TRANSPORT DE LA CALOR: DETERMINACIÓ DE LA CONDUCTIVITAT TÈRMICA D'UN MATERIAL METÀL·LIC (Practica 5)

Jordi Blasco Pallarés
Grup: no definit

March 20, 2001

Abstract

S'ha estudiat l'evolució de la temperatura en funció del temps per a uns valors de x determinats en dues barres metàl·liques escalfades per un dels seus extrems i que es troben en contacte tèrmic amb l'atmosfera a una temperatura T_0=23.9 °C. Un cop han assolit el regim estacionari obtenim la conductivitat tèrmica de la barra 2, d'un material desconegut, (k_2) a partir de la conductivitat tèrmica d'una barra de coure (K_1= 3.97 $Wcm^{-1}K^{-1}$) de geometria similar i d'un anàlisi comparatiu de la seva distribució de temperatures. El resultat obtingut és K_2=0.63±0.05 $Wcm^{-1}K^{-1}$

1 Introducció

Es tenen dues barres cilíndriques de secció S de conductivitat tèrmica K_1 i K_2, cadascuna en contacte amb un dels seus extrems amb una font de calor a una temperatura constant T_m. Ambdues barres es troben amb equilibri tèrmic amb un fluid, l'atmosfera, a una temperatura T_0.

Si es té un cos sotmés a una diferencia de temperatures, si es mesura cadascun dels punts intermitjos s'obté experimentalment una distribució contínua de temperatura. Definim aquest transport de energia entre els diferencials de volum com a conducció calorífica, i pren com a llei fonamental l'equació:

$$\dot{\vec{q}} = -k\overrightarrow{\nabla T} \qquad (1)$$

Es defineix negativa per fer coincidir el flux calorífic amb el sentit possitiu de les x. Definim la constant de proporcionalitat k com la conductivitat tèrmica del material. Per a valors grans de k direm que el material o substancia es un conductor tèrmic, i per a valors petit direm que es un aillant tèrmic. En general k depèn de diversos factors, entre ells, la mateixa temperatura. Amb el que tindriem per a cada element de volum una determinada conductivitat. Pero si la diferència de temperatures és petita les variacions provocades per aquest factor son negligibles[1]. Fent us d'aquesta aproximació es simplifiquen enormement les seguents equacions. Si es considera un sistema de volum V limitat per una superficie S, s'ens permet definir la potencia total dissipada o absorbida per el cos, com:

$$P = \int \dot{\vec{q}}\,\overrightarrow{dS} + \int \dot{q}_e dV \qquad (2)$$

on $\dot{q}_e$ es la quantitat de calor emmagatzemada per unitat de volum i temps en el sistema. Suposant que no hi ha canvis de fase, es pot escriure,

$$\dot{q}_e = \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) \qquad (3)$$

on ρ i c son la densitat i la calor específica del sistema. Definit una funció de dissipació local $\pi(r,t)$ tal que:

$$P = \int \pi(r,t) dV \qquad (4)$$

Substituint (1), (3) i (4) en l'equació (2) i aplicant el teorema de la divergencia resulta:

$$\int \left(\pi + k\Delta T - \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\right) dV = 0 \qquad (5)$$

on Δ és l'operador Laplaciana. Finalment podem escriure:

$$\frac{\pi}{\rho c} + D\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (6)$$

on $D = k/\rho c$ és la difusivitat del sistema.

Si s'aproxima el problema de transport de calor a un sistema unidimensional, podem escriure l'equació general (5) com:

$$k\left(\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right) + \pi(x,t) = \rho c \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right) \qquad (7)$$

on $\pi(x,t)$ determina les perdues per convecció com a conseqüència del contacte de la barra amb el fluid. Si suposem que aquest terme només depèn de la diferencia de temperatura entre la barra i el fluid, tenim:

$$\pi(x,t) = \frac{hC_a}{\Phi}\left(T(x,t) - T_0\right) \qquad (8)$$

on C_a es la capacitat calorífica del fluid, Φ la secció lateral de la barra i h una constant.

