

Ambas ecuaciones se pueden integrar fácilmente, ya que son ecuaciones lineales. La primera da un movimiento armónico simple de frecuencia ω_0, con

$$\omega_0^2 = \frac{k(m_1 + m_2 + I/R^2)}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + I/R^2) - (m_1 - m_2)^2}$$

Por tanto, la polea efectúa oscilaciones de frecuencia ω_0. Finalmente, como d^2y/dt^2 es una función lineal de $x(t)$, y ésta es una función sinusoidal, $y(t)$ será una función cuadrática del tiempo superpuesta a una oscilación de la misma frecuencia que la anterior.

10. *Una partícula se mueve en contacto con una superficie lisa (sin rozamiento), dada mediante la función*

$$z(x, y) = A\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}$$

en donde la gravedad actúa en la dirección negativa de las z. Utilizando coordenadas cartesianas, escribir las ecuaciones que dan la fuerza de reacción sobre la masa m debida a la superficie.

Tomemos como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas, (x, y, z), e incorporemos la ligadura a través de un multiplicador de Lagrange $\lambda(t)$. El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - mgz$$

y las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

donde la función de ligadura es

$$f(x, y, z) = A\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b} - z$$

$$-m\frac{d^2y}{dt^2}+A\frac{2\pi\lambda}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}=0$$

$$-mg-m\frac{d^2z}{dt^2}-\lambda=0 \tag{2}$$

o sea,

$$\frac{d^2x}{dt^2}-A\frac{\pi\lambda}{ma}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-A\frac{2\pi\lambda}{mb}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{b}=0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}+g=0$$

Estas ecuaciones, junto con la ecuación de ligadura, permiten obtener las incógnitas, $x(t), y(t), z(t)$ y $\lambda(t)$. Los términos que contienen el multiplicador λ en la ecuación (2) son las componentes de la fuerza generalizada, que es la fuerza necesaria para que se cumpla la ligadura, es decir, la fuerza de reacción normal que ejerce la superficie:

$$\left(A\frac{\pi\lambda}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}, A\frac{2\pi\lambda}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{a}, -\lambda\right)$$

[nótese que estas son las componentes de un vector normal a la superficie en el punto (x, y) ya que, salvo el factor común λ, coinciden con el vector que se obtendría derivando la función altura $z(x, y)$, que sería $(-\partial z/\partial x, -\partial z/\partial y, 1)$]. Si la superficie fuese plana, $A = 0$, y la fuerza de ligadura sólo tendría componente z. De la tercera ecuación de movimiento, tendríamos $d^2z/dt^2 = 0$ ya que $z = 0$, y $\lambda = -mg$ con lo que la fuerza de reacción a lo largo de z sería $-\lambda = mg$ y las otras componnetes serían nulas. Las ecuaciones para x e y se integrarían trivialmente, dando un movimiento uniforme. Para el caso general $A \neq 0$ las ecuaciones no se pueden resolver analíticamente, al ser no lineales.

11. *Obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange para una partícula que desliza, a modo de cuenta, por un alambre en espiral (Fig. 4), discutiendo la forma de las fuerzas de reacción.*

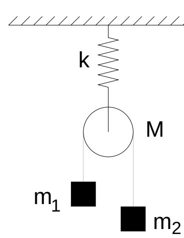


Fig. 3

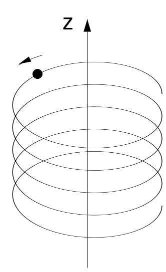


Fig. 4

Consideremos coordenadas cilíndricas. Las ecuaciones de ligadura son las ecuaciones de una curva espiral. Tomando el eje de ésta según z, las ecuaciones son $z = p\phi$, $\rho = a$, siendo p el paso de la espiral a lo largo de z y a su radio. Las funciones de ligadura son pues

$$f_1(\rho, \phi, z) = z - p\phi$$
$$f_2(\rho, \phi, z) = \rho - a$$

y las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \rho'} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \rho} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \phi'} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \phi} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z'} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

o sea,

$$m\rho \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - m\frac{d^2\rho}{dt^2} + \lambda_2 = 0$$

$$-m\rho^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} - p\lambda_1 = 0$$

$$-mg - m\frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda_1 = 0$$

Estas ecuaciones se pueden integrar para dar, junto con las ligaduras, el comportamiento en el tiempo de ρ, ϕ y z. Obsérvese que, de la primera ecuación, λ_2 se puede identificar como la fuerza normal que ejerce el alambre hacia afuera (el primer término es la fuerza centrífuga, mientras que el segundo es nulo debido a que $\rho = a$). De la tercera, λ_1 es la fuerza normal que ejerce el alambre hacia arriba. Aplicando la ligadura $\rho = a$, la segunda ecuación da para λ_1:

$$\lambda_1 = -\frac{ma^2}{p}\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Substituyendo en la tercera, y despejando $d^2\phi/dt^2$:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{p}{p^2 + a^2} g$$

