

Espacio de Minkowski como álgebra de Clifford

$Cl_{3,1}$

Jóse A. Rodríguez

18 de septiembre de 2001

<http://www.geocities.com/cyberfisica>

1 Bases de la relatividad especial y relación con el álgebra de Clifford

Un cuadvivector lo expresaremos como:

$$v = te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3$$

donde para que se satisfagan las reglas de la métrica Minkowskiana, se ha de cumplir que

$$e_0^2 = -1 \quad e_i^2 = +1$$

con $i = 1, 2, 3$. Es decir, el espacio de Minkowski es un álgebra de Clifford $Cl_{3,1}$.

Una de las magnitudes más representativas del espacio Minkowskiano es el campo electromagnético, $F^{\mu\nu}$, del cual podremos obtener las expresiones explícitas para el campo eléctrico y magnético. Resulta ser que en álgebra de Clifford un campo puramente eléctrico es un bivector tiempo-espacio y uno magnético es un bivector espacio-espacio:

$$E = E_x e_{01} + E_y e_{02} + E_z e_{03}$$

$$B = B_x e_{23} + B_y e_{31} + B_z e_{12}$$

Usaremos el sistema de Gauss, donde la velocidad se mide en fracción de velocidad de la luz (es decir una velocidad de $v = 0.5$ es en sistema internacional $v = 0.5c$).

2 Transformaciones ortogonales

Si realizamos el desarrollo de Taylor de $\exp(\theta/2e_{0i})$ obtenemos

$$\exp(\theta/2e_{0i}) = \cosh(\theta/2) + \sinh(\theta/2)e_{0i}$$

ya que $e_{0i}^2 = +1$. Por el contrario,

$$\exp(\theta/2e_{ij}) = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)e_{ij}$$

y esto es debido a que $e_{ij}^2 = -1$. Aplicando estas exponenciales como operadores (es decir multiplicando por la exponencial por la izquierda y por su inversa por la derecha) encontramos el resultado que se expone a continuación: el primer caso corresponde a un boost relativista de rapidez (o celeridad) $\theta/2$ y el segundo a una rotación de ángulo $\theta/2$.

3 Rotaciones y boosts

Veremos cómo escribir rotaciones y boosts dado un vector (en realidad bivector) unitario que representará en un caso el eje de rotación y en el otro la dirección del boost. La rotación del elemento X se expresa como rXr^{-1} , y el boost bXb^{-1} . El eje de rotación será un bivector espacio-espacio (en realidad no hay diferencia con las rotaciones en $Cl_{3,0}$, mientras que el "director" del boost es un bivector tiempo-espacio.

$$\hat{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(xe_{23} + ye_{31} + ze_{12})$$

$$\hat{b} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(xe_{01} + ye_{02} + ze_{03})$$

Operadores de rotación/boost

- Rotación $r(\theta) = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)\hat{r}$
- Boost $b(\xi) = \cosh(\xi/2) + \sinh(\xi/2)\hat{b}$

Si nos dan (incorrectamente) el eje de rot./dirección del boost con un vector, $\hat{n} = n_i e_i, i = 1, 2, 3$, entonces para transformarlo en el eje de rot. tan solo hemos de multiplicar (izqda. o dcha.) por e_{123} , si lo queremos transformar en el bivector correcto que indique la dirección del boost multiplicamos por la izquierda por e_0 .

4 Coordenadas esféricas

Daremos las fórmulas de la rotación y el boost en coordenadas esféricas. Es un caso interesante, porque al tratarse de orientaciones de ejes, nos basta con dos ángulos (θ, ϕ) , mientras que en cartesianas indicamos (x, y, z) . Definimos:

$$\tilde{r} = \sin(\theta) \cos(\phi)e_{23} + \sin(\theta) \sin(\phi)e_{31} + \cos(\theta)e_{12}$$

$$\tilde{b} = \sin(\theta) \cos(\phi)e_{01} + \sin(\theta) \sin(\phi)e_{02} + \cos(\theta)e_{03}$$

Operadores de rotación/boost en esféricas:

- Rotación $r(\alpha) = \cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2)\tilde{r}$
- Boost $b(\xi) = \cosh(\xi/2) + \sinh(\xi/2)\tilde{b}$

5 Transformación general

Se dice que todas las parejas posibles e_{ij} generan el grupo ortogonal $SO(p, q)$. Un elemento genérico del grupo ortogonal $SO(p, q)$ y la transformación que produce se escriben así:

$$X = \exp \left(\sum_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{2} e_{ij} \right)$$

$$B' = X B X^{-1} = \sum_k b'_k e_k = \exp \left(\sum_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{2} e_{ij} \right) \sum_k b_r e_r \exp \left(\sum_{i,j} -\frac{\alpha_{i,j}}{2} e_{ij} \right)$$

Los valores reales $\frac{\alpha_{ij}}{2}$, que pueden representar tanto la mitad del ángulo de rotación como la mitad de la rapidez del boost, dependiendo del cuadrado del generador de esa transformación, se llaman parámetros normales de la transformación representada por el elemento X .

