1. *Como modelo para una molécula triatómica lineal, consideremos tres masas unidas por dos muelles armónicos idénticos colineales de longitud natural d y constante de fuerza κ. Las masas son m, M y m, siendo M la masa central (figura 1).*

- *Determinar las frecuencias características del sistema, demostrando que una de ellas es nula.*
- *Obtener los modos normales de vibración. ¿Qué significado físico posee el modo asociado a la frecuencia nula?*

Sean x_1, X y x_2 las posiciones horizontales de las masas izquierda, central y derecha, respectivamente, con respecto a un origen fijo. La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

y la energía potencial

$$U = \frac{1}{2}\kappa(X - x_1 - d)^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - X - d)^2$$

Esta expresión proporciona términos independiente, lineal y cuadrático. Los dos primeros se pueden eliminar a base de introducir nuevas variables que se anulen en la posición del mínimo. Esa posición es $x_1 = 0$, $X = d$, $x_2 = 2d$. Definiendo $q_1 = x_1$, $q_2 = X - d$, $q_3 = x_2 - 2d$, tenemos

$$U = \frac{1}{2}\kappa(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}\kappa(q_3 - q_2)^2 = \frac{1}{2}\kappa q_1^2 + \kappa q_2^2 + \frac{1}{2}\kappa q_3^2 - \kappa q_1 q_2 - \kappa q_2 q_3$$

de manera que ahora el mínimo está situado en $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ y no aparece el término lineal. Esta transformación de coordenadas, sin embargo, no es absolutamente necesaria ya que, como se puede ver, los coeficientes del término cuadrático siguen siendo los mismos. Las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{A}$ son pues, en el sistema $\{q_i\}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & 2\kappa & -\kappa \\ 0 & -\kappa & \kappa \end{pmatrix}$$

La ecuación secular se obtiene de

$$\mathbf{A} - \mathbf{M}\omega^2 = \begin{vmatrix} \kappa - m\omega^2 & -\kappa & 0 \\ -\kappa & 2\kappa - M\omega^2 & -\kappa \\ 0 & -\kappa & \kappa - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

o sea,

$$(\kappa - m\omega^2)^2(2\kappa - M\omega^2) - 2\kappa^2(\kappa - m\omega^2) = 0$$

Eliminando un factor global $\kappa - m\omega^2$, que proporciona una de las raices, y simplificando la ecuación que resulta, se obtienen las tres frecuencias características:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa - m\omega^2 = 0 \\ \\ mM\omega^4 - \kappa(2m + M)\omega^2 = 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = 0 \\ \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{\kappa}{m}} \\ \\ \omega_3 = \sqrt{\dfrac{\kappa(2m + M)}{mM}} \end{array} \right.$$

Calculemos ahora los modos normales de vibración. Tenemos:

- $\omega = \omega_1$.

$$\begin{pmatrix} \kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & 2\kappa & -\kappa \\ 0 & -\kappa & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_{11} - a_{21} = 0 \\ \\ -a_{21} + a_{31} = 0 \end{cases}$$

Escogiendo $a_{11} = \alpha_1$, el autovector es

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_1(1, 1, 1)$$

- $\omega = \omega_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ -\kappa & \kappa(1 - M/m) & -\kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_{22} = 0 \\ \\ a_{12} + a_{32} = 0 \end{cases}$$

Escogiendo $a_{12} = \alpha_2$, el autovector es

$$\mathbf{a}_2 = \alpha_2(1, 0, -1)$$

- $\omega = \omega_3$.

$$\begin{pmatrix} -2\kappa m/M & -\kappa & 0 \\ -\kappa & -\kappa M/m & -\kappa \\ 0 & -\kappa & -2\kappa m/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_{13} = a_{33} \\ \\ a_{23} = -2a_{33}m/M \end{cases}$$

Escogiendo $a_{33} = \alpha_3$, el autovector es

$$\mathbf{a}_3 = \alpha_3 \left(1, -2\frac{m}{M}, 1\right)$$

Los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se pueden ajustar de manera que los autovectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ estén normalizados a la unidad. Tenemos:

$$\sum_{jk} m_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs}$$

$$m a_{1r}^2 + M a_{2r}^2 + m a_{3r}^2 = 1$$

Entonces:

- $r = 1$:

$$\alpha_1^2(m + M + m) = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{M + 2m}}$$

- $r = 2$:

$$\alpha_2^2(m + 0 + m) = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

- $r = 3$:

$$\alpha_3^3(m + 4m^2/M + m) = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2m(1 + 2m/M)}}$$

y los autovectores son

$$\mathbf{a}_1 = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{M+2m}}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2m}}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{(1,-2m/M,-1)}{\sqrt{2m(1+2m/M)}}$$

A partir de los autovectores se puede ver qué tipo de movimientos se pueden asociar con los modos normales de este sistema. El primero es un desplazamiento rígido de las tres masas, con frecuencia nula; corresponde al modo de Goldstone del problema, asociado a la simetría de translación del lagrangiano. El segundo es un movimiento en desfase de las masas situadas en los extremos, quedando la masa central fija. En el tercero las masas de los extremos se mueven en desfase, pero la central participa del movimiento.