Imposant les condicions de contorn del sistema podem resoldre l'equació diferencial (6)

Quan s'assoleix l'estat estacionari, T no depèn de t, i l'equació (6) ens diu que la variació del flux de calor

[1] A més, en el cas dels metalls, la conductivitat tèrmica es mante practicament constant per a un ampli rang de temperatures.

amb la coordenada x coincideix amb les pèrdues convectives. La distribució estacionaria de temperatures vindrà donada per la solució de l'equació diferencial:

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \left(\frac{hC_a}{k\Phi}\right)\Theta \qquad (9)$$

on $\Theta = T - T_0$. La solució de l'equacio (8) es $\Theta = Aexp(\alpha x)$, amb $\alpha = \pm(hC_a/k\Phi)^{\frac{1}{2}}$. Imposant que per a x=0 la temperatura sigui la del forn, T_m, s'obte:

$$\Theta = (T_m - T_0)exp\left[-\left(\frac{hC_a}{k\Phi}\right)^{\frac{1}{2}}x\right] \qquad (10)$$

aplicant logaritmes a la equació (9) obtenim una expresió més comode per a representar-la graficament.

$$ln\Theta = ln(T_m - T_0) - \alpha x \qquad (11)$$

S'obtindran dues rectes de pendents α_1 i α_2 de les dues barres. I sabent que $\alpha = (hC_a/k\Phi)^{\frac{1}{2}}$, podem posar la conductivitat tèrmica d'un material respecte de l'altre, de la manera:

$$k_2 = k_1\left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right) \qquad (12)$$

i, per tant, es pot donar un valor de la conductivitat tèrmica d'un material desconegut coneixent la de l'altre.

2 Metodologia

Es tenen dues barres cilíndriques de secció S de conductivitat tèrmica K_1 i K_2, cadascuna en contacte amb un dels seus extrems amb un forn TECNOPIRO a una temperatura constant T_m = 300 °C. Ambdues barres es troben inicialment en equilibri tèrmic amb un fluid (atmosfera) a una temperatura T_0=23.9 °C, tot i que aquesta va variar durant l'experiment, provocant una lleugera perturbació tèrmica com es podrà observar en les figures 1 i 2.

El termoparell utilitzat es un termodigit PM-3900 amb un sensor de Fe-Cr conectat a un lector digital que dona la temperatura en °C amb un δT=0.1°C.

Per mesurar el temps es va utilitzar un cronòmetre de error instrumental δt=1s. Però suposem que l'error d'aquest es despreciable en tant que el fenòmen te una convergencia prou lenta, i a mès, l'interval de temps entre mesura i mesura per a un mateix x es de 7 minuts.

Les barres cilíndriques es troben dins d'uns tubs metalics on s'hi han practicat forats cada 5 cm. S'escolleix un Δx = 10 cm. i x pren valors, 10 cm. < x < 90 cm.

3 Resultats

Les dues primeres coleccions de dades del cuadern es van desestimar perque es van agafar sense donar el temps necessari perque el sensor recollis una lectura correcta.

Estudiant la variació de la temperatura en funció del temps per a cada valor de X, es pot comprobar que les dues barres convergeixen a un estat estacionari on la distribució de temperatures es manté constant.

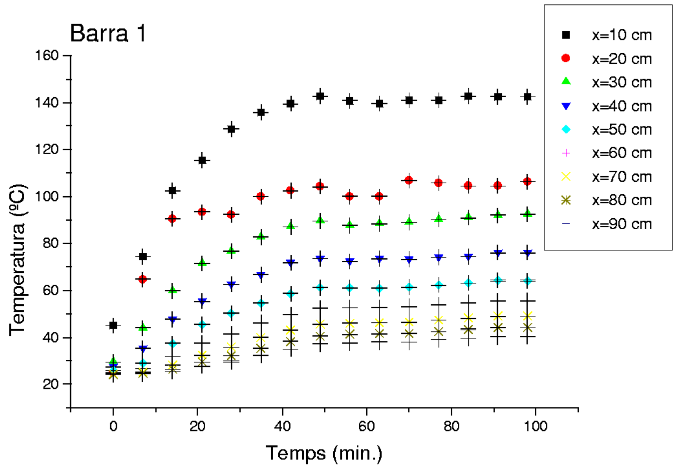

fig. 1. variacio de la temperatura en funcio del temps per a x fixe en la barra 1

