1. *Se tiene un oscilador armónico con parámetro de rozamiento β y frecuencia natural ω_0 que se encuentra sometido a una fuerza $F(t)$, que empieza a actuar en $t = t_0$, de manera que $F(t) = 0$ para $t < t_0$. En el instante t_0 la posición y la velocidad del oscilador son x_0 y $\dot{x}_0$, respectivamente.*

- *Una solución de este problema viene dada mediante la función de Green:*

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t,t') F(t'), \quad G(t,t') = \begin{cases} 0, & t < t' \\ \dfrac{e^{-\beta(t-t')}}{m\omega_1} \sin\omega_1(t-t'), & t > t' \end{cases}$$

  Puesto que esta expresión no contiene constantes arbitrarias, es una solución particular de la ecuación no homogenea. Demuéstrese que esta solución verifica $x_p(t_0) = 0$, y $\dot{x}_p(t_0) = 0$.

- *Escribir la solución general para el movimiento del oscilador (nótese que, al ser un problema no homogeneo, habrá que escribir una suma de dos soluciones: la general de la homogenea, $x_h(t)$, y una particular de la no homogenea, $x_p(t)$).*

- *Ajustar las constantes arbitrarias de acuerdo a las condiciones iniciales del problema. ¿Cuánto valdrían, y cómo sería la solución particular del problema completo si $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = 0$?*

Para demostrar que $x_p(t_0) = 0$ y $\dot{x}_p(t_0) = 0$ escribamos la solución sustituyendo la función de Green en la integral. Para ello, observemos que $G(t,t') = 0$ para $t' > t$ (resultado del principio de causalidad, por el que el efecto de una perturbación en el instante t no puede venir de perturbaciones aplicadas en instantes posteriores t'). Por tanto, el límite superior de la integral se puede sustituir por t. Asimismo, el límite inferior se puede sustituir por t_0, ya que la fuerza externa $F(t')$ es nula para $t' < t$. Nos queda por tanto

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_1} \int_{t_0}^{t} dt' F(t') e^{-\beta(t-t')} \sin\omega_1(t-t')$$

A partir de aquí es obvio que $x_p(t_0) = 0$, ya que los límites de la integral son iguales.

Para ver que $\dot{x}_p(t_0) = 0$, derivamos primero con respecto a t:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= \frac{1}{m\omega_1} \\ &\times \left\{ F(t') e^{-\beta(t-t')} \sin\omega_1(t-t') \Big|_{t'=t} + \int_{t_0}^{t} dt' F(t') e^{-\beta(t-t')} [-\beta \sin\omega_1(t-t') + \omega_1 \cos\omega_1(t-t')] \right\} \\ &= \frac{1}{m\omega_1} \int_{t_0}^{t} dt' F(t') e^{-\beta(t-t')} [-\beta \sin\omega_1(t-t') + \omega_1 \cos\omega_1(t-t')] \end{aligned}$$

Sustituyendo $t = t_0$, la integral es igualmente cero debido a que ambos límites son iguales.

La solución general del problema será por tanto igual a

$$\begin{aligned} x(t) = x_h(t) + x_p(t) &= e^{-\beta(t-t_0)} [A\cos\omega_1(t-t_0) + B\sin\omega_1(t-t_0)] \\ &+ \frac{1}{m\omega_1} \int_{t_0}^{t} dt' F(t') e^{-\beta(t-t')} \sin\omega_1(t-t') \end{aligned}$$

donde hemos supuesto un movimiento infraamortiguado.