Las coordenadas de las masas serán:

$$\begin{aligned}
q_1(t) &= a_{11}\eta_1(t) + a_{12}\eta_2(t) + a_{13}\eta_3(t) = \alpha_1\eta_1(t) + \alpha_2\eta_2(t) + \alpha_3\eta_3(t) \\
q_2(t) &= a_{21}\eta_1(t) + a_{22}\eta_2(t) + a_{23}\eta_3(t) = \alpha_1\eta_1(t) - 2\alpha_3\frac{m}{M}\eta_3(t) \\
q_3(t) &= a_{31}\eta_1(t) + a_{32}\eta_2(t) + a_{33}\eta_3(t) = \alpha_1\eta_1(t) - \alpha_2\eta_2(t) - \alpha_3\eta_3(t)
\end{aligned}$$

Invirtiendo, obtenemos los modos normales:

$$\begin{aligned}
\eta_1(t) &= \frac{\sqrt{M+2m}}{2}(q_1+q_2) \\
\eta_2(t) &= \sqrt{\frac{M}{2m}}\frac{(1-2m/M)q_1 - 2q_2 + (1+2m/M)q_3}{M+2m} \\
\eta_3(t) &= \frac{-q_1+2q_2-q_3}{\sqrt{2m(M+2m)}}
\end{aligned}$$

Para interpretar estos modos normales, buscamos los valores de q_1, q_2 y q_3 que anulan todos los modos excepto uno. Haciendo $q_1 = q_2 = q_3$, lo cual implica una translación rígida de sistema de masas sin ninguna deformación de los muelles, vemos que $\eta_2 = \eta_3 = 0$, con lo cual el único modo excitado es el primero, con frecuencia nula, como esperábamos.

Para anular el primer modo y a la vez el tercer modo, basta con hacer $q_1 = -q_3$ y $q_2 = 0$, y el único modo excitado que resulta es el segundo, que corresponde por tanto a tener las masas de los extremos moviendose en desfase y la masa central parada. Por último, la elección $q_1 = -q_2$ y

$$\frac{q_1}{q_3} = -\frac{M+2m}{3M-2m}$$

hace que el único modo excitado sea el tercero. Este modo corresponde a un movimiento en el que las masas primera y segunda oscilan en desfase, y a su vez la tercera oscila en desfase o fase (según el signo de $3M-2m$) con respecto a la primera.

2. *Se tiene un péndulo elástico, formado por una masa que pende del techo a través de un muelle de constante κ y longitud natural l (figura 2). Determinar el movimiento en aproximación armónica, obteniendo las frecuencias características y los modos normales de movimiento.*

Tomamos como coordenadas generalizadas el ángulo que forma el muelle desde la vertical,

θ, y la deformación del muelle, q. Ésta última será la distancia desde el punto de suspensión a la masa, h, menos la longitud natural del muelle. Entonces $q = h - l$. Las coordenadas cartesianas de la masa, poniendo el origen en el punto de suspensión, y yendo el eje x a lo largo de la horizontal y el eje y hacia arriba, son

$$x = h\sin\theta, \qquad y = h\cos\theta$$

El módulo de la velocidad de la masa al cuadrado es:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{h}\sin\theta + h\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\dot{h}\cos\theta - h\dot{\theta}\sin\theta)^2 = \dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2 = \dot{q}^2 + (q^2 + l^2 + 2ql)\dot{\theta}^2$$

La energía cinética es, por tanto:

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{q}^2 + (q^2 + l^2 + 2ql)\dot{\theta}^2]$$

La energía potencial tiene a su vez dos términos: uno gravitatorio y otro armónico,

$$U = mgh(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}\kappa(h - l)^2 = mg(q + l)(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}\kappa q^2$$

Desarrollando la energía potencial con idea de aislar el término cuadrático, tenemos:

$$U = mg(q + l)\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}\kappa q^2 + ... = \frac{mgl}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 + ...$$

donde escrito sólo los términos cuadráticos. La U tiene un punto de equilibrio estable en $q = 0$, $\theta = 0$. Vamos a aproximar la energía cinética también con términos sólo cuadráticos:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m(q^2 + l^2 + 2ql)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ...$$

Las matrices $\mathbf{M}$ y $\mathbf{A}$ son directamente diagonales:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}$$

de modo que la ecuación secular es:

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{M}\omega^2) = \begin{vmatrix} \kappa - m\omega^2 & 0 \\ 0 & mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

y las frecuencias características son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Al ser ambas matrices diagonales, el lagrangiano es ya diagonal en las coordenadas q y θ, de manera que éstas son los modos normales. Los movimientos asociados son: una oscilación vertical con frecuencia ω_1 asociada a la coordenada q y con $\theta = 0$, y una oscilación pendular de frecuencia ω_2 en la que el muelle no se deforma ($q = 0$).

3. *Se tiene un sistema con n grados de libertad, caracterizado por las coordenadas generalizadas* $\{q_i\}$*, con energías cinética y potencial*

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k\dot{q}_k^2, \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{kl} A_{kl}q_kq_l$$

y tal que cada coordenada se encuentra amortiguada con una fuerza $-2\gamma m_k \dot{q}_k$. *Demostrar que el movimiento tiene la misma forma que el obtenido en la teoría general de oscilaciones armónicas, excepto que ahora las frecuencias reales* $\{\omega_k\}$ *han de sustituirse por las frecuencias complejas*

$$\Omega_k = \sqrt{\omega_k^2 - \gamma^2} + i\gamma$$

Demostrar además que, si el amortiguamiento es débil, todos los modos se amortiguan en la misma cantidad, pese a tener distinta frecuencia.

El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{q}_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{kl} A_{kl} q_k q_l$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k, \qquad k = 1, ..., n$$

donde $Q_k = -2\gamma m_k \dot{q}_k$ son las fuerzas generalizadas. Calculando las derivadas parciales, obtenemos:

$$m_k \ddot{q}_k + 2\gamma m_k \dot{q}_k + \sum_l A_{kl} q_l = 0, \qquad k = 1, ..., n$$

Probando las soluciones

$$q_k(t) = a_k e^{i(\Omega_k t - \delta_k)}, \qquad k = 1, ..., n$$

tenemos:

$$-m_k a_k \Omega_k^2 + 2i\gamma m_k a_k \Omega_k + \sum_l A_{kl} a_k = 0, \qquad k = 1, ..., n$$