Integrando,

$$\phi(t) = \phi_0 + \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0 t - \frac{pg}{2(p^2 + a^2)} t^2$$

de donde

$$\lambda_1 = \frac{ma^2 g}{p^2 + a^2}$$

Nótese que, si $p = 0$ (la hélice es en realidad un círculo plano), $\lambda_1 = mg$, como se esperaría. El segundo multiplicador de Lagrange es

$$\lambda_2 = -ma \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0^2 + 2ma \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_0 \frac{pg}{p^2 + a^2} t - \frac{map^2 g^2}{(p^2 + a^2)^2} t^2$$

12. Una cuenta de masa m desliza sin rozamiento a lo largo del alambre recto AB, que es rígido (ver Fig. 5). La distancia mínima y constante del alambre al origen O, alrededor del cual el alambre gira con velocidad angular constante $\dot\theta = \omega$, es h. La gravedad actúa como se indica en la figura. La distancia (variable) de la cuenta al punto C se denota por q, mientras que el ángulo (también variable) entre el eje x y la recta OC es θ. Tomando como condiciones iniciales

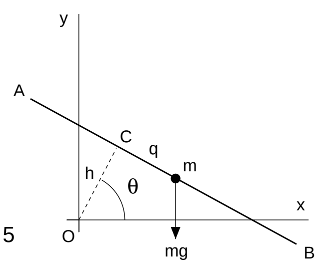
$$\theta(0) = 0, \qquad q(0) = 0, \qquad \dot q(0) = 0$$

demostrar que la dependencia temporal de la coordenada q es

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2}(\cosh \omega t - \cos \omega t)$$

Dar una explicación física del comportamiento de esta coordenada.

Fig. 5



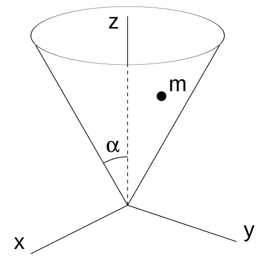


Fig. 6

Para escribir el lagrangiano necesitamos primero la energía cinética T. Las coordenadas cartesianas de la cuenta son, en función del ángulo θ y de la distancia q, como sigue:

$$x = h\cos\theta + q\sin\theta, \quad y = h\sin\theta - q\cos\theta$$

Derivando con respecto al tiempo,

$$\dot x = -h\dot\theta\sin\theta + \dot q\sin\theta + q\dot\theta\cos\theta, \quad \dot y = h\dot\theta\cos\theta - \dot q\cos\theta + q\dot\theta\sin\theta$$

Por tanto, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(h^2\dot\theta^2 + \dot q^2 + q^2\dot\theta^2 - 2h\dot\theta\dot q)$$

donde hemos simplificado algunos términos. La energía cinética es $U = mgy$, de donde el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(h^2\dot\theta^2 + \dot q^2 + q^2\dot\theta^2 - 2h\dot\theta\dot q) - mg(h\sin\theta - q\cos\theta)$$

El ángulo θ es tal que $\dot\theta = \omega$, que es constante. Como nos dicen que $\theta(0) = 0$, tenemos $\theta(t) = \omega t$ y podemos escribir el lagrangiano en términos únicamente de la coordenada q:

$$L = \frac{1}{2}m(h^2\omega^2 + \dot q^2 + q^2\omega^2 - 2h\omega\dot q - mg(h\sin\omega t - q\cos\omega t)$$

Apliquemos ahora la ecuación de Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 0$$