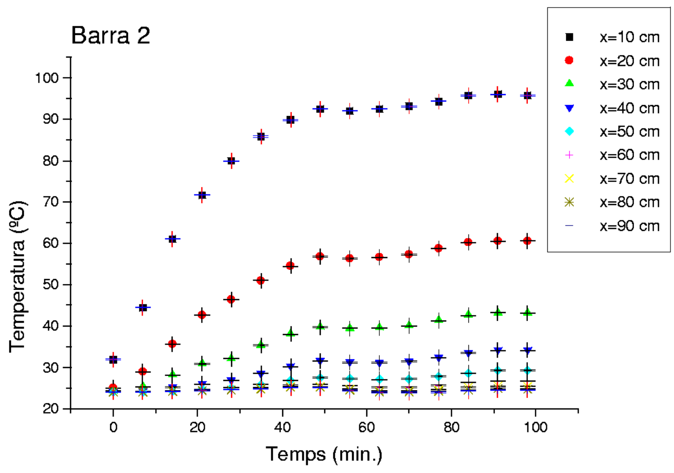

fig. 2. variacio d la temperatura en funcio del temps per a x fixe en la barra 2

Es pot observar en la figura 1 que per a x=20 les estimacions de temperatura fluctuen molt, això es degut a que l'orifici on calia introduir el sensor estaba obstruit, i era imposible extreure dades fiables. Per aquest motiu s'ha decidit excloure aquestes dades de la colecció a l'hora de fer els calculs.

Durant l'experiment la temperatura del medi, T_0 va variar al obrir-se una finestra, provocant una lleugera perturvació tèrmica a t=50 min. com es observar en les figures 1 i 2.

Un cop assolit l'estat estacionari, T no depèn de t, i aleshores podem ajustar per mínims quadrats les dades[2] obtingudes fixant el temps a t=98 s. a la funció (11). D'aquesta manera podem extreure els valors de α_1i α_2 i sabent que k_1=3.97 $Wcm^{-1}K^{-1}$ podem estimar el valor de k_2.

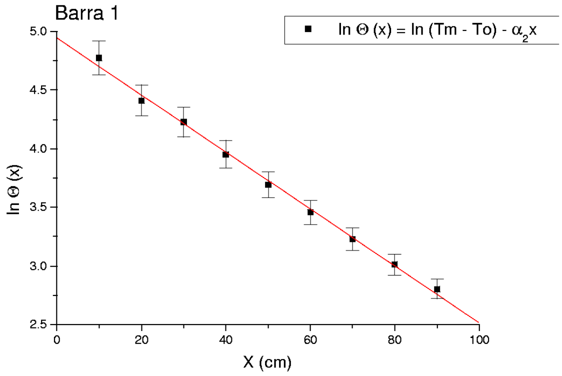

fig. 3. ajust per minims quadrats de la funcio (11) de la barra 1 en estat estacionari (t=98 s.)

Per a la barra 1 obtemin els seguents resultats:
$Y = A + BX$
$A = ln(T_m - T_0) = 4.944 \pm 0.031$
$B = -\alpha_1 = -0.0243 \pm 0.0006$ m^{-1}
$r = -0.9982$

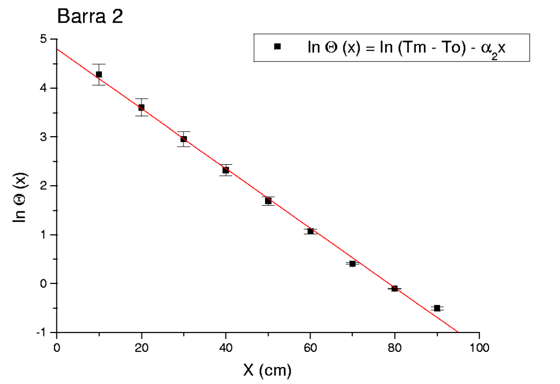

fig. 4. ajust per minims quadrats de la funcio (11) de la barra 2 en estat estacionari (t=98 s.)

i per a la barra 2 tenim:
$Y = A + BX$
$A = ln(T_m - T_0) = 4.7955 \pm 0.0710$

[2]s'han pres aquests valors considerant que son els punts més propers a l'estat estacionari i que es troben menys pertubats per les variacions en la temperatura del medi

$B = -\alpha_2 = -0.0610 \pm 0.0013$ m^{-1}
$r = -0.9985$
i a partir de l'equació (12) i fent la propagació d'errors obtenim el seguent valor de la conductivitat tèrmica del material de la barra 2
$k_2 = 0.63 \pm 0.05$ Wcm^{-1}K^{-1}

4 Conclusió

Es possible que els resultats no siguin els esperats. Per una banda, tenim que a t=50 min. es va perturbar tèrmicament el sistema. Comparant el resultat obtingut en les taules de Missenard[3] esbrinem que la K del metall desconegut pot correspondre al Zn o al K.

References

[1] Mark W. Zemansky, 1968, Calor y termodinámica, 3a Ed., Aguilar S.A. de Ediciones, 86, 114.

[2] Lluís Mañosa, 1997, manual de laboratori de termodinàmica, 1a Ed., Universitat de Barcelona Ed., 31, 34

[3] André Missenard,1965, Conductivité thermique des solides, liquides, gaz et de leurs mélanges, 5ª Ed., Éditions Eyrolles, 481, 489