Hagamos la notación

$$\omega_k^2 \equiv \Omega_k^2 - 2i\gamma\Omega_k$$

Entonces las ecuaciones de movimiento se pueden poner de manera matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} A_{11} - m_1\omega_1^2 & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - m_2\omega_2^2 & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & A_{n,n-1} & A_{nn} - m_n\omega_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero estas ecuaciones son justo las de un sistema no amortiguado, con frecuencias propias ω_k. Conocidas éstas, las nuevas frecuencias propias con las que vibra el sistema amortiguado se obtienen de:

$$\Omega_k^2 - 2i\gamma\Omega_k - \omega_k^2 = 0$$

Despejando:

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\left[2i\gamma \pm \sqrt{-4\gamma^2 + 4\omega_k^2}\right] = i\gamma \pm \sqrt{\omega_k^2 - \gamma^2}$$

Entonces las soluciones son del tipo

$$q_k(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} e^{i(i\gamma t + \sqrt{\omega_k^2 - \gamma^2} t - \delta_k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} e^{-\gamma t} e^{it\sqrt{\omega_k^2 - \gamma^2}}, \qquad k = 1, ..., n$$

Ésto es lo mismo que ocurre en un oscilador simple en una dimensión: al introducir un amortiguamiento la frecuencia de vibración varía en una cantidad relacionada con la constante de amortiguamiento, y aparece una exponencial que decae en el tiempo. Un sistema de osciladores acoplados es equivalente a un sistema de osciladores armónicos independientes que vibran cada uno con una frecuencia ω_k. Al introducir un amortiguamiento cada una de estas frecuencias se ve afectada de la misma manera que un oscilador simple, y cada modo normal se atenúa con un factor exponencial en el tiempo.

Independientemente del amortiguamiento, la constante de amortiguación es γ para todos los modos. La frecuencia de oscilación, que cambia como resultado del amortiguamiento, depende de éste. Si el amortiguamiento es débil,

$$\Omega_k = i\gamma + \sqrt{\omega_k^2 - \gamma^2} = i\gamma + \omega_k \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_k^2}} = i\gamma + \omega_k \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_k^2}\right) + ...$$

es decir,

$$\Omega_k = \omega_k - \frac{\gamma^2}{2\omega_k} + i\gamma + ...$$

Si $\gamma^2 \ll \omega_k$, entonces el amortiguamiento no afecta a ningún modo.

4. *Calcular los modos normales de oscilación del circuito eléctrico de la figura 3.*

Figura 1

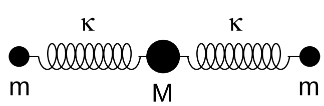


Figura 2

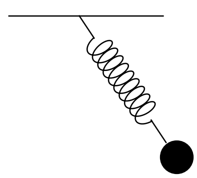
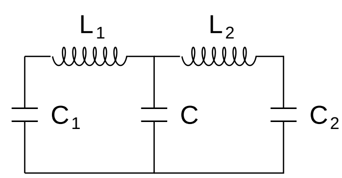


Figura 3



Escribamos las ecuaciones para el circuito. Las caidas de potencial en las autoinductancias son $L\dot{I}$, siendo I la intensidad eléctrica, mientras que en los condensadores es q/C, siendo q la carga. Sea I_1 la intensidad que atraviesa la autoinductancia L_1, I_2 la que atraviesa la autoinductancia L_2, e I_3 la que atraviesa el condensador C. Las reglas de Kirchoff aplicadas a los dos circuitos proporcionan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} I_3 &= I_1 - I_2 \\ L_1 \ddot{I}_1 + \frac{I_1}{C_1} + \frac{I_3}{C} &= 0 \\ L_2 \ddot{I}_2 + \frac{I_2}{C_2} - \frac{I_3}{C} &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando la intensidad I_3, obtenemos las dos ecuaciones lineales acopladas

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{I}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right) I_1 - \frac{I_2}{C} &= 0 \\ L_2 \ddot{I}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right) I_2 - \frac{I_1}{C} &= 0 \end{aligned}$$

Formalmente estas ecuaciones se pueden obtener de un lagrangiano para las coordenadas generalizadas I_1 e I_2. El término de energía cinética se puede obtener a partir de los primeros términos de las ecuaciones. El resto proviene de una energía potencial. Si hacemos

$$L = \frac{1}{2}(L_1\dot{I}_1^2 + L_2\dot{I}_2^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right) I_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right) I_2^2 + \frac{1}{C}I_1 I_2$$

Entonces aplicando las ecuaciones de Lagrange se puede ver fácilmente que recuperamos las ecuaciones obtenidas a partir de las leyes de Kirchoff. Este lagrangiano es isomorfo al de un sistema de dos muelles de masas distintas m_1 y m_2 acoplados mediante un muelle de constante κ_{12} y cada uno de ellos conectado a una pared mediante muelles iguales de constante κ; las ecuaciones que resultan son

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (\kappa + \kappa_{12})x_1 - \kappa_{12}x_2 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (\kappa + \kappa_{12})x_2 - \kappa_{12}x_1 &= 0 \end{aligned}$$

que se obtienen de un lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa_{12})x_1^2 + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa_{12})x_2^2 - \kappa_{12}x_1x_2$$

Las correspondientes matrices $\mathbf{m}$ y $\mathbf{A}$, en el caso del lagrangiano electromagnético, son:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} \end{pmatrix}$$

y las frecuencias propias vendrán dadas por la solución de la ecuación

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} - L_1\omega^2 & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} - L_2\omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} - L_1\omega^2\right)\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} - L_2\omega^2\right) - \frac{1}{C^2} = 0$$