La solución general de la ecuación homogenea,

$$\ddot{q} - \omega^2 q = 0$$

es

$$q_{\text{h}}(t) = a \cosh \omega t + b \sinh \omega t$$

Para obtener la solución particular de la no homogenea probamos

$$q_{\text{p}}(t) = c \cos \omega t + d \sin \omega t$$

y sustituimos en la ecuación:

$$\begin{aligned}
&\dot{q}_{\text{p}}(t) = -c\omega \sin \omega t + d\omega \cos \omega t, \\
&\ddot{q}_{\text{p}}(t) = -c\omega^2 \cos \omega t - d\omega^2 \sin \omega t, \\
&-c\omega^2 \cos \omega t - d\omega^2 \sin \omega t - \omega^2 (c \cos \omega t + d \sin \omega t) = g \cos \omega t, \\
&-2c\omega^2 \cos \omega t - 2d\omega^2 \sin \omega t = g \cos \omega t
\end{aligned}$$

de donde $c = -g/2\omega^2$ y $d = 0$, y

$$q(t) = q_{\text{h}}(t) + q_{\text{p}}(t) = a \cosh \omega t + b \sinh \omega t - \frac{g}{2\omega^2} \cos \omega t$$

Imponemos ahora las condiciones iniciales, $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$:

$$0 = a - \frac{g}{2\omega^2}, \quad 0 = b\omega$$

de donde $a = g/2\omega^2$ y $b = 0$, con lo cual la solución final es

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2} (\cos \omega t - \cosh \omega t)$$

Puede verse con facilidad, a base de sustituir en la ecuación, que ésta es efectivamente la solución de la ecuación que cumple las condiciones iniciales.

La interpretación física de la solución es la siguiente. La función contiene dos términos: uno es un coseno hiperbólico, función que crece con el tiempo de manera exponencial; otro es un coseno trigonométrico, que oscila en el tiempo con frecuencia ω. Así que la cuenta efectúa un movimiento oscilatorio de frecuencia igual a la de rotación del alambre, superpuesto a un movimiento secular de alejamiento del punto C, cuyo origen es la fuerza centrífuga a la que está sometida la cuenta.

13. *Una partícula de masa m se encuentra forzada a moverse sobre la superficie interior de un cono recto de semiapertura α (ver Fig. 6). El eje del cono es vertical, de manera que la partícula se ve sometida a la influencia de la gravedad.*

- *Escribir el lagrangiano en coordenadas cilíndricas (tomando el eje del cono como z).*
- *Demostrar que la partícula se ve sometida a una fuerza central dirigida hacia el punto sobre el eje del cono situado a la misma altura z que la partícula.*

La relación entre las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) es

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \quad z = z$$

Derivando con respecto al tiempo t para obtener la velocidad cartesiana:

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\phi$$
$$\dot{y} = \dot{\rho}\sin\phi + \rho\dot{\phi}\cos\phi$$

La energía cinética es por tanto

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\left[(\dot{\rho}\cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\phi)^2 + (\dot{\rho}\sin\phi + \rho\dot{\phi}\cos\phi)^2 + \dot{z}^2\right] = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2)$$

donde en el último paso hemos simplificado varios términos. La energía potencial es $U = mgz$, de manera que el lagrangiano es

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

La partícula se ve sometida a una ligadura, a saber, ha de estar sobre la superficie interior del cono. Matemáticamente esta ligadura se expresa a través de la relación $\rho = z\tan\alpha$. Sustituyendo en el lagrangiano para deshacernos, por ejemplo, de la coordenada z (también podríamos alternativamente eliminar ρ en lugar de z) pasamos a tener una función sólo de las coordenadas ρ y ϕ:

$$L(\rho, \dot{\rho}, \phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{\tan^2\alpha}\right) - mgz = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2\alpha} + \rho^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{mg\rho}{\tan\alpha}$$

La coordenada ϕ no aparece explícitamente en el lagrangiano, así que es ignorable. Habrá por tanto una cantidad conservada (que va a ser la componente z del momento angular alrededor del punto O). Obtengamos las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0$$

Haciendo las derivadas, obtenemos:

$$m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{mg}{\tan\alpha} - \frac{m\ddot{\rho}}{\sin^2\alpha} = 0$$

$$l \equiv m\rho^2\dot{\phi} = \text{const.}$$

Como sabemos, cuando la coordenada ignorable es un ángulo, se conserva la correspondiente componente a lo largo del eje de rotación asociado a ese ángulo; en este caso, es el eje z, por lo que l será la componente z del momento angular $\mathbf{L}$, es decir, L_z (podemos ver ésto explícitamente, si queremos, calculando las componentes del momento angular. Para ello es más fácil trabajar en esféricas, ya que el ángulo polar de la partícula, θ, es constante ($\theta = \alpha$), y por tanto la componente correspondiente de la velocidad, v_θ, es nula. Entonces:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr\hat{\mathbf{e}}_r \times (v_r\hat{\mathbf{e}}_r + v_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi) = -mrv_\phi\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Ahora, teniendo en cuenta[1] que $v_\phi = r\dot{\phi}\sin\theta$,

$$\mathbf{L} = -mr^2\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x - mr^2\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y + mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta\hat{\mathbf{e}}_z$$

y como $\rho = r\sin\theta$, nos queda

$$L_z = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta = m\rho^2\dot{\phi}$$

que es la cantidad que antes hemos llamado l).

