

# Rotaciones en álgebra de Clifford $Cl_{3,0}$

Jóse A. Rodríguez

18 de septiembre de 2001

Original de <http://www.geocities.com/cyberfisica>

## 1 Operadores y matrices de rotación

Los operadores de rotación de ángulo  $\theta$  alrededor de los tres ejes coordenados representados por los vectores  $e_1, e_2, e_3$  son:

$$r_x(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_{32}$$

$$r_y(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_{13}$$

$$r_z(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_{21}$$

Esto es lo mismo que escribir  $r_x = \exp(\theta e_{32}/2)$ , y análogamente para los otros dos operadores.

Estos tres operadores constituyen el **factor por la izquierda** de la ley universal de transformación bajo rotaciones:  $A' = r A r^{-1}$  donde  $r$  es, por ejemplo, uno de los operadores anteriores o bien otro que provoque una rotación alrededor de un eje arbitrario. Por ejemplo, una rotación de ángulo  $\theta$  del elemento  $A$  alrededor del eje  $x$  se escribiría como:

$$A' = r_x A r_x^{-1}$$

Los operadores inversos son fáciles de obtener: tan sólo se ha de cambiar por un - es signo + de delante del sin (ver Apéndice para la demostración).

### 1.1 Generadores de las rotaciones

Cuando un operador de rotación lo podemos escribir en la forma exponencial, como por ejemplo  $r_x = \exp(\theta e_{32}/2)$ , entonces el bivector exponenciado se llama **generador de la rotación**. En el ejemplo que se ha dado, el operador corresponde a una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $x$ , por tanto se dirá que  $J_x = e_{32}/2$  es el generador de las rotaciones alrededor del eje  $x$ . Análogamente los generadores de las rotaciones alrededor de  $y$  y  $z$ :

$$J_y = e_{13}/2 \quad J_z = e_{21}/2$$

El grupo de rotaciones en el espacio está caracterizado por las relaciones de conmutación que satisfacen estos tres generadores:

$$[J_x, J_y] = J_z \quad [J_y, J_z] = J_x \quad [J_z, J_x] = J_y$$

donde  $[a, b]$  es el conmutador de  $a$  y  $b$  y se define como  $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ , como en Mecánica Cuántica. Para un giro arbitrario el generador será el bivector que es exponenciado.

## 1.2 Equivalencia en el álgebra lineal

En el formalismo del álgebra lineal, la matriz de la transformación rotación se puede obtener a partir de lo que se ha visto. Sea  $r$  el operador que representa el factor por la izquierda de una rotación alrededor de un eje arbitrario. La matriz de esta transformación es:

$$\begin{pmatrix} (re_1r^{-1})^x & (re_2r^{-1})^x & (re_3r^{-1})^x \\ (re_1r^{-1})^y & (re_2r^{-1})^y & (re_3r^{-1})^y \\ (re_1r^{-1})^z & (re_2r^{-1})^z & (re_3r^{-1})^z \end{pmatrix}$$

donde  $()^i$  representa la componente  $i$  del vector referido. De la misma manera podemos encontrar la matriz que transforma a los bivectores bajo rotaciones, es la misma que para los vectores, siempre que la base de los bivectores se escoja en el orden geométrico adecuado:  $\{e_{23}, e_{31}, e_{12}\}$ . Es decir, es la misma que la anterior cambiando  $e_1$  por  $e_{23}$ , etc.

Es fácil comprobar que los escalares y pseudoescalares (volumen) son invariantes bajo rotaciones definidas de esta manera, como era de esperar.

## 1.3 Rotaciones alrededor de un eje arbitrario

Lo que tienen en común las expresiones de  $r_x$ ,  $r_y$  y  $r_z$  es que tienen la forma  $\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\hat{b}$ , donde  $\hat{b}$  es un bivector de cuadrado  $-1$  y orientación contraria al eje de rotación, ya que  $e_{23}$  es el primer elemento de la base de los bivectores, y en la rotación alrededor del eje  $x$  aparece el  $e_{32} = -e_{23}$ . Por lo tanto podemos intuir que, para caracterizar una rotación alrededor de un eje arbitrario, ésta tendrá la forma  $\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\hat{b}$ , sóloamente que ahora  $\hat{b}$  será el bivector de cuadrado  $-1$  que apunta en dirección contraria al eje según el cual se rota. Esto nos enseña que, aunque en el álgebra cotidiano los ejes los indiquemos con vectores, la naturaleza de los ejes de rotación es bivectorial.