Esta ecuación secular se puede poner en función de las frecuencias

$$\omega_1^{(0)} \equiv \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}, \quad \omega_2^{(0)} \equiv \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}, \quad \omega_1^{(1)} \equiv \frac{1}{\sqrt{L_1C}}, \quad \omega_2^{(1)} \equiv \frac{1}{\sqrt{L_2C}}$$

como

$$\left(\omega_1^{(0)2} + \omega_1^{(1)2} - \omega^2\right)\left(\omega_2^{(0)2} + \omega_2^{(1)2} - \omega^2\right) - \omega_1^{(1)2}\omega_2^{(1)2} = 0$$

o sea,

$$\omega^4 - \left(\omega_1^{(0)2} + \omega_2^{(0)2} + \omega_1^{(1)2} + \omega_2^{(1)2}\right)\omega^2 + (\omega_1^{(0)2} + \omega_1^{(1)2})(\omega_2^{(0)2} + \omega_2^{(1)2}) - \omega_1^{(1)2}\omega_2^{(1)2} = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación secular, $\omega_{1,2}$, son:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_1^{(0)2} + \omega_2^{(0)2} + \omega_1^{(1)2} + \omega_2^{(1)2} \pm \sqrt{(\omega_1^{(0)2} - \omega_2^{(0)2} + \omega_1^{(1)2} - \omega_2^{(1)2})^2 + 4\omega_1^{(1)2}\omega_2^{(1)2}}\right]$$

El caso $L_1 = L_2$, $C_1 = C_2$, que implica $\omega_1^{(1)} = \omega_2^{(1)} \equiv \omega^{(1)}$ y $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} \equiv \omega^{(0)}$, es el discutido en clase para el sistema de las dos mallas y los tres muelles, ya que reduce las frecuencias propias a

$$\omega_{1,2}^2 = \omega^{(0)2} + \omega^{(1)2} \pm \omega^{(1)2} = \begin{cases} \omega^{(0)2} + 2\omega^{(1)2} \\ \omega^{(0)2} \end{cases}$$

que es el mismo resultado que el obtenido para el problema de los muelles. Los modos normales serán por tanto idénticos a los de aquél problema. En el caso en que $L_1 \neq L_2$, $C_1 \neq C_2$ los modos son algo más complicados, pero su interpretación física es similar.

5. *Encontrar las frecuencias propias y discutir los modos normales (en la aproximación de pequeñas oscilaciones) de un péndulo doble plano (en el que el plano de oscilación de ambas masas es el mismo y permanece fijo).*

El lagrangiano del péndulo doble es

$$L = \frac{ml^2}{2}[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + 2mgl\cos\theta_1 + mgl\cos\theta_2$$

En aproximación armónica

$$L = \frac{ml^2}{2}[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2] + 2mgl\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) + mgl\left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right)$$

y eliminando las constantes,

$$L = \frac{ml^2}{2}[2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2] - mgl\left(\theta_1^2 + \frac{\theta_2^2}{2}\right)$$

Las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{m}$ son

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}$$

y las frecuencias propias vienen dadas por la ecuación

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{m}\omega^2) = \begin{vmatrix} 2mgl - 2ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = (2mgl - 2ml^2\omega^2)(mgl - ml^2\omega^2) - (ml^2\omega^2)^2 = 0$$

de donde

$$\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$$

cuyas soluciones son

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(4\omega_0^2 \pm \sqrt{16\omega_0^4 - 8\omega_0^4}\right) = \omega_0^2(2 \pm \sqrt{2}), \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}$$

Las dos frecuencias características son pues

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \omega_0\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Calculemos ahora los autovectores. Para $\omega = \omega_1$

$$\begin{pmatrix} -2(1+\sqrt{2})mgl & -mgl(2+\sqrt{2}) \\ -mgl(2+\sqrt{2}) & -(1+\sqrt{2})mgl \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad a_{11} = -a_{21}\frac{2+\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}$$

Para $\omega = \omega_2$,

$$\begin{pmatrix} -2(1-\sqrt{2})mgl & -mgl(2-\sqrt{2}) \\ -mgl(2-\sqrt{2}) & -(1-\sqrt{2})mgl \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad a_{12} = a_{22}\frac{2-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}$$

La dependencia temporal de los ángulos en función del tiempo es por tanto

$$\theta_1(t) = a_{11}\eta_1(t) + a_{12}\eta_2(t) = -a_{21}\frac{2+\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}\eta_1(t) + a_{22}\frac{2-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}\eta_2(t)$$

$$\theta_2(t) = a_{21}\eta_1(t) + a_{22}\eta_2(t)$$

Invirtiendo,

$$\eta_1 = \frac{(2-\sqrt{2})\theta_2 - 2(\sqrt{2}-1)\theta_1}{2\sqrt{2}a_{21}(\sqrt{2}-1)}$$

$$\eta_2 = \frac{(2+\sqrt{2})\theta_2 + 2(\sqrt{2}+1)\theta_1}{2\sqrt{2}a_{22}(1+\sqrt{2})}$$

Si ahora hacemos $(2-\sqrt{2})\theta_1 + (\sqrt{2}-1)\theta_2 = 0$ de modo que $\eta_1 = 0$, vemos que el modo de oscilación asociado a ω_2 tiene amplitudes relacionadas mediante

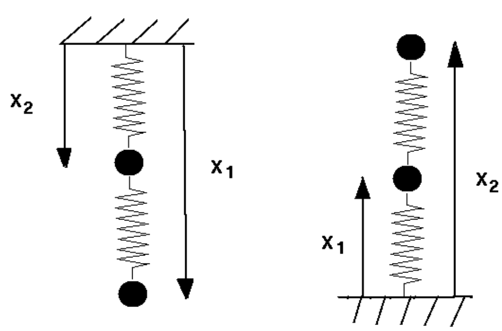
$$\theta_1(t) = \theta_2(t)\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}\right]$$

es decir, en fase, ya que la cantidad entre corchetes es positiva; éste es el modo simétrico, con frecuencia menor. Si por el contrario hacemos $(2+\sqrt{2})\theta_2 + 2(\sqrt{2}+1)\theta_1 = 0$, de manera que $\eta_2 = 0$, vemos que el modo de oscilación asociado a ω_1 tiene amplitudes relacionadas mediante

$$\theta_1(t) = -\theta_2(t)\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}\right]$$

es decir, en desfase (modo antisimétrico, frecuencia mayor).