Despejando, $\dot{\phi} = l/m\rho^2$, y sustituyendo en el lagrangiano, obtenemos una función únicamente de la coordenada ρ, de manera que el problema se convierte en un problema efectivo en una dimensión:

$$L(\rho,\dot{\rho}) = \frac{m\dot{\rho}^2}{2\sin^2\alpha} + \frac{l^2}{2m\rho^2} - \frac{mg\rho}{\tan\alpha}$$

Sustituyendo $\dot{\phi}$ en la ecuación para ρ, llegamos a

$$m\ddot{\rho} = \frac{l^2\sin^2\alpha}{m\rho^3} - mg\sin\alpha\cos\alpha$$

de manera que podemos identificar una fuerza efectiva $F(\rho)$

$$F(\rho) = \frac{l^2\sin^2\alpha}{m\rho^3} - mg\sin\alpha\cos\alpha$$

que incluye la ligadura, la fuerza gravitatoria real y la fuerza centrífuga (que viene de haber eliminado la coordenada ϕ). Esta fuerza se puede derivar de una energía potencial $U(\rho)$, de forma que

$$F(\rho) = -\frac{\partial U}{\partial\rho} \quad\longrightarrow\quad U(\rho) = -\int d\rho F(\rho)$$

[1] Para ver ésto, tenemos en cuenta que

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r = r(\sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z)$$

que se obtiene de proyectar el vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_r$ sobre los ejes cartesianos. Derivando,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}(\sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z) + r(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \dot{\theta}\cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_y$$
$$-\dot{\theta}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_z) = (\dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)\hat{\mathbf{e}}_x + (\dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)\hat{\mathbf{e}}_y$$
$$+(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\hat{\mathbf{e}}_z$$

Ahora, podemos invertir las relaciones

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_z, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_z, \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = -\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_y$$

(que se obtienen proyectando los correspondientes vectores unitarios sobre los ejes cartesianos), obteniendo

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta\cos\phi\hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \hat{\mathbf{e}}_y = \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta\sin\phi\hat{\mathbf{e}}_\theta + \cos\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_r - \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

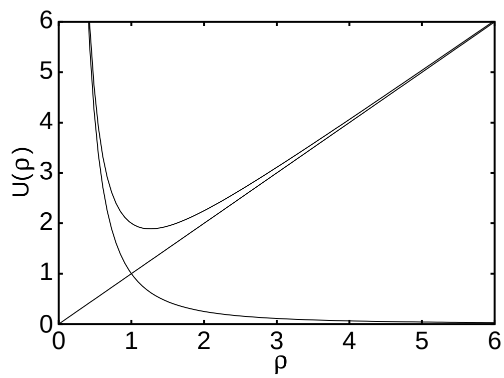
Sustituyendo en la expresión para $\mathbf{v}$, y simplificando,

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

de donde

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\phi = r\dot{\phi}\sin\theta$$

donde la constante c se puede ajustar una vez elegido el origen de energía potencial. Su valor no es importante, así que podemos poner $c = 0$. Lo importante es que el problema se puede escribir como el problema de una partícula efectiva que se mueve en la dirección ρ y que se encuentra sometida a una fuerza que sólo depende de la coordenada a lo largo de esa dirección, ρ. La fuerza, por tanto, es central y está dirigida hacia el eje z. Esto no quiere decir que la fuerza real vaya a lo largo de esa dirección, sino que el efecto de las coordenadas eliminadas z y ϕ aparece como un fuerza central a lo largo de la dirección ρ, la dirección radial[2]. Naturalmente, si ρ varía la coordenada z, que está atada a ρ a través de la ligadura, también variará (fruto de la acción de la gravedad). El potencial efectivo U consta de dos términos: uno crece linealmente con ρ,



mientras que el otro (el término centrífugo) decrece según $1/\rho^2$. Estos dos términos, junto con su suma, se representan en la figura para determinados valores de las constantes. Podemos ver que la suma de ambos términos da lugar a la existencia de un mínimo, cuya posición se puede calcular evaluando la derivada primera e igualando a cero:

$$mg \sin\alpha \cos\alpha - \frac{l^2 \sin^2\alpha}{m\rho_{\text{min}}^3} = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho_{\text{min}} = \left(\frac{l^2 \tan\alpha}{m^2 g}\right)^{1/3}$$