Para ajustar las condiciones iniciales, sustituimos en t_0:

$$x_0 = x(t_0) = A, \quad \dot{x}_0 = -A\beta + B\omega_1$$

de donde

$$A = x_0, \quad B = \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega_1}$$

y la solución particular sería

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta(t-t_0)}[x_0 \cos\omega_1(t-t_0) + \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega_1}\sin\omega_1(t-t_0)] \\ &+ \frac{1}{m\omega_1}\int_{t_0}^{t} dt' F(t') e^{-\beta(t-t')}\sin\omega_1(t-t') \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales en t_0 aparecen únicamente en la parte de la solución de la ecuación homogenea, mientras que la solución particular de la ecuación no homogenea no afecta para nada al ajuste de las condiciones iniciales. Si $x_0 = 0$ y $\dot{x}_0 = 0$ la solución sería igual a la solución particular de la ecuación no homogenea:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_1}\int_{t_0}^{t} dt' F(t') e^{-\beta(t-t')}\sin\omega_1(t-t')$$

2. *Sea un oscilador armónico con parámetro de rozamiento β y frecuencia natural ω_0 que se encuentra sometido a una fuerza $F(t) = F_0 e^{-\gamma t}$ para $t \geq 0$. Obtener la solución del problema, si la posición inicial es $x_0 = 0$ y la velocidad inicial es $\dot{x}_0 = 0$, utilizando el método de la función de Green. ¿Qué aspecto tiene la solución si $\beta \gg \gamma$? ¿Y si $\beta \ll \gamma$?*

Para resolver el problema utilizamos lo aprendido en el problema anterior. Si las condiciones iniciales son todas nulas, la solución es

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m\omega_1}\int_{0}^{t} dt' F(t') e^{-\beta(t-t')}\sin\omega_1(t-t') \\ & \frac{F_0}{m\omega_1}\int_{0}^{t} dt' e^{-\gamma t'} e^{-\beta(t-t')}\sin\omega_1(t-t') \end{aligned}$$

Para hacer esta integral, hagamos el cambio de variable $\eta \equiv t - t'$ y saquemos de la integral lo que no dependa de η:

$$x(t) = \frac{F_0 e^{-\gamma t}}{m\omega_1}\int_{0}^{t} d\eta e^{(\gamma-\beta)\eta}\sin\omega_1\eta$$

Ahora hagamos la integral

$$I = \int_{0}^{t} d\eta e^{(\gamma-\beta)\eta}\sin\omega_1\eta$$

por partes:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^{(\gamma-\beta)\eta}}{\omega_1}\cos\omega_1\eta\Big|_{0}^{t} + \frac{\gamma-\beta}{\omega_1}\int_{0}^{t} d\eta e^{(\gamma-\beta)\eta}\cos\omega_1\eta \\ &= \frac{1 - e^{(\gamma-\beta)t}\cos\omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\gamma-\beta}{\omega_1}\int_{0}^{t} d\eta e^{(\gamma-\beta)\eta}\cos\omega_1\eta \end{aligned}$$

Ahora volvemos a hacer la integral que queda por partes:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1-e^{(\gamma-\beta)t}\cos\omega_1 t}{\omega_1} \\
&+ \frac{\gamma-\beta}{\omega_1}\left[\frac{e^{(\gamma-\beta)\eta}}{\omega_1}\sin\omega_1\eta\Big|_0^t - \frac{\gamma-\beta}{\omega_1}\int_0^t d\eta e^{(\gamma-\beta)\eta}\sin\omega_1\eta\right] \\
&= \frac{1-e^{(\gamma-\beta)t}\cos\omega_1 t}{\omega_1} \\
&+ \frac{\gamma-\beta}{\omega_1}\left[\frac{e^{(\gamma-\beta)t}}{\omega_1}\sin\omega_1 t - \frac{\gamma-\beta}{\omega_1}I\right]
\end{aligned}
$$

Despejando ahora la integral buscada I:

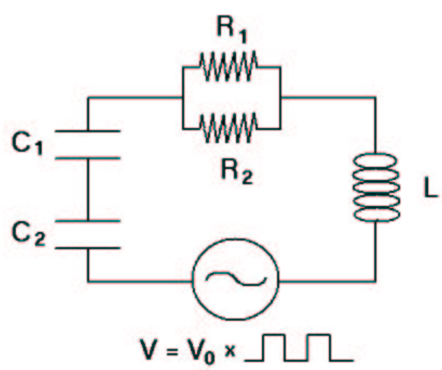
$$
I\left[1+\left(\frac{\gamma-\beta}{\omega_1}\right)^2\right] = \frac{1}{\omega_1}\left[1-e^{(\gamma-\beta)t}\cos\omega_1 t + \frac{\gamma-\beta}{\omega_1}e^{(\gamma-\beta)t}\sin\omega_1 t\right]
$$

$$
I = \frac{\omega_1}{\omega_1^2+(\gamma-\beta)^2}\left[1-e^{(\gamma-\beta)t}\cos\omega_1 t + \frac{\gamma-\beta}{\omega_1}e^{(\gamma-\beta)t}\sin\omega_1 t\right]
$$

y la solución es

$$
x(t) = \frac{F_0}{m[\omega_1^2+(\gamma-\beta)^2]}\left\{1-e^{-\beta t}\cos\omega_1 t + \frac{\gamma-\beta}{\omega_1}e^{-\beta t}\sin\omega_1 t\right\}
$$

3. *Sea el circuito de la figura, en donde la fuente crea pulsos de altura V_0 y periodo P. ¿Cuál es la frecuencia de resonancia de este circuito? Obtener el comportamiento de la intensidad de corriente en función del tiempo.*



Para hacer el problema usamos el teorema de Fourier en conjunción con el principio de superposición. La función a desarrollar por serie de Fourier la escribimos como

$$
V(t) = V_0\begin{cases} 1, & nT < t < (n+1)T/2 \\ 0, & (n+1)T/2 < t < (n+1)T \end{cases} \qquad n = -\infty, ..., -1, 0, 1, ..., \infty
$$

que es una onda cuadrada positiva (el cero de potencial lo podríamos poner a cualquier valor; la dinámica no cambiaría demasiado). El desarrollo de Fourier,

$$
V(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t\right], \quad \omega = 2\pi/T
$$

tiene como coeficientes:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T dt F(t) = \frac{2V_0}{T}\int_0^{T/2} dt = V_0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T dt F(t)\cos k\omega t = \frac{2V_0}{T}\int_0^{T/2} dt \cos k\omega t = \frac{2V_0}{kT\omega}\sin k\omega t\Big|_0^{T/2} = 0$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T dt F(t)\sin k\omega t = \frac{2V_0}{T}\int_0^{T/2} dt \sin k\omega t = -\frac{2V_0}{kT\omega}\cos k\omega t\Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{V_0}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \begin{cases} \dfrac{2V_0}{k\pi}, & k \text{ impar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

así que el desarrollo de Fourier es

$$V(t) = V_0\left\{\frac{1}{2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin{(2n+1)\omega t}}{(2n+1)\pi}\right\}$$

La ecuación diferencial a resolver es pues

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = V(t)$$

o bien

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_0}{L}\left\{\frac{1}{2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin{(2n+1)\omega t}}{(2n+1)\pi}\right\}$$

donde $2\beta = R/L$, $\omega^2 = 1/LC$. Aquí R y C son respectivamente la resistencia y la capacidad equivalentes de los elementos indicados en la figura. En concreto, la capacidad equivalente C de dos condensadores en serie C_1 y C_2 es

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

mientras que la resistencia equivalente R de dos resistencias en paralelo R_1 y R_2 es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