6. *Una partícula de masa m se sujeta a un soporte mediante un muelle de constante κ que cuelga verticalmente hacia abajo. A este sistema se sujeta otro oscilador igual conectando el muelle del segundo a la masa del primero. Determinar las frecuencias propias para las oscilaciones verticales unidimensionales y describir los modos normales del sistema. Repetir el problema si las masas, en lugar de estar suspendidas del techo, descansan sobre el suelo.*



El primer paso consiste en buscar coordenadas generalizadas adecuadas. Las vamos a elegir de manera que cuando éstas asuman valores nulos el sistema se encuentre en su punto de equilibrio estable. Para buscar este punto, definamos coordenadas x_1 y x_2 tal y como se indica en la figura (l_0 es la longitud natural de los muelles). Con estas coordenadas, la energía potencial es

$$U = -mgx_1 - mgx_2 + \frac{1}{2}\kappa(x_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

Derivando e igualando a cero obtenemos el punto de equilibrio x_1^0 y x_2^0 (en donde la fuerza es nula):

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_1}\right|_{x_1^0,x_2^0} = -mg + \kappa(x_1^0 - l_0) - \kappa(x_2^0 - x_1^0 - l_0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x_2}\right|_{x_1^0,x_2^0} = -mg + \kappa(x_2^0 - x_1^0 - l_0) = 0$$

de donde

$$x_1^0 = 2\alpha + l_0, \quad x_2^0 = 3\alpha + 2l_0$$

donde $\alpha \equiv mg/\kappa$. Por tanto, definimos las coordenadas generalizadas como

$$q_1 = x_1 - x_1^0, \quad q_2 = x_2 - x_2^0 \quad \to \quad x_1 = q_1 + x_1^0, \quad x_2 = q_2 + x_2^0$$

Sustituyendo en la energía potencial,

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\kappa q_1^2 + \frac{1}{2}\kappa q_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(q_1 - q_2)^2 = U_0 + \frac{1}{2}(2\kappa)q_1^2 + \frac{1}{2}(2\kappa)q_2^2 - \kappa q_1 q_2$$

donde U_0 es una constante irrelevante (observar que, al haber medido las distancias con respecto a las posiciones de equilibrio, los términos lineales en q_1 y q_2 desaparecen; asimismo, la aceleración de la gravedad tampoco aparece en los términos cuadráticos, ya que aparece únicamente a través de las posiciones de equilibrio. El problema se convierte en un problema efectivo de sólo dos muelles acoplados). Por otro lado, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2$$

Las matrices **A** y **m** son

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\kappa & -\kappa \\ -\kappa & 2\kappa \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz $\mathbf{A}-\mathbf{m}\omega^2$ igualado a cero es

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{m}\omega^2) = (2\kappa - m\omega^2)^2 - \kappa^2 = 0$$

de donde las dos posibles frecuencias propias son

$$\omega = \sqrt{\frac{2\kappa \pm \kappa}{m}} = \begin{cases} \sqrt{3\kappa/m} \equiv \omega_1 \\ \\ \sqrt{\kappa/m} \equiv \omega_2 \end{cases}$$

Calculemos los autovectores. Para $\omega = \omega_1$,

$$\begin{pmatrix} -\kappa & -\kappa \\ -\kappa & -\kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad a_{11} = -a_{21}$$

Para $\omega = \omega_2$,

$$\begin{pmatrix} \kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad a_{12} = a_{22}$$

Normalizando los dos autovectores con la condición $m(a_{1r}^2 + a_{2r}^2) = 1$, obtenemos

$$a_{11} = -a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad a_{12} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

Las coordenadas generalizadas son pues

$$q_1(t) = a_{11}\eta_1(t) + a_{12}\eta_2(t) = \frac{\eta_1(t) + \eta_2(t)}{\sqrt{2m}}$$

$$q_2(t) = a_{21}\eta_1(t) + a_{22}\eta_2(t) = \frac{\eta_2(t) - \eta_1(t)}{\sqrt{2m}}$$

Para ver el significado de las coordenadas normales η_1 y η_2, las despejamos en términos de q_1 y q_2:

$$\eta_1(t) = \frac{\sqrt{2m}}{2}[q_1(t) - q_2(t)]$$

$$\eta_2(t) = \frac{\sqrt{2m}}{2}[q_1(t) + q_2(t)]$$

- Si $q_1(t) = q_2(t) \equiv q(t)$, $\eta_2(t) = q(t)\sqrt{2m}$, $\eta_1(t) = 0$, luego el modo normal asociado a la frecuencia ω_2 corresponde a un movimiento en fase de ambas masas (el modo simétrico).
- Si $q_1(t) = -q_2(t) \equiv q(t)$, $\eta_2(t) = 0$, $\eta_1(t) = q(t)\sqrt{2m}$, luego el modo normal asociado a la frecuencia ω_1 corresponde a un movimiento en fase de ambas masas (el modo antisimétrico).

Veamos ahora el caso en el que las masas descansan sobre el suelo. Elegiendo las coordenadas como en la figura, la energía potencial es

$$U = mgx_1 + mgx_2 + \frac{1}{2}\kappa(x_1 - l_0)^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

Las posiciones de equilibrio son ahora

$$x_1^0 = -2\alpha + l_0, \quad x_2^0 = -3\alpha + 2l_0$$

e, introduciendo las coordenadas generalizadas

$$q_1 = x_1 - x_1^0, \quad q_2 = x_2 - x_2^0 \quad \rightarrow \quad x_1 = q_1 + x_1^0, \quad x_2 = q_2 + x_2^0$$

la energía potencial queda

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\kappa q_1^2 + \frac{1}{2}\kappa q_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(q_1 - q_2)^2 = U_0 + \frac{1}{2}(2\kappa)q_1^2 + \frac{1}{2}(2\kappa)q_2^2 - \kappa q_1 q_2$$

que tiene exactamente la misma forma que en el caso anterior. Las frecuencias y modos normales, por tanto, son los mismos. La conclusión es que el efecto de la gravedad aparece únicamente a través de las posiciones de equilibrio, que son distintas en cada caso y también distintas al caso en el que no hubiese gravedad, y este efecto no tiene repercusión sobre las frecuencias y modos normales.

