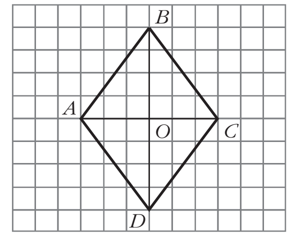
5 **Observa el rombo de la figura y calcula:**



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

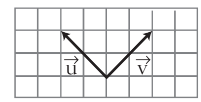
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ **d)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ **f)** $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$

Expresa los resultados utilizando los vértices del rombo.

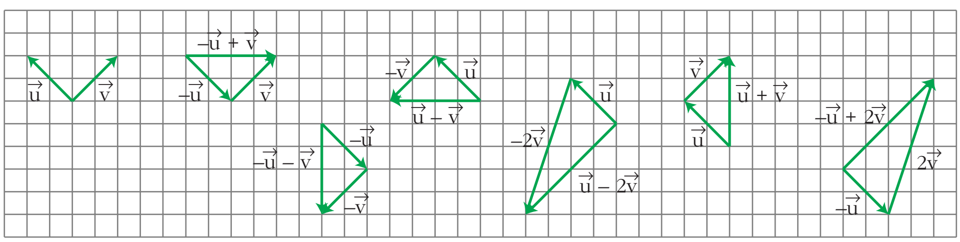
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $2\overrightarrow{DC}$

10 **A la vista de la figura, dibuja los vectores:**



$-\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $-\vec{u} - \vec{v}$, $-\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{u} - 2\vec{v}$

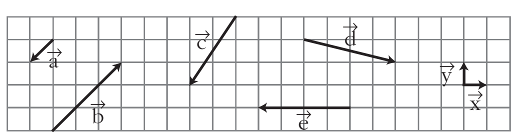
Si tomamos como base $(\vec{u}, \vec{v})$, ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?



$-\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1)$ $\vec{u} - \vec{v} = (1, -1)$ $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$

$-\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1)$ $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2)$ $\vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2)$

13 **Escribe las coordenadas de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ con respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.**



$\vec{a}(-1, -1)$ $\vec{b}(3, 3)$ $\vec{c}(-2, -3)$ $\vec{d}(4, -1)$ $\vec{e}(-4, 0)$

17 **Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.**

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Despejando en la primera ecuación $n = 3m$ y sustituyendo en la segunda:

$$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$$

19 **¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?**

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(-3, 1)$ **b)** $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ **c)** $\vec{u}(5, -4)$, $\vec{v}(5, 4)$

a) No, pues tienen la misma dirección $(\vec{u} = -\vec{v})$.

b) No, por la misma razón $(\vec{u} = 3\vec{v})$.

c) Sí, tienen distinta dirección $(\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier $k)$. Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

20 **Dados** $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ **y** $\vec{w}(5, 2)$, **calcula:**

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$ **b)** $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$ **d)** $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow\ \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

21 **Calcula** x, **de modo que el producto escalar de** $\vec{a}(3, -5)$ **y** $\vec{b}(x, 2)$ **sea igual a 7.**

$(3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \ \rightarrow\ 3x - 10 = 7 \ \rightarrow\ x = \frac{17}{3}$

22 **Dado el vector** $\vec{u}(-5, k)$ **calcula** k **de modo que:**

a) $\vec{u}$ **sea ortogonal a** $\vec{v}(4, -2)$. **b) El módulo de** $\vec{u}$ **sea igual a** $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \ \Rightarrow\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \rightarrow\ (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \ \rightarrow\ -20 - 2k = 0 \ \rightarrow\ k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \ \rightarrow\ 25 + k^2 = 34 \ \rightarrow\ k^2 = 9 \ \rightarrow\ k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

23 **Halla las coordenadas de un vector** $\vec{v}(x, y)$, **ortogonal a** $\vec{u}(3, 4)$ **y que mida el doble que** $\vec{u}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{v} \ \rightarrow\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ \rightarrow\ 3x + 4y = 0 \\ |\vec{v}| = 2|\vec{u}| \ \rightarrow\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{9 + 16} = 2\sqrt{25} = 10 \ \rightarrow\ x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