La solución a esta ecuación no homogenea es

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t)$$

donde q_h es la solución general de la ecuación homogenea,

$$q_h(t) = e^{-\beta t}(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t),$$

con $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ (suponemos una situación de infraamortiguamiento, $\omega_0 \geq \beta$). Para obtener la solución particular de la ecuación no homogenea, escribimos primero la parte correspondiente al "término de fuerza" $V_0/2L$, que es $V_0/2L\omega_0^2$, y luego la parte correspondiente a cada una de los términos sinusoidales. La solución particular será

$$q_p(t) = \frac{V_0}{2L\omega_0^2} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t)$$

donde $q_n(t)$ es una solución particular de la ecuación

$$\ddot{q}_n + 2\beta\dot{q}_n + \omega_0^2 q_n = \frac{2V_0}{L}\frac{\sin(2n+1)\omega t}{(2n+1)\pi}, \quad n = 0, 1, ...$$

Esta solución se puede escribir (ver apuntes de clase)

$$q_n(t) = \frac{(2V_0/L)\sin[(2n+1)\omega t - \delta_n]}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2n+1)^2\omega^2)^2 + 4(2n+1)^2\omega^2\beta^2}}$$

con

$$\tan\delta_n = \frac{2(2n+1)\omega\beta}{\omega_0^2 - (2n+1)^2\omega^2}$$

(recordar que llegábamos a este tipo de expresión a base de probar una solución combinación lineal de coseno y seno con la frecuencia externa). El principio de superposición nos permite ahora escribir q_p como la suma de todos estos términos, y la solución general buscada es

$$q(t) = e^{-\beta t}(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2V_0/L)\sin[(2n+1)\omega t - \delta_n]}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2n+1)^2\omega^2)^2 + 4(2n+1)^2\omega^2\beta^2}}$$

Habrá resonancia cuando la frecuencia externa coincida con alguna de las frecuencias que alguna de las amplitudes tenga un máximo. El máximo se da en $\omega = \omega_{nR}$ cuando

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dA_n(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_{nR}} &= \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2n+1)^2\omega^2)^2 + 4(2n+1)^2\omega^2\beta^2}}\right\}\Bigg|_{\omega_{nR}} \\
&= \left.\frac{2\omega(2n+1)^2(\omega_0^2 - (2n+1)^2\omega^2) - 4(2n+1)^2\omega\beta^2}{[(\omega_0^2 - (2n+1)^2\omega^2)^2 + 4(2n+1)^2\omega^2\beta^2]^{3/2}}\right|_{\omega_{nR}} = 0
\end{aligned}$$

o sea, cuando el numerador es nulo:

$$\omega_0^2 - (2n+1)^2\omega_{nR}^2 = 2\beta^2 \quad \longrightarrow \quad \omega_{nR} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{2n+1}$$

de manera que tendremos resonancia siempre que la frecuencia externa ω sea igual a alguna de las ω_{nR} para algún $n = 0, 1, 2, ...$ La corriente I se obtendría a partir de q integrando la expresión anterior, ya que $I = dq/dt$.

4. *Considerar una masa m sometida a una fuerza que se deriva del siguiente potencial no lineal:*

$$U(x) = \kappa x^n$$

Obtener, como función de n, la dependencia del periodo T con la amplitud de movimiento, demostrando que, si $n < 2$, el periodo T aumenta con la amplitud, si $n = 2$, T no depende de la amplitud, y si $n > 2$ el periodo disminuye con la amplitud. ¿Cuál es la explicación física de *este resultado?*

Procedemos utilizando la ecuación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \kappa|x|^n$$

(ponemos el valor absoluto previendo el caso n impar, ya que en caso contrario el potencial no sería confinante y no daría lugar a movimiento periódico). Sea x_0 la amplitud de movimiento. Cuando $x = x_0$ la velocidad es nula, ya que se trata de un punto de retorno. Entonces

$$E = \kappa|x_0|^n$$

y

$$\kappa|x_0|^n = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \kappa|x|^n$$

Despejando $\dot{x}$,

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\kappa|x_0|^n - \kappa|x|^n\right)} = \pm\sqrt{\frac{2\kappa}{m}}\sqrt{|x_0|^n - |x|^n}$$

Separando variables, y tomando el signo + (lo cual nos limita a considerar el movimiento con x creciendo en el tiempo), tenemos