7. *Considerar tres péndulos idénticos, de longitud l y masa M, suspendidos de un soporte,*

no completamente rígido, que es capaz de transmitir energía de un péndulo a otro, de manera que la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2} mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\epsilon_{12}\theta_1\theta_2 - 2\epsilon_{13}\theta_1\theta_3 - 2\epsilon_{23}\theta_2\theta_3)$$

Obtener las frecuencias propias. Suponiendo que $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23}$, demostrar que hay degeneración en este caso, y que éste es el único caso en el que puede haberla. Obtener en este caso los modos normales de vibración.

Escojemos como coordenadas generalizadas los ángulos con respecto a la vertical. La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} Ml^2 \left[\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta_3}{dt}\right)^2 \right]$$

de manera que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{m}$ son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} Mgl & -Mgl\epsilon_{12} & -Mgl\epsilon_{13} \\ -Mgl\epsilon_{12} & Mgl & -Mgl\epsilon_{23} \\ -Mgl\epsilon_{13} & -Mgl\epsilon_{23} & Mgl \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} Ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & Ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & Ml^2 \end{pmatrix}$$

Las frecuencias propias se obtienen de:

$$\begin{vmatrix} Mgl - M\omega^2 l^2 & -Mgl\epsilon_{12} & -Mgl\epsilon_{13} \\ -Mgl\epsilon_{12} & Mgl - M\omega^2 l^2 & -Mgl\epsilon_{23} \\ -Mgl\epsilon_{13} & -Mgl\epsilon_{23} & Mgl - M\omega^2 l^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(g - \omega^2 l\right)^3 - 2g^3\epsilon_{12}\epsilon_{23}\epsilon_{13} - g^2(g - \omega^2 l)(\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2) = 0$$

Para ver mejor la estructura de esta ecuación, hagamos $\eta \equiv g - \omega^2 l$, con lo que obtenemos una ecuación cúbica en η:

$$\eta^3 - g^2(\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2)\eta - 2g^3\epsilon_{12}\epsilon_{23}\epsilon_{13} = 0$$

Para facilitar los cálculos hagamos $\eta \equiv \alpha g$, con lo que la ecuación queda

$$f(\alpha) \equiv \alpha^3 - (\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2)\alpha - 2\epsilon_{12}\epsilon_{23}\epsilon_{13} = 0$$

Las tres soluciones de esta ecuación se pueden obtener analíticamente por medio de las conocidas fórmulas para un polinomio cúbico sin término cuadrático. Las raices físicamente admisibles de esta ecuación cúbica han de ser reales, y se puede demostrar en este caso particular que es así. Para ello, en lugar de utilizar las expresiones para las soluciones explícitas de una ecuación cúbica, vamos a demostrar las siguientes condiciones, que aseguran que existen tres raices reales:

- El polinomio tiende a $-\infty$ para $\alpha \to -\infty$ y a $+\infty$ para $\alpha \to +\infty$, lo cual se sigue del hecho de que el coeficiente del término de mayor grado es positivo.

- El polinomio posee dos extremos, un máximo y un mínimo. Derivando:

  $$f'(\alpha) = 3\alpha^2 - (\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2) = 0$$

  es decir, existen dos extremos, simétricamente situados con respecto al origen:

  $$\alpha_\pm = \pm\sqrt{\frac{\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2}{3}}$$

- Calculando la derivada segunda, $f''(\alpha) = 6\alpha$, vemos que $f''(\alpha_+) > 0$ y $f''(\alpha_-) < 0$, o sea, el extremo negativo, α_-, es un máximo, mientras que el extremo positivo, α_+, es un mínimo.

- Además, los valores de la función en los extremos han de ser positivo en el máximo y negativo en el mínimo,

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_+) &= \left(\frac{\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2}{3}\right)^{3/2} - \frac{(\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2)^{3/2}}{\sqrt{3}} - 2\epsilon_{12}\epsilon_{23}\epsilon_{13} \\
&= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2)^{3/2} - 2\epsilon_{12}\epsilon_{23}\epsilon_{13} < 0, \\
f(\alpha_-) &= -\left(\frac{\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2}{3}\right)^{3/2} + \frac{(\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2)^{3/2}}{\sqrt{3}} - 2\epsilon_{12}\epsilon_{23}\epsilon_{13} \\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}}(\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2)^{3/2} - 2\epsilon_{12}\epsilon_{23}\epsilon_{13} \geq 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

La primera de las desigualdades es evidente dado que las constantes de acoplo son todas positivas. La última desigualdad se puede demostrar para cualesquiera tres números positivos. En efecto, si tenemos tres números arbitrarios $x > 0, y > 0, z > 0$, definamos la función

$$g(x, y, z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^3 - 27x^2y^2z^2, \quad x, y, z > 0$$

definición inspirada en la desigualdad que queremos demostrar (simplificando un factor 2 y elevando al cuadrado). Demostremos que esta función posee un extremo, y que ese extremo es además un mínimo. Las componentes del vector gradiente son:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= 6x(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 54xy^2z^2 = 0 \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 6y(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 54x^2yz^2 = 0 \\
\frac{\partial g}{\partial z} &= 6z(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 54x^2y^2z = 0
\end{aligned}
$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 9x^2y^2 = 9x^2z^2 = 9y^2z^2$$

que únicamente se verifican si $x = y = z$. Estas igualdades definen un continuo de puntos extremos. Para ver qué tipo de extremos son, calculamos la matriz hessiana evaluada en $x = y = z$, que es igual a

$$\partial^2 g = \begin{pmatrix} 72x^4 & -36x^4 & -36x^4 \\ -36x^4 & 72x^4 & -36x^4 \\ -36x^4 & -36x^4 & 72x^4 \end{pmatrix} = 36x^4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

