SOLUCIONES TRIGONOMETRÍA

12 **Si $sen\ x = \frac{3}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sin hallar previamente el valor de x:**

a) $sen\ 2x$ b) $tg\ \frac{x}{2}$ c) $sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ d) $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$cos\ x = -\sqrt{1 - sen^2\ x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ (Negativo, por ser del 2º cuadrante).

$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x} = -\frac{3}{4}$

a) $sen\ 2x = 2\ sen\ x\ cos\ x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

b) $tg\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \sqrt{\frac{1 - (-4/5)}{1 + (-4/5)}} = \sqrt{\frac{9/5}{1/5}} = 3$

Signo positivo, pues si $x \in 2º$ cuadrante, entonces $\frac{x}{2} \in 1^{er}$ cuadrante.

c) $sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = sen\ x\ cos\ \frac{\pi}{6} + cos\ x\ sen\ \frac{\pi}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$

d) $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = cos\ x\ cos\ \frac{\pi}{3} + sen\ x\ sen\ \frac{\pi}{3} = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$

f) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\ x + tg\ \pi/4}{1 - tg\ x\ tg\ \pi/4} = \frac{-3/4 + 1}{1 - (-3/4) \cdot 1} = \frac{1 - 3/4}{1 + 3/4} = \frac{1}{7}$

13 **Halla las R. trigonométricas de 15° de 2 formas, a) como 45° – 30° b) $15° = \frac{30°}{2}$**

a) $sen\ 15° = sen\ (45° - 30°) = sen\ 45°\ cos\ 30° - cos\ 45°\ sen\ 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0{,}258819$

$cos\ 15° = cos\ (45° - 30°) = cos\ 45°\ cos\ 30° + sen\ 45°\ sen\ 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0{,}965926$

$tg\ 15° = \frac{sen\ 15°}{cos\ 15°} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} =$

$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}267949$

b) $sen\ 15° = sen\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} =$

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 0{,}258819$

$cos\ 15° = cos\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0{,}9659258$

$tg\ 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{0{,}258819}{0{,}9659258} = 0{,}2679491$

15 **Halla el valor exacto de estas expresiones:**

b) $\boldsymbol{cos\ \frac{5\pi}{3} + tg\ \frac{4\pi}{3} - tg\ \frac{7\pi}{6}}$ **c)** $\boldsymbol{\sqrt{3}\ cos\ \frac{\pi}{6} + sen\ \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\ cos\ \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\ sen\ \frac{\pi}{3}}$

b) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6}$

c) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

17 **Si** $\boldsymbol{tg\ \alpha = -4/3}$ **y** $\boldsymbol{270° < \alpha < 360°}$**, calcula:**

a) $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ **b)** $\boldsymbol{cos\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right)}$ **c)** $\boldsymbol{tg\ (900° + \alpha)}$

$90° < \alpha < 180° \ \rightarrow \ \begin{cases} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{cases}$ Además, $\frac{\alpha}{2} \in 1^{er}$ cuadrante

- $tg\ \alpha = -\frac{4}{3}$
- $sec^2 \alpha = tg^2\ \alpha + 1 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9} \ \rightarrow \ cos^2\ \alpha = \frac{9}{25} \ \rightarrow \ cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$
- $sen\ \alpha = tg\ \alpha\ cos\ \alpha = -\frac{4}{3} \cdot -\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

a) $sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\ \frac{\pi}{2}\ cos\ \alpha - cos\ \frac{\pi}{2}\ sen\ \alpha = 1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 0 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

b) $cos\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right) = cos\ 180°\ cos\ \frac{\alpha}{2} + sen\ 180°\ sen\ \frac{\alpha}{2} = -cos\ \frac{\alpha}{2} =$

$$= -\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + (-3/5)}{2}} = -\sqrt{\frac{5 - 3}{10}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{10}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

c) $tg\ (900° + \alpha) = tg\ (2 \cdot 360° + 180° + \alpha) = tg\ (180° + \alpha) =$

$$= \frac{tg\ 180° + tg\ \alpha}{1 - tg\ 180°\ tg\ \alpha} = \frac{0 + (-4/3)}{1 - 0 \cdot (-4/3)} = -\frac{4}{3}$$