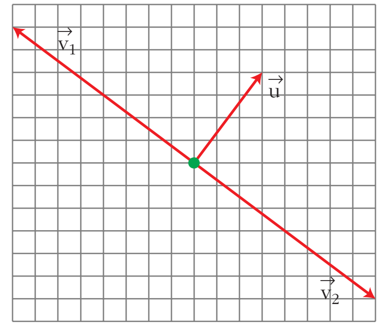
$$x = \frac{-4}{3}y \ \rightarrow\ \left(\frac{-4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \ \rightarrow\ \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \ \rightarrow\ \frac{25}{9}y^2 = 100 \ \rightarrow\ y = \pm 6$$

Si $y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{-4}{3} \cdot 6 = -8 \rightarrow \vec{v}_1\,(-8, 6)$

Si $y_2 = -6 \rightarrow x_2 = \frac{-4}{3} \cdot (-6) = 8 \rightarrow \vec{v}_2\,(8, -6)$

El problema tiene dos posibles soluciones, tales que:

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$



24 **Dados $\vec{a}(2, 1)$ y $\vec{b}(6, 2)$, halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$.**

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \cdot (2, 1) = 1 \rightarrow 2x + 2y = 1 \\ (x, y) \cdot (6, 2) = 0 \rightarrow 6x + 2y = 0\end{array}\right\}$$ Resolvemos el sistema:

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por (–1) y sumamos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -1 \\ 6x + 2y = 0 \\ \hline 4x \qquad = -1 \end{array} \rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

Sustituimos en una ecuación; por ejemplo en la segunda y despejamos la otra incógnita:

$$6x + 2y = 0 \rightarrow 6 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2y = 0 \rightarrow 2y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

Así, nuestro vector será: $\vec{v}\left(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

25 **Siendo $\vec{u}(5, -b)$ y $\vec{v}(a, 2)$, halla a y b, sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.**

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (5, -b) \cdot (a, 2) = 0 \rightarrow 5a - 2b = 0$

Si $|\vec{v}| = \sqrt{13}$, entonces $\sqrt{a^2 + 2^2} = \sqrt{13} \rightarrow a^2 + 4 = 13$

Resolvemos el sistema:

$$a^2 + 4 = 13 \rightarrow a = \pm 3$$

Entonces: Si $a = 3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{15}{2}$

Si $a = -3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{-15}{2}$

Luego hay dos posibles soluciones: $\vec{u}\left(5, \frac{-15}{2}\right)$, $\vec{v}\,(3, 2)$ O bien: $\vec{u}\left(5, \frac{15}{2}\right)$, $\vec{v}\,(-3, 2)$

26 **Halla el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:**

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ **b)** $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$ **c)** $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) Utilizamos las dos expresiones para calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 2(-5) = -7$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Igualando las dos expresiones, se tiene:

$-7 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot cos\,(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow cos\,(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = -0{,}38$

Luego: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112° \; 22' \; 48''$

b) Despejando directamente en la definición:

$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot cos\,(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) \rightarrow$

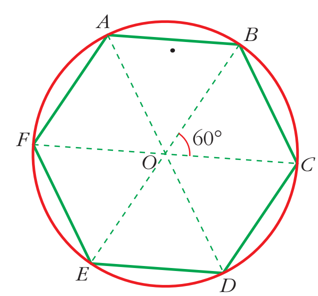
$\rightarrow cos\,(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2)}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = \dfrac{0}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = 0$

de donde: $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$ (basta con ver que $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$)

c) $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-1/2 - 18}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{37/2}} = \dfrac{-37/2}{\left(37\sqrt{2}\right)/2} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°$

27 **En una circunferencia de centro *O* y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono de vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.**
Calcula los productos:

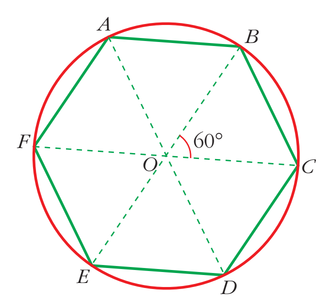


a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ **b)** $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$

c) $\vec{AB} \;\; \vec{ED}$ **d)** $\vec{BC} \;\; \vec{EF}$

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \; cos\,(\vec{OA}, \vec{OB})$