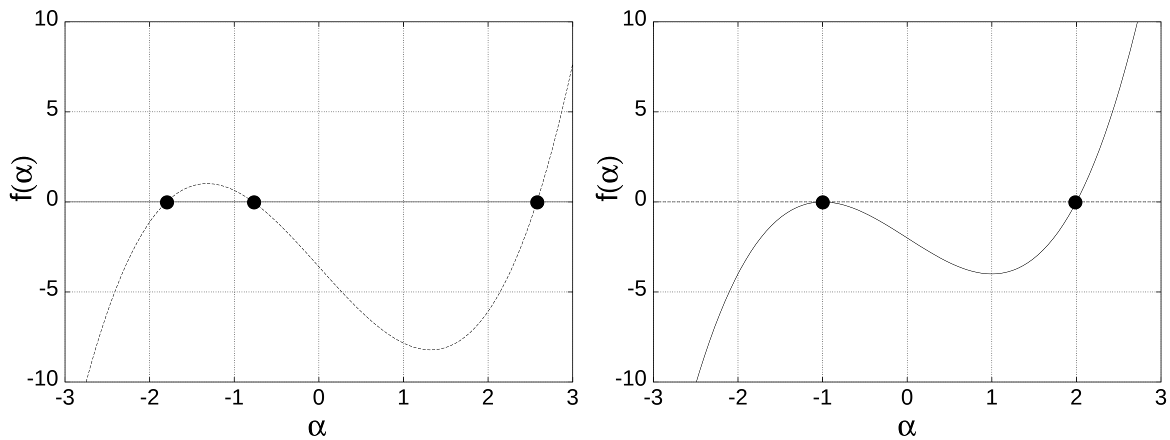
Como todos los menores de esta matriz son no negativos,

$$2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

concluimos que la recta $x = y = z$ es un continuo de mínimos y que la función $g(x, y, z)$ nunca se hace negativa, siendo igual a cero únicamente cuando $x = y = z$. Por tanto, la desigualdad (1) es cierta, verificandose la igualdad cuando $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23}$, lo cual implica que $f'(\alpha_-) = 0$ y $f''(\alpha_-) = 0$, es decir, α_- es una raiz doble y, por tanto, existe degeneración. Para este caso la ecuación que da las frecuencias propias se convierte en

$$\eta^3 - 3g^2\epsilon^2\eta - 2g^3\epsilon^3 = 0$$

que tiene una raiz doble $\eta_1^0 = -g\epsilon$ y una simple $\eta_2^0 = 2g\epsilon$. La situación se resume esquemáticamente en la figura: a la izquierda se tiene una situación no degenerada, con dos de las constantes de acoplo $\epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}$ iguales a 1 y la otra igual a 1,8; a la derecha se presenta una situación con degeneración, con todas las constantes de acoplo iguales a la unidad. En resumen, la única manera de que exista degeneración (y este caso corresponde a que una de las frecuencias propias sea doble) es que las tres constantes de acoplo sean iguales. En cualquier otro caso las frecuencias propias son distintas.



8. *Consideremos el problema general de oscilaciones armónicas en un sistema, es decir, la solución de la ecuación vectorial*

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}, \quad U = \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Es sabido que, sustituyendo una función exponencial compleja, obtenemos un sistema lineal

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}e^{i\omega t} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}_k = \omega_k^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}_k$$

donde $\{\omega_k\}$ *son las raices del determinante* $det(\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{M})$.

- *Demostrar que el problema de autovalores generalizado* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \omega^2\mathbf{M} \cdot \mathbf{c}$ *se puede escribir como el siguiente problema estándar de autovalores:*

  $$\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = \omega^2\mathbf{b}$$

  donde $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1/2} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}^{-1/2}$ *y* $\mathbf{b} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{c}$

- *Sea* $\mathbf{R}$ *la matriz de rotación que diagonaliza* $\mathbf{M}$, *con autovalores* $\{m_k\}$. *Demostrar que*

  $$\mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{m_n} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{R}$$

  es una definición correcta para la raiz cuadrada de $\mathbf{M}$, *y obtener* $\mathbf{M}^{-1/2}$ *de la misma manera (es decir, en términos de* $\mathbf{R}$ *y los autovalores* $\{m_k\}$*).*

- *Demostrar que el nuevo problema (estándar) de autovalores resulta del primero a base de: 1) diagonalizar la matriz* $\mathbf{M}$*, 2) dilatar o contraer los ejes de manera que los autovalores de* $\mathbf{M}$ *se conviertan todos en la unidad, y 3) diagonalizar la matriz* $\mathbf{A}$*. Este procedimiento, que es una manera alternativa de ver el anterior, basado en resolver directamente el sistema* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}=\omega^2\mathbf{M}\cdot\mathbf{c}$*, permite diagonalizar las dos matrices,* $\mathbf{M}$ *y* $\mathbf{A}$*, a la vez.*

Sea que la matriz $\mathbf{M}$ la descomponemos en producto de dos matrices iguales: $\mathbf{M}=\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2}$. Luego veremos cómo definir la matriz $\mathbf{M}^{1/2}$. Entonces:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}=\omega^2\mathbf{M}\cdot\mathbf{c}=\omega^2\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{c}$$

Multiplicando por la izquierda por $\mathbf{M}^{-1/2}$, la matriz inversa de $\mathbf{M}^{1/2}$,

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}=\omega^2\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{c}=\omega^2\cdot\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{c}$$

ya que $\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{M}^{-1/2}=\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2}=\mathbf{1}$. Definiendo $\mathbf{b}=\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{c}$, obtenemos

$$\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{b}=\omega^2\mathbf{b}\quad\rightarrow\quad\mathbf{N}\cdot\mathbf{b}=\omega^2\mathbf{b}$$

ya que $\mathbf{c}=\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{b}$.