Supongamos que queremos rotar un elemento de  $Cl_{3,0}$  alrededor de un eje que apunta según el vector unitario  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$ . Ya hemos dicho que los ejes de rotación tienen naturaleza bivectorial, así que en verdad estamos cometiendo una tergiversación al representar el eje de esa manera. Usemos el operador  $e_{123}$ , que aplicado tanto por la izquierda como por la derecha transforma un vector en un bivector de las mismas componentes, siempre que el orden de los bivectores de la base lo escojamos según el criterio geométrico usual. Entonces  $e_{123}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{23} + e_{12})$ , y así la rotación de ángulo  $\theta$  vendría caracterizada por:

$$\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{32} + e_{21})\right)$$

En este caso, el generador de la rotación sería:

$$J = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e_{32} + e_{21})$$

De la misma manera se puede definir el operador rotación para un eje que está orientado según las coordenadas esféricas angulares  $\theta$  y  $\phi$ :

$$r_{\theta,\phi}(x) = \cos(x/2) + \sin(x/2)(\sin(\theta)\cos(\phi)e_{32} + \sin(\theta)\cos(\phi)e_{13} + \cos(\theta)e_{21})$$

Se puede usar de la misma manera el método del apartado anterior para obtener la matriz de rotación alrededor de cualquier eje.

## 2 Parametrización de Euler

Hemos visto antes que los ejes de rotación tienen naturaleza bivectorial, el cómo representarlos por un bivector, incluso si vienen dados ("de manera incorrecta") por un vector. Ahora usaremos el mismo formalismo, pero para que nos permita trabajar con las parametrizaciones de Euler. Las parametrizaciones de Euler se usan para representar orientaciones (y éstas siempre podemos asociarlas a ejes), dando tres ángulos y los ejes alrededor de los cuales se giran esos ángulos. Es decir, la orientación final es el resultado de tres rotaciones consecutivas alrededor de ejes convenientes según el propósito. Por ejemplo, una de las más usadas es la más sencilla que se nos puede ocurrir: la orientación de un eje la daremos así: giramos  $c$  grados alrededor del eje  $z$ ,  $b$  grados alrededor del eje  $y$ , y  $a$  grados alrededor del eje  $x$ . De esta manera podemos representar cualquier eje dando  $(a, b, c)$ . El operador rotación alrededor de ese eje que viene dado por tres rotaciones consecutivas  $(a, b, c)$  se puede escribir como:  $r = (\cos a + \sin a e_{32})(\cos b + \sin b e_{13})(\cos c + \sin c e_{21})$ . Si desarrollamos este triple producto, se puede ver que podemos escribir  $r$  en la forma  $\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)b$  y de esta manera podríamos obtener las coordenadas de la orientación del eje único alrededor del cual se gira.

### 2.1 Teorema de Euler

Existe un teorema bastante interesante que dice que esta rotación que hemos hecho es idéntica a hacer una rotación de ángulo  $a$  respecto a  $x$ , seguida de una de ángulo  $b$  y eje  $y'$ , que es la imagen del eje  $y$  según la primera rotación, y finalmente una de ángulo  $c$  y eje  $z''$ . El operador de esta última manera de rotar no es tan fácil de escribir (de hecho es una expresión bastante larga que una vez escrita se reduce a la expresión anterior de  $r$ ), así que el teorema resulta bastante útil cuando nos dan la parametrización de esta última forma.

Es el caso, por ejemplo, de los *ángulos de Euler* de la mecánica. Allí se trata de hacer giros de ángulos  $c$ ,  $b$  y  $a$  alrededor de los ejes  $z$ ,  $x'$  y  $z''$ , respectivamente. Pero según el teorema esto es igual a hacer giros de  $a$ ,  $b, c$  alrededor de  $z$ ,  $x$  y  $z$ , y esto sí que sabríamos expresarlo de una manera similar a como se muestra en la última expresión para  $r$ , y tratarlo de manera matemática.

## Apéndice A: Inverso del operador de rotación

Hemos visto que las rotaciones se escriben como  $A' = r \cdot A \cdot r^{-1}$ , y hemos dado las expresiones de  $r$ . Este apéndice trata de la manera de calcular  $r^{-1}$ . Tomaremos para ello el operador

$$r_x(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_{32}$$

Es un elemento que consta de dos partes: una escalar, y otra que va acompañada por  $e_{32}$ , elemento que tiene como cuadrado -1. Todos los elementos que consten de estas dos partes forman un espacio isomorfo al de los complejos, como se ve, así que hay que proceder de la misma manera que al hacer el inverso/dividir complejos. El procedimiento es ya conocido: multiplicar y dividir la expresión  $1/r_x$  por su conjugada. Un vez hecho este fácil cálculo, obtenemos:

$$r_x^{-1} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_{32}$$

Si el lector encontrase algún problema en el cálculo, puede sustituier  $e_{32}$  por el imaginario puro  $i$  en la expresión de  $r_x$  y buscar su inverso tal como conoce del cálculo en variable compleja.