$= 2 \cdot 2 \cdot cos\,60° = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$



b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 2 \cdot 2 \cdot cos\,120° = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED} \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot cos\,0° \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

(*) *OAB* es un triángulo equilátero, luego:

$|\vec{AB}| = |\vec{OA}| = 2$

Razonamos igual para $|\vec{ED}|$.

d) $\vec{BC} = -\vec{EF}$ (mismo módulo, misma dirección y sentido opuesto)

Luego: $\vec{BC} \cdot \vec{EF} = 2 \cdot 2 \cdot cos\,180° = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$

28 **Dado el vector $\vec{u}(6, -8)$, determina:**

a) Los vectores unitarios (módulo 1) de la misma dirección que $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y ortogonales a $\vec{u}$.

a) Si $\vec{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{u}$, entonces:

O bien $(\vec{u}, \vec{v}_1) = 0°$

O bien $(\vec{u}, \vec{v}_2) = 180°$

- En el primer caso, si el ángulo que foman es 0°, entonces:

  $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 6x - 8y = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \cdot cos\ 0° \rightarrow$

  $\rightarrow 6x - 8y = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \rightarrow 6x - 8y = 10$

- Por otro lado, como $|\vec{v}_1| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$

  Resolvemos el sistema:

$$x = \frac{10 + 8y}{6} = \frac{5 + 4y}{3}$$

que, sustituyendo en la segunda ecuación, queda:

$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \dfrac{25 + 16y^2 + 40y}{9} + y^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 25 + 16y^2 + 40y + 9y^2 = 9 \rightarrow 25y^2 + 40y + 16 = 0$

$y = \dfrac{-40 \pm \sqrt{1600 - 1600}}{50} = \dfrac{-4}{5}$

Calculemos ahora x:

$$x = \frac{5 + 4y}{3} = \frac{5 + 4 \cdot (-4/5)}{3} = \frac{3}{5}$$

Así: $\vec{v}_1 = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-4}{5}\right)$

- En el segundo caso, es decir, si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}_2}) = 180°$, entonces debe ocurrir que $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_1$ formen 180°, es decir, que sean opuestos.

  Luego: $\vec{v}_2\left(\dfrac{-3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

b) $\vec{v} \perp \vec{u} \rightarrow (x, y) \cdot (6, -8) = 0 \rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \dfrac{8y}{6} = \dfrac{4}{3}y$

$|\vec{v}| = |\vec{u}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 = 100$

$\left(\dfrac{4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \dfrac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \rightarrow \dfrac{25}{9}y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 36 \rightarrow y = \pm 6$

- Si $y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \dfrac{4}{3}6 = 8 \rightarrow \vec{v}_1\ (8, 6)$
- Si $y_2 = -6 \rightarrow x_2 = -8 \rightarrow \vec{v}_2\ (-8, -6)$

c) $\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \dfrac{8y}{6} = \dfrac{4y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left(\frac{4y}{3}\right)^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; \frac{25}{9}y^2 = 1 \;\rightarrow\; y^2 = \frac{25}{9} \;\rightarrow\; y = \pm\frac{3}{5}$

- Si $y_1 = \frac{3}{5} \;\rightarrow\; x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$
- Si $y_2 = \frac{-3}{5} \;\rightarrow\; x_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{-4}{5}$

Así, $\vec{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad \vec{v}_2 \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

30 Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}(1, -3)$ y $\vec{b}(2, 5)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} = k(1, -3) + (2, 5) = (k + 2, -3k + 5) \\ \vec{y} = k(1, -3) - (2, 5) = (k - 2, -3k - 5) \\ \text{Como queremos } \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \end{array}\right\} \text{Entonces:}$$

$(k + 2, -3k + 5) \cdot (k - 2, -3k - 5) = 0$

$(k + 2)(k - 2) + (-3k + 5)(-3k - 5) = 0$

$k^2 - 4 + 9k^2 - 25 = 0 \;\rightarrow\; 10k^2 = 29 \;\rightarrow\; k = \pm\sqrt{\frac{29}{10}}$ (dos soluciones)

33 De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Como: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|\,|\vec{v}|\, cos\, 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

entonces podemos decir que:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\, cos\, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot cos\, 120° + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49$$