6 Matriz de Lorentz

Dada una transformación de Lorentz x , definimos las columnas de la Matriz de Lorentz así:

$$\begin{pmatrix} x e_0 x^{-1} & x e_1 x^{-1} & x e_2 x^{-1} & x e_3 x^{-1} \end{pmatrix}$$

es decir, las columnas están formadas por los vectores que resultan de aplicar la transformación de Lorentz a la base e_μ .

7 Descomposición de una transformación de Lorentz genérica en un boost y una rotación

Una transformación de Lorentz general viene dada por

$$T = \alpha + A^i e_{0i} + C^i e_{jk} + \pi e_{0123}$$

y verifica que

$$k_1 \equiv \alpha^2 + C \cdot C - A \cdot A - \pi^2 = 1$$

$$k_2 \equiv 2(A \cdot C - \alpha\pi) = 0$$

Definiendo $k = (\alpha^2 + C \cdot C)^{-1/2}$, la descomposición es cuestión es:

$$T = (k\alpha + kC^i e_{jk}) \left(\frac{1}{k} + k(\alpha A^i + \pi C^i - (C \times A)^i) e_i \right)$$

8 Composición de transformaciones

Supongamos que en $Cl_{3,1}$ aplicamos dos rotaciones consecutivas alrededor de dos ejes diferentes. El operador por la izquierda de esta acción se escribe, por ejemplo, como:

$$r = [\cosh(\alpha/2) + \sinh(\alpha/2)e_{21}][\cosh(\beta/2) + \sinh(\beta/2)e_{13}]$$

Desarrollando obtenemos:

$$r = \cosh(\alpha/2) \cosh(\beta/2) + \cosh(\alpha/2) \sinh(\beta/2)e_{13} + \sinh(\alpha/2) \cosh(\beta/2)e_{21} - \sinh(\alpha/2) \sinh(\beta/2)e_{32}$$

Sin duda el objeto r , al ser aplicado según la ley universal de transformaciones rXr^{-1} genera una rotación, como era de esperar intuitivamente, ya que los bivectores que aparecen en la expresión son del tipo espacio-espacio.

Realicemos ahora dos boosts consecutivos en diferentes direcciones:

$$\begin{aligned} b &= [\cosh(\xi_1/2) + \sinh(\xi_1/2)e_{01}][\cosh(\xi_2/2) + \sinh(\xi_2/2)e_{01}] = \\ &= \cosh \xi_1/2 \cosh \xi_2/2 + \cosh \xi_1/2 \sinh \xi_2/2 e_{02} + \cosh \xi_2/2 \sinh \xi_1/2 e_{01} - \sinh \xi_1/2 \sinh \xi_2/2 e_{12} \end{aligned}$$

Y al contrario de lo que podríamos pensar intuitivamente, no sólo aparecen bivectores del tipo tiempo-espacio, sino que aparece uno espacio-espacio, con lo cual se concluye que la composición de dos boosts en diferentes direcciones no puede ser representada por un solo boost equivalente, ya que además aparece una rotación. Si ξ es pequeña, y aproximamos a primer orden: $b = 1 + \xi/2e_{02} + \xi_1/2e_{01} + \mathcal{O}(\xi^2)$ y las transformaciones sí que conmutan en este caso.

9 Movimiento uniformemente acelerado

En esta sección tratamos de encontrar los parámetros físicos que nos caractericen el movimiento uniformemente acelerado en relatividad. Haremos la discusión en términos de la celeridad o rapidez ξ de una partícula, que se define como $v = \tanh \xi$, donde v es la velocidad del sistema que permanece en reposo con la partícula (S'); esta velocidad medida respecto de un sistema que se encuentra fijo, el **sistema laboratorio**.