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2\kappa}}\frac{dx}{\sqrt{|x_0|^n - |x|^n}}$$

Integrando a medio periodo $T/2$:

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{\frac{m}{2\kappa}}\frac{dx}{\sqrt{|x_0|^n - |x|^n}}$$

Como el integrando de la integral de la derecha es una función par en x, podemos integrar desde 0 hasta x_0 y multiplicar por 2, obteniendo el periodo como

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2\kappa}}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{x_0^n - x^n}}$$

(hemos quitado el valor absoluto ya que ahora los valores de x son todos positivos). Haciendo el cambio $t \equiv x/x_0$,

$$T = 4x_0\sqrt{\frac{m}{2\kappa x_0^n}}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^n}} = x_0^{1-n/2}\sqrt{\frac{8m}{\kappa}}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^n}}$$

La integral indicada es un número para cada valor del índice n, y por tanto no afecta a la pregunta que nos planteamos, a saber, cómo depende el periodo de la amplitud. De la expresión anterior, $T \propto x_0^{1-n/2}$, de manera que, si $n < 2$, entonces x_0 aparece con una potencia positiva, y al aumentar la amplitud, aumenta el periodo. Si $n = 2$ (caso armónico), el periodo no depende de la amplitud, mientras que si $n > 2$, el periodo disminuye con la amplitud. Este último caso se explica porque la energía potencial aumenta rápidamente con la amplitud, de manera que la fuerza que siente una masa hacia el origen es más grande y la aceleración que produce es mayor.

5. *Considerar una masa m sometida a una fuerza que se deriva del siguiente potencial no lineal:*

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{\epsilon}{4}x^4$$

- *Utilizando la ecuación de la energía, obtener una expresión para el periodo de este movimiento en términos de una integral.*
- *Desarrollar el integrando en potencias de ϵ, y calcular la corrección en el periodo con respecto al oscilador armónico.*

La ecuación de la energía es

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + \frac{\epsilon}{4}x^4$$

Sea x_0 la amplitud de movimiento. Cuando $x = x_0$ la velocidad es nula, ya que se trata de un punto de retorno. Entonces

$$E = \frac{k}{2}x_0^2 + \frac{\epsilon}{4}x_0^4$$

y

$$\frac{k}{2}x_0^2 + \frac{\epsilon}{4}x_0^4 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + \frac{\epsilon}{4}x^4$$

Despejando $\dot{x}$,

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{k}{2}x_0^2 + \frac{\epsilon}{4}x_0^4 - \frac{k}{2}x^2 - \frac{\epsilon}{4}x^4\right]} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{k}{2}(x_0^2 - x^2) + \frac{\epsilon}{4}(x_0^4 - x^4)\right]}$$

Separando las variables, y tomando el signo + (lo cual nos limita al movimiento con x creciendo en el tiempo),

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{k}{2}(x_0^2 - x^2) + \frac{\epsilon}{4}(x_0^4 - x^4)\right]}}$$

Ahora integramos a medio periodo $P/2$:

$$\int_0^{P/2} dt = \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{k}{2}(x_0^2 - x^2) + \frac{\epsilon}{4}(x_0^4 - x^4)\right]}}$$

Como el integrando de la integral derecha es una función par en x, podemos integrar de 0 a x_0 y multiplicar por 2, obteniendo el periodo como

$$P = 4\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{k}{2}(x_0^2 - x^2) + \frac{\epsilon}{4}(x_0^4 - x^4)\right]}}$$

Con objeto de expresar la integral de manera más breve, hagamos el cambio $t = x/x_0$:

$$P = 4x_0\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{kx_0^2}{2}(1 - t^2) + \frac{\epsilon x_0^4}{4}(1 - t^4)\right]}} = \frac{4}{\omega_0}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2 + \eta(1 - t^4)}}$$

donde hemos hecho la definición $\eta \equiv \epsilon x_0^2/2k$ y $\omega_0^2 = k/m$ es la frecuencia del oscilador armónico.