Luego: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

36 Si $|\vec{u}| = 7$, $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 10$, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

Razonando como en el problema resuelto número 8, llegamos a:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\, cos\, (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$10^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot cos\, (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 5^2$$

$$100 = 49 + 70\, cos\, (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 25$$

$$cos\, (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{100 - 49 - 25}{70} = 0{,}37143 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 68°\ 11'\ 46{,}5''$$

37 **Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios.**
¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \to \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \to (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$

$$5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios $\to |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$$5\,|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\,|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \to |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1}{2} \to (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$$

38 **Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45°.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,45° \to$$

$$7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \to$$

$$14 + 2x = \sqrt{100\,(1 + x^2)} \to \frac{14 + 2x}{10} = \sqrt{1 + x^2} \to$$

$$\frac{7 + x}{5} = \sqrt{1 + x^2} \to \frac{49 + x^2 + 14x}{25} = 1 + x^2 \to$$

$$49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \to 24x^2 - 14x - 24 = 0 \to$$

$$12x^2 - 7x - 12 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} \quad \begin{array}{l} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{array}$$

40 **Halla las coordenadas de cierto vector $\vec{x}$, sabiendo que forma un ángulo de 60° con $\vec{a}(\sqrt{3}, 1)$ y que los módulos de ambos son iguales.**

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{20} = |\vec{x}| \\ \text{Sea } \vec{x}(m, n) \end{array}\right\} \to \vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}|\,|\vec{x}|\,cos\,60° \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} 2m + 4n = \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} \cdot \dfrac{1}{2} \to 2m + 4n = 10 \\ \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{20} \to m^2 + n^2 = 20 \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema:

$$m = \frac{10 - 4n}{2} = 5 - 2n$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$(5 - 2n)^2 + n^2 = 20 \to 25 + 4n^2 - 20n + n^2 = 20 \to n^2 - 4n + 1 = 0$$

$$n = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \begin{array}{l} n_1 = 0{,}27 \\ n_2 = 3{,}73 \end{array}$$

- Si $n_1 = 0{,}27 \to m_1 = 5 - 2 \cdot 0{,}27 = 4{,}46 \to \vec{x}_1 = (4{,}46;\ 0{,}27)$
- Si $n_2 = 3{,}73 \to m_2 = 5 - 2 \cdot 3{,}73 = -2{,}46 \to \vec{x}_2 = (-2{,}46;\ 3{,}73)$

42 Dados los vectores $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(6, 4)$, halla la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot (\text{proy. de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u})$

$$(\text{proy. de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{6 + 12}{\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{18\sqrt{10}}{10} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

43 Dados los vectores $\vec{a}(5, 2)$ y $\vec{b}(4, -3)$, calcula la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y la de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot (\text{proy. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot (\text{proy. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b}) \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} \text{proy. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{20 - 6}{\sqrt{29}} = \dfrac{14}{\sqrt{29}} = \dfrac{14\sqrt{29}}{29} \\ \\ \text{proy. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{20 - 6}{\sqrt{25}} = \dfrac{14}{5} \end{array}\right.$$

59 Comprueba que los puntos medios de los lados del cuadrilátero de vértices $A(-2, 5)$, $B(4, 11)$, $C(10, 1)$, $D(0, -1)$ son los vértices de un paralelogramo.

Sean P, Q, R y S los puntos medios de los lados del cuadrilátero, como se indica en la figura.

- $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(6, -10) = (3, 3) + (3, -5) = (6, -2)$

  $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(2, -6) + \frac{1}{2}(10, 2) = (1, -3) + (5, 1) = (6, -2)$

  Luego: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ (misma dirección, mismo módulo)

  Por tanto, los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{SR}$ son iguales y paralelos.

- $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(-2, 6) + \frac{1}{2}(6, 6) = (-1, 3) + (3, 3) = (2, 6)$

  $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(10, 2) + \frac{1}{2}(-6, 10) = (5, 1) + (-3, 5) = (2, 6)$

  Así, $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ} \Rightarrow$ los lados opuestos $\overline{SP}$ y $\overline{RQ}$ son iguales y paralelos.

- Podemos concluir, por tanto, que $PQRS$ es un paralelogramo.