En relatividad, un punto se expresa como $x = x^0 e_0 + x^i e_i$ ¹ y su cuadrivelocidad es

$$u = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} e_0 + \frac{dx^i}{d\tau} e_i$$

donde τ se conoce como tiempo propio y es el tiempo medido en S' , el tiempo tal y como pasa para la propia partícula. Por eso, cuando miramos desde el sistema laboratorio, donde el tiempo es x^0 ,

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} e_0 + \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^0}{d\tau} e_i = \\ &= \gamma e_0 + \gamma v^i e_i \end{aligned}$$

y v^i es la tri-velocidad, la velocidad espacial de la partícula que medimos en el sistema laboratorio.

Si en lugar del parámetro $\gamma = 1/(1 + v^2)^{-1}$, más común didacticamente, usamos el parámetro ξ , escribimos esta última expresión como:

$$u = \cosh \xi e_0 + \sinh \xi u^i e_i$$

El hecho de que esta forma de u nos resulte familiar no es casualidad. El caso era una partícula que se mueve con una determinada velocidad respecto a un

¹en todo el documento un sub- o superíndice griego (μ, ν , etc.) recorre valores del 0 al 3 y uno latino (i, j , etc.) del 1 al 3

sistema fijo. En un sistema fijo, la cuadrivelocidad de cualquier partícula en reposo es e_0 (se obtiene directamente de la expresión de u). Y el hecho de que se mueva a una cierta velocidad (es decir con una cierta rapidez ξ) respecto a ese sistema equivale a hacer un boost de celeridad ξ a la partícula con cuadrivelocidad e_0 :

$$u = \exp(\xi_2 e_{0i}) e_0 \exp(\xi/2 e_{i0})$$

y obtendríamos la misma expresión para u que antes.

La cuadri-aceleración, obviamente (y suponemos el boost en dirección de e_1)

$$a = \frac{du}{d\tau} = \dot{\xi}(\sinh \xi e_0 + \cosh \xi e_1)$$

Para caracterizar el movimiento uniformemente acelerado nos damos cuenta de que $a^2 = \dot{\xi}^2$, y por tanto podemos afirmar que un movimiento de este tipo viene caracterizado por:

$$\dot{\xi} = cte \Rightarrow \xi = \xi_0 + a\tau$$

La velocidad en un movimiento uniformemente acelerado será:

$$u = \cosh(\xi_0 + a\tau) e_0 + \sinh(\xi_0 + a\tau) e_1$$

Esta expresión nos permitirá deducir las dependencias $x^0(\tau)$ y $x^1(\tau)$:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \cosh(\xi_0 + a\tau) \Rightarrow x_f^0 - x_i^0 = \frac{1}{a} [\sinh(\xi_0 + a\tau_f) - \sinh(\xi_0 + a\tau_i)]$$

$$\frac{dx^1}{d\tau} = \sinh(\xi_0 + a\tau) \Rightarrow x_f^1 - x_i^1 = \frac{1}{a} [\cosh(\xi_0 + a\tau_f) - \cosh(\xi_0 + a\tau_i)]$$

Ya tenemos $x(\tau)$, pero nosotros normalmente no estamos en el sistema de referencia en reposo con las partículas, sino en un sistema laboratorio respecto al cual se mueve aquella; por tanto más bien lo que nos interesa saber es $\tau(x)$. Lo que hay que hacer es, simplemente, invertir de las anteriores expresiones. Para ello tomaremos las simplificaciones $\xi_0 = 0$, $z(x^0 = 0) = 0$:

$$x^0 = \frac{1}{a} \sinh(a\tau)$$

$$\tau = \frac{1}{a} \operatorname{arcsinh}(ax^0)$$

Y para obtener la órbita $x^1(x^0)$ en el sistema laboratorio, simplemente sustituimos τ en la expresión correspondiente, es decir no hace falta invertir:

$$x^1 = \frac{1}{a} (\cosh(a\tau) - 1) = \frac{1}{a} [\cosh(\operatorname{arcsinh}(ax^0)) - 1]$$

Y como $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$,

$$x^1 = \frac{1}{a} \left(\sqrt{1 + (ax^0)^2} \right)$$

Por último demostremos que la aceleración es en todo momento perpendicular a la velocidad en relatividad: $u \cdot u$ es un escalar y por tanto su derivada respecto de τ es 0. Pero si la evaluamos directamente:

$$\frac{d(u \cdot u)}{d\tau} = 0 = 2 \frac{du}{d\tau} \cdot u = 2a \cdot u = 0$$