19 **Si** $\boldsymbol{cos\ 78° = 0{,}2}$ **y** $\boldsymbol{sen\ 37° = 0{,}6}$**, calcula** $\boldsymbol{sen\ 41°}$**,** $\boldsymbol{cos\ 41°}$ **y** $\boldsymbol{tg\ 41°}$**.**

$41° = 78° - 37°$

- $sen\ 78° = \sqrt{1 - cos^2\ 78°} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}98$
- $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$

Ahora ya podemos calcular:

- $sen\ 41° = sen\ (78° - 37°) = sen\ 78°\ cos\ 37° - cos\ 78°\ sen\ 37° =$
  $= 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$
- $cos\ 41° = cos\ (78° - 37°) = cos\ 78°\ cos\ 37° + sen\ 78°\ sen\ 37° =$
  $= 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$
- $tg\ 41° = \frac{sen\ 41°}{cos\ 41°} = \frac{0{,}664}{0{,}748} = 0{,}8877$

20 **Si** $tg\,(\alpha + \beta) = 4$ **y** $tg\,\alpha = -2$ **, halla** $tg\,2\beta$.

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta} \;\rightarrow\; 4 = \frac{-2 + tg\,\beta}{1 + 2\,tg\,\beta} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 4 + 8\,tg\,\beta = -2 + tg\,\beta \;\rightarrow\; 7\,tg\,\beta = -6 \;\rightarrow\; tg\,\beta = -\frac{6}{7}$$

Luego: $$tg\,2\beta = \frac{2\,tg\,\beta}{1 - tg^2\,\beta} = \frac{2 \cdot (-6/7)}{1 - 36/49} = \frac{-12/7}{13/49} = \frac{-12 \cdot 49}{7 \cdot 13} = -\frac{84}{13}$$

24 **Prueba que** $2\,tg\,x\,cos^2\,\dfrac{x}{2} - sen\,x = tg\,x$. ☛ ***Sustituye*** $cos^2\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + cos\,x}{2}$.

Como $cos\,\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + cos\,x}{2}} \;\rightarrow\; cos^2\,\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + cos\,x}{2}$

Y sustituyendo en la expresión:

$$2\,tg\,x\,cos^2\,\frac{x}{2} - sen\,x = 2\,\frac{sen\,x}{cos\,x} \cdot \frac{1 + cos\,x}{2} - sen\,x =$$

$$= \frac{sen\,x\,(1 + cos\,x) - sen\,x\,cos\,x}{cos\,x} \overset{(*)}{=} \frac{sen\,x\,[1 + cos\,x - cos\,x]}{cos\,x} = \frac{sen\,x}{cos\,x} = tg\,x$$

(*) Sacando factor común.

25 **Demuestra que** $cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = cos\,x$.

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \left[cos\,x\,cos\,\frac{\pi}{3} - sen\,x\,sen\,\frac{\pi}{3}\right] - \left[cos\,x\,cos\,\frac{2\pi}{3} - sen\,x\,sen\,\frac{2\pi}{3}\right] =$$

$$= \left[(cos\,x)\,\frac{1}{2} - (sen\,x)\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \left[(cos\,x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (sen\,x)\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,cos\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,x + \frac{1}{2}\,cos\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,x = cos\,x$$

27 **Prueba que** $\dfrac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = tg^2\,\dfrac{\alpha}{2}$.

$$\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha - 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{2\,sen\,\alpha + 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha\,(1 - cos\,\alpha)}{2\,sen\,\alpha\,(1 + cos\,\alpha)} =$$

$$= \frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha} = tg^2\,\frac{\alpha}{2}$$

28 **Simplifica:** $\dfrac{2\,cos\,(45° + \alpha)\,cos\,(45° - \alpha)}{cos\,2\alpha}$

$$\frac{2\,cos\,(45° + \alpha)\,cos\,(45° - \alpha)}{cos\,2\alpha} =$$

$$= \frac{2\,(cos\,45°\,cos\,\alpha - sen\,45°\,sen\,\alpha)\,(cos\,45°\,cos\,\alpha + sen\,45°\,sen\,\alpha)}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} =$$

En el numerador tenemos Suma por diferencia $\rightarrow$ Diferencia de cuadrados.