Obtengamos perturbativamente el periodo en términos de la amplitud a base de desarrollar el integrando en η alrededor de $\eta = 0$ (que correspondería al oscilador armónico):

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2+\eta(1-t^4)}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{(1+t^2)\eta}{2\sqrt{1-t^2}} + \frac{3(1+t^2)^2\eta^2}{8\sqrt{1-t^2}} - ...$$

e integrar término a término:

$$\begin{aligned} P &= \frac{4}{\omega_0}\int_0^1 dt \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{(1+t^2)\eta}{2\sqrt{1-t^2}} + \frac{3(1+t^2)^2\eta^2}{8\sqrt{1-t^2}} - ... \right\} \\ &= \frac{4}{\omega_0}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\eta + \frac{57\pi}{128}\eta^2 + ...\right] = P_0\left[1 - \frac{3}{4}\eta + \frac{57}{64}\eta^2 - ...\right] \end{aligned}$$

siendo $P_0 \equiv 2\pi/\omega_0$ el periodo del oscilador armónico. Los términos más allá del primero dan la corrección al periodo debida a la introducción de la perturbación cuártica. Por ejemplo, a primer orden en ϵ, el periodo disminuye con respecto al resultado armónico.

6. *Sea un masa que se mueve a lo largo de x sometida a una fuerza armónica de frecuencia natural ω_0 y una fuerza perturbativa de tipo x^2, de manera que la ecuación de movimiento se puede escribir*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon x^2$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$. Obtener la solución a primer orden en ϵ utilizando el método perturbativo.

Calculemos primero la solución a orden cero, $x^{[0]}$, que es la solución a la ecuación poniendo $\epsilon = 0$:

$$\ddot{x}^{[0]} + \omega_0^2 x^{[0]} = 0 \quad \longrightarrow \quad x^{[0]}(t) = x_0 \cos\omega_0 t$$

donde ya hemos ajustado las condiciones iniciales. Ahora insertemos esta solución a orden cero en ϵ en el segundo miembro de la ecuación, escribiéndola como:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + \epsilon x^2$$

Tenemos:

$$\ddot{x}^{[1]} = -\omega_0^2 x^{[0]} + \epsilon (x_0^{[0]})^2 = -\omega_0^2 x_0 \cos\omega_0 t + \epsilon x_0^2 \cos^2\omega_0 t$$

Escribiendo

$$\cos^2\omega_0 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega_0 t$$

obtenemos la ecuación

$$\ddot{x}^{[1]} = \frac{\epsilon x_0^2}{2} - \omega_0^2 x_0 \cos\omega_0 t + \frac{\epsilon x_0^2}{2}\cos 2\omega_0 t$$

que podemos integrar dos veces para conseguir $x^{[1]}$:

$$x^{[1]} = x_0\cos\omega_0 t + \frac{\epsilon x_0^2}{4}t^2 - \frac{\epsilon x_0^2}{8\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t + at + b$$

donde a, b son constantes arbitrarias. Para ajustarlas, imponemos otra vez las condiciones iniciales. Pero observemos que el primer término de la ecuación anterior es la solución a orden cero, que ya tiene ajustadas las constantes. Así que los otros términos han de ser nulos y tener derivada nula en $t = 0$, lo cual implica que

$$0 = -\frac{\epsilon x_0^2}{8\omega_0^2} + b, \quad 0 = a$$

de donde la solución para $x^{[1]}$ es:

$$x^{[1]} = x_0 \cos \omega_0 t + \epsilon x_0^2 \left[\frac{t^2}{4} + \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{8\omega_0^2} \right]$$

El término entre corchetes multiplicado por x_0^4 es la corrección a orden uno. Correcciones a otros órdenes se obtendrían de manera similar (con bastante más trabajo).