La derivada segunda en el mínimo es

$$\left.\frac{d^2U}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho_{\text{min}}} = \frac{3l^2 \sin^2\alpha}{m\rho_{\text{min}}^4} = 3mg\left(\frac{m^2 g}{l^2 \tan\alpha}\right)^{1/3} \cos\alpha \sin\alpha$$

[2]El problema, por supuesto, se puede analizar también en términos de fuerzas en el contexto de la mecánica de Newton. Las fuerzas existentes son: dos reales, que son la normal a la superficie, F_N, y la gravedad, $F_g = mg$, y otra ficticia, que es la fuerza centrífuga, $F_c = mv^2/\rho = m\rho\dot{\phi}^2$. La suma vectorial de estas tres fuerzas se puede realizar por componentes. A lo largo de la dirección normal a la superficie la fuerza normal ha de compensar exactamente a las otras dos:

$$F_N = mg \sin\alpha + m\rho\dot{\phi}^2 \cos\alpha$$

A lo largo de la dirección tangencial a la superficie las dos componentes que quedan son la que viene de la gravedad, $F_g^t = mg \cos\alpha$, y la que viene de la fuerza centrífuga, $F_c^t = m\rho\dot{\phi}^2 \sin\alpha$. Si $F_g^t > F_c^t$ la masa caerá al fondo del cono. Si $F_g^t < F_c^t$ la masa subirá hacia arriba. Cuando $F_g^t = F_c^t$ la masa permanecerá a una altura constante h. Esta condición se traduce en

$$mg \cos\alpha = m\rho\dot{\phi}^2 \sin\alpha, \quad \longrightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{\sqrt{g/h}}{\tan\alpha}$$

donde hemos usado la relación $\rho = h \tan\alpha$. Ésta es la velocidad de giro necesaria para mantener esa situación, que luego obtendremos a través de la mecánica de Lagrange.

Por tanto, para cada valor de m, α y l existe un tamaño de trayectoria circular, con radio $\rho_{\min}$, para el cual ρ no varía, siendo una órbita circular estable. Esta condición se puede traducir en una condición sobre la energía total E, haciendo $E = U(\rho_{\min})$. Si $E > U(\rho_{\min})$ entonces la masa m efectuará oscilaciones alrededor del radio $\rho_{\min}$ lo cual implica, obviamente, que la coordenada z también oscila entre dos valores. En cualquier caso, la órbita va a ser estable ya que discurre alrededor de un radio que representa un mínimo de la energía potencial efectiva.

Si la altura de la masa m es constante, $z = h$, entonces $\rho = h \tan\alpha$ es también constante. Para que la masa gire en un círculo de radio $h\tan\alpha$ alrededor del eje z y a una misma altura el valor del momento angular l ha de ser tal que $\rho_{\min} = h\tan\alpha$. En caso contrario, este círculo no es constante y ρ (y z) oscilará entre dos valores alrededor del mínimo; la condición para que el radio sea constante es

$$h\tan\alpha = \rho_{\min} = \left(\frac{l^2\tan\alpha}{m^2 g}\right)^{1/3} \qquad \longrightarrow \qquad l = mh\tan\alpha\sqrt{gh}$$

lo que da una velocidad angular

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{g/h}}{\tan\alpha}$$

A medida que α disminuye (el cono se cierra) la velocidad angular necesaria para mantener el círculo estable es mayor, como cabría esperar de antemano. Asimismo, a medida que disminuye h la velocidad angular necesaria también aumenta.

Si la masa se mueve en un círculo estable, con el valor de l calculado, la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de este movimiento viene dada por la derivada segunda de U, que hemos calculado antes. Sustituyendo el valor de l,

$$\left.\frac{d^2U}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho_{\min}} = 3mg\left(\frac{m^2 g}{m^2 g h^3\tan^3\alpha}\right)^{1/3}\cos\alpha\sin\alpha = \frac{3mg}{h}\cos^2\alpha$$

La frecuencia es

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2U}{d\rho^2}\right|_{\rho=\rho_{\min}}} = \sqrt{\frac{3g}{h}}\cos\alpha$$