$$= \frac{2\,(cos^2 45° \; cos^2 \alpha - sen^2 45° \; sen^2 \alpha)}{cos^2 \alpha - sen^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left[\left(\sqrt{2}/2\right)^2 cos^2 \alpha - \left(\sqrt{2}/2\right)^2 sen^2 \alpha\right]}{cos^2 \alpha - sen^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 1/2 \; cos^2 \alpha - 2 \cdot 1/2 \; sen^2 \alpha}{cos^2 \alpha - sen^2 \alpha} =$$

$$= \frac{cos^2 \alpha - sen^2 \alpha}{cos^2 \alpha - sen^2 \alpha} = 1$$

30 **Simplifica la expresión $\dfrac{sen\ 2\alpha}{1 - cos^2 \alpha}$ y calcula su valor para $\alpha = 90°$.**

$$\frac{sen\ 2\alpha}{1 - cos^2 \alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{sen^2 \alpha} = \frac{2\ cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

Por tanto, si $\alpha = 90° \Rightarrow \dfrac{sen\ 2\alpha}{1 - cos^2 \alpha} = \dfrac{2\ cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{2 \cdot 0}{1} = 0$

14 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

b) $sen^2 x - sen\ x = 0$ **c)** $2\ cos^2 x - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$ **d)** $sen^2 x - cos^2 x = 1$

f) $2\ cos^2 x + sen\ x = 1$ **g)** $3\ tg^2 x - \sqrt{3}\ tg\ x = 0$

b) $sen\ x\ (sen\ x - 1) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{l} sen\ x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180° \\ sen\ x = 1 \;\rightarrow\; x_3 = 90° \end{array}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $cos\ x\left(2\ cos\ x - \sqrt{3}\right) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} cos\ x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ cos\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 30°,\; x_4 = 330° \end{array}\right.$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

d) $(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 \ \rightarrow \ 1 - 2\cos^2 x = 1 \ \rightarrow \ \cos^2 x = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ \cos x = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\[2ex] x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } \ k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo: $\quad x = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con } \ k \in \mathbb{Z}$

f) $2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 1 \ \rightarrow \ 2 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \ \rightarrow \ x_1 = 90° \\ -1/2 \ \rightarrow \ x_2 = 210°, \ \ x_3 = 330° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\[2ex] x_2 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\[2ex] x_3 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } \ k \in \mathbb{Z}$$

g) $\operatorname{tg} x \left(3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0°, \ \ x_2 = 180° \\[1ex] \operatorname{tgx} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \ \rightarrow \ x_3 = 30°, \ \ x_4 = 210° \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación inicial y vemos que las cuatro son válidas.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\[1ex] x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\[1ex] x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\[2ex] x_4 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } \ k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podría expresarse con solo dos soluciones que englobaran las cuatro anteriores:

$$x_1 = k \cdot 180° = k\pi$$

$$x_2 = 30° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{con } \ k \in \mathbb{Z}$$

31 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $sen\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\ sen\ x=0$ **c)** $sen\ 2x-2\cos^2 x=0$ **d)** $\cos 2x-3\ sen\ x+1=0$

a) $sen\ \frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\ sen\ x-\sqrt{2}\ sen\ x=0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x-\sqrt{2}\ sen\ x=0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x=0 \to \cos x-sen\ x=0 \to$

$\to \cos x=sen\ x \to x_1=\frac{\pi}{4},\ x_2=\frac{5\pi}{4}$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi=45°+k\cdot 360° \\ x_2=\frac{5\pi}{4}+2k\pi=225°+k\cdot 360° \end{array}\right\}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en:

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi=45°+k\cdot 180° \quad \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

c) $2\ sen\ x\cos x-2\cos^2 x=0 \to 2\cos x\,(sen\ x-\cos x)=0 \to$

$$\to \left\{\begin{array}{l} \cos x=0 \to x_1=90°,\ x_2=270° \\ sen\ x=\cos x \to x_3=45°,\ x_4=225° \end{array}\right.$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas:

$x_1=90°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$x_2=270°+k\cdot 360°=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

$x_3=45°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$x_4=225°+k\cdot 360°=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

d) $\cos^2 x-sen^2 x-3\ sen\ x+1=0 \to 1-sen^2 x-sen^2 x-3\ sen\ x+1=0 \to$

$\to 1-2\ sen^2 x-3\ sen\ x+1=0 \to 2\ sen^2 x+3\ sen\ x-2=0 \to$

$$\to sen\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}=\left\langle\begin{array}{l} 1/2 \to x_1=30°,\ x_2=150° \\ -2 \to \text{¡Imposible¡, pues } |sen\ x|\le 1 \end{array}\right.$$

Comprobamos que las dos soluciones son válidas.