Sea ahora la definición sugerida para $\mathbf{M}^{1/2}$:

$$\mathbf{M}^{1/2}=\mathbf{R}^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{m_1}&0&...&0\\0&\sqrt{m_2}&...&0\\...&...&...&...\\0&...&0&\sqrt{m_n}\end{pmatrix}\mathbf{R}\tag{2}$$

donde la matriz de transformación $\mathbf{R}$ es tal que

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{R}^{-1}=\begin{pmatrix}m_1&0&...&0\\0&m_2&...&0\\...&...&...&...\\0&...&0&m_n\end{pmatrix},\quad\mathbf{M}=\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}m_1&0&...&0\\0&m_2&...&0\\...&...&...&...\\0&...&0&m_n\end{pmatrix}\cdot\mathbf{R}$$

Comprobemos que $\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2}=\mathbf{M}$. Teniendo en cuenta que $\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{1}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2}&=\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{m_1}&0&...&0\\0&\sqrt{m_2}&...&0\\...&...&...&...\\0&...&0&\sqrt{m_n}\end{pmatrix}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{m_1}&0&...&0\\0&\sqrt{m_2}&...&0\\...&...&...&...\\0&...&0&\sqrt{m_n}\end{pmatrix}\cdot\mathbf{R}\\&=\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{m_1}&0&...&0\\0&\sqrt{m_2}&...&0\\...&...&...&...\\0&...&0&\sqrt{m_n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{m_1}&0&...&0\\0&\sqrt{m_2}&...&0\\...&...&...&...\\0&...&0&\sqrt{m_n}\end{pmatrix}\cdot\mathbf{R}\\&=\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}m_1&0&...&0\\0&m_2&...&0\\...&...&...&...\\0&...&0&m_n\end{pmatrix}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{M}\end{aligned}$$

Obtengamos ahora la matriz inversa $\mathbf{M}^{-1/2}$. A partir de la ecn. (2), efectuamos las siguientes operaciones:

- Multiplicamos por la izquierda por $\mathbf{M}^{-1/2}$:

$$\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2}=\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{m_1} & 0 & ... & 0\\ 0 & \sqrt{m_2} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & \sqrt{m_n}\end{pmatrix}\cdot\mathbf{R}$$

- Hacemos $\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{M}^{1/2}=\mathbf{1}$, multiplicamos por la derecha por $\mathbf{R}^{-1}$ y hacemos $\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{1}$:

$$\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{m_1} & 0 & ... & 0\\ 0 & \sqrt{m_2} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & \sqrt{m_n}\end{pmatrix}$$

- Multiplicamos por la derecha por la inversa de la matriz diagonal:

$$\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{m_1} & 0 & ... & 0\\ 0 & 1/\sqrt{m_2} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & 1/\sqrt{m_n}\end{pmatrix}$$

$$=\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{m_1} & 0 & ... & 0\\ 0 & \sqrt{m_2} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & \sqrt{m_n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{m_1} & 0 & ... & 0\\ 0 & 1/\sqrt{m_2} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & 1/\sqrt{m_n}\end{pmatrix}$$

$$=\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{R}^{-1}$$

- Multiplicamos por la derecha por $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{M}^{-1/2}=\mathbf{R}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{m_1} & 0 & ... & 0\\ 0 & 1/\sqrt{m_2} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & 1/\sqrt{m_n}\end{pmatrix}\cdot\mathbf{R}$$

Según el primer apartado, el problema de diagonalización se puede escribir como:

$$\left(\mathbf{M}^{-1/2}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{M}^{-1/2}\right)\cdot\left(\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{c}\right)=\omega^2\left(\mathbf{M}^{1/2}\cdot\mathbf{c}\right)$$

Sustituyendo ahora $\mathbf{M}^{-1/2}=\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{M}_d^{-1/2}\cdot\mathbf{R}$ (donde $\mathbf{M}_d^{-1/2}$ es la matriz diagonal de $\mathbf{M}^{-1/2}$) y $\mathbf{M}^{1/2}=\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{M}_d^{1/2}\cdot\mathbf{R}$ (donde $\mathbf{M}_d^{1/2}$ es la matriz diagonal de $\mathbf{M}^{1/2}$) tenemos:

$$\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{M}_d^{-1/2}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{M}_d^{-1/2}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{M}_d^{1/2}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{c}=\omega^2\mathbf{R}^{-1}\cdot\mathbf{M}_d^{1/2}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{c}$$

Multiplicando por la izquierda por la matriz $\mathbf{R}$, teniendo en cuenta que $\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{1}$, y agrupando convenientemente las matrices, nos queda:

$$\left[\mathbf{M}_d^{-1/2}\cdot\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}^{-1}\right)\cdot\mathbf{M}_d^{-1/2}\right]\cdot\left[\mathbf{M}_d^{1/2}\cdot(\mathbf{R}\cdot\mathbf{c})\right]=\omega^2\left[\mathbf{M}_d^{1/2}\cdot(\mathbf{R}\cdot\mathbf{c})\right]$$

que se puede interpretar como sigue. Primero actúa la matriz $\mathbf{R}$ sobre la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{c}$ (paréntesis), acción que sirve para diagonalizar la matriz $\mathbf{M}$. Luego actúa la matriz $\mathbf{M}_d^{1/2}$ sobre la matriz $\mathbf{A}$ transformada y el vector $\mathbf{c}$ transformado (corchetes), que convierte a la matriz $\mathbf{M}$ en la matriz unidad. Con estas transformaciones, el problema se reduce al último paso, diagonalizar la matriz $\mathbf{A}$ transformada mediante las dos transformaciones previas.