Isomorfismo entre el álgebra de Clifford $Cl_{3,0}$ y el espacio de matrices complejas 2x2 $C(2)$

Jose A. Rodríguez

18 de septiembre de 2001

Original de http://www.geocities.com/cyberfisica $Cl_{3,0}$ es isomorfo al espacio de matrices complejas 2×2 (C(2)). Este isomorfismo es:

$$e_1 \to \sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \to \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \to \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notemos que todas las σ_i cumpen que $\sigma_i^2 = -1$, y además:

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1$$

$$\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1 = -\sigma_3\sigma_2$$

$$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_3$$

y además: $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = iI$, donde I es la matriz identidad.
En mecánica cuántica, las σ_i se conocen como Matrices de Pauli, y se suelen usar al hacer referencia a los espines. El generador de las rotaciones de espín se escribe, en términos de las matrices de Pauli,

$$\vec{S} = i\frac{\theta}{2}\hat{n} \cdot \vec{\sigma}$$

donde $\hat{n}$ es un vector unitario en el espacio y $\vec{\sigma}$ es un vector que contiene a las matrices de Pauli, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ Si desarrollamos la expresión del espín obtendríamos un resultado incómodo, pero al usar el isomorfismo, podemos escribir en el marco del Álgebra de Clifford,

$$\vec{S} = i\frac{\theta}{2}(n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3)$$

$\vec{S}$ podría parecer un vector, de hecho se le representa con la flecha arriba como si así lo fuese, pero fijémonos que $i\sigma_k = \sigma_i\sigma_j$, así que en realidad

$$\vec{S} = \frac{\theta}{2}(n_1 e_{23} + n_2 e_{31} + n_3 e_{12})$$

$\vec{S}$ es un **bivector**! También se ve cómo resulta útil físicamente escoger la base de los bivectores como $\{e_{23}, e_{31}, e_{12}\}$ Si tenemos un elemento del álgebra de Clifford $Cl_{3,0}$

$$c = \alpha + a_i e_i + A_i e_{jk} + \lambda e_{123}$$

entonces, al hacer valer el isomorfismo, en el espacio de las matrices complejas escribiremos este elemento como

$$c = \begin{pmatrix} \alpha + a_3 + iA_3 + i\lambda & a_1 - ia_2 + iA_1 + A_2 \\ a_1 - ia_2 + iA_1 + A_2 & \alpha - a_3 - iA_3 + i\lambda \end{pmatrix}$$

Esto también se puede escribir como

$$c = (\alpha + i\lambda) \cdot I + (\vec{a} + i\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}$$

donde I es la matriz identidad. Tergiversando, podemos decir que hemos descompuesto c en una parte escalar y una parte vectorial, que tenemos suficiente con un escalar y un vector. Esto no es estrictamente cierto.