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=30°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x_2=150°+k\cdot 360°=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right\}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

32 **Resuelve estas ecuaciones:** **a)** $tg^2 \dfrac{x}{2} + 1 = \cos x$ **b)** $2 sen^2 \dfrac{x}{2} + \cos 2x = 0$

a) $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + 1 = \cos x \to 1 - \cos x + 1 + \cos x = \cos x + \cos^2 x \to$

$\to 2 = \cos x + \cos^2 x \to \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \to$

$\to \cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \to x = 0° \\ -2 \to \text{¡Imposible!, pues } |\cos x| \le 1 \end{cases}$

Luego:

$$x = k \cdot 360° = 2k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $2 \cdot \dfrac{1 - \cos x}{2} + \cos^2 x - sen^2 x = 0 \to$

$\to 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \to 1 - \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \to$

$\to 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \to \cos x\,(2 \cos x - 1) = 0 \to$

$\to \begin{cases} \cos x = 0 \to x_1 = 90°, \ x_2 = 270° \\ \cos x = 1/2 \to x_3 = 60°, \ x_4 = 300° \end{cases}$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 &= 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}\right\} \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

33 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $tg\, 2x \cdot tg\, x = 1$ **b)** $\cos x \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ **c)** $sen\, 2x \cos x = 6\, sen^3 x$

a) $\dfrac{2\, tg\, x}{1 - tg^2 x} \cdot tg\, x = 1 \to 2\, tg^2 x = 1 - tg^2 x \to tg^2 x = \dfrac{1}{3} \to$

$\to tg\, x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3} \to \begin{cases} x_1 = 30°, \ x_2 = 210° \\ x_3 = 150°, \ x_4 = 330° \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 210° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}\right\} \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 30° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x_2 &= 150° + k \cdot 180° = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{aligned}\right\} \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos x\,(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\cos^2 x = 0 \;\to$

$\to\; \cos x\,(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) + 2\cos^2 x = 0 \;\to$

$\to\; 2\cos^3 x - \cos x + 2\cos^2 x = 0 \;\to\; \cos x\,(2\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0 \;\to$

$\to\; \cos x = 0 \;\to\; x_1 = 90°,\;\; x_2 = 270°$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \approx \begin{cases} -1{,}366 \;\to\; \text{¡Imposible!, pues } |\cos x| \le -1 \\ 0{,}366 \;\to\; x_3 = 68°\,31'\,51{,}1'',\;\; x_4 = 291°\,28'\,8{,}9'' \end{cases}$$

Las soluciones son todas válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k\cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\[2mm] x_2 = 270° + k\cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \\[2mm] x_3 = 68°\,31'\,51{,}1'' + k\cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\pi \\[2mm] x_4 = 291°\,28'\,8{,}9'' + k\cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2\,\text{sen}\,x\cos x\cos x = 6\,\text{sen}^3 x \;\to\; 2\,\text{sen}\cos^2 x = 6\,\text{sen}^3 x \;\to$

$\to\; 2\,\text{sen}\,x\,(1 - \text{sen}^2 x) = 6\,\text{sen}^3 x \;\to\; 2\,\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}^3 x = 6\,\text{sen}^3 x \;\to$

$2\,\text{sen}\,x - 8\,\text{sen}^3 x = 0 \;\to\; 2\,\text{sen}\,x\,(1 - 4\,\text{sen}^2 x) = 0 \;\to$

$\to\; \text{sen}\,x = 0 \;\to\; x_1 = 0°,\;\; x_2 = 180°$

$$\to\; \text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \;\to\; \text{sen}\,x = \pm\frac{1}{2} \;\to \begin{cases} x_3 = 30°,\;\; x_4 = 150° \\ x_5 = 210°,\;\; x_6 = 330° \end{cases}$$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas.

Damos las soluciones agrupando las dos primeras por un lado y el resto por otro:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\cdot 180° = k\pi \\[2mm] x_2 = 30° + k\cdot 90° = \dfrac{\pi}{6} + k\cdot\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

38 **Expresa *sen* 2α y *sen* 4α en función de *sen* α y *cos* α.**

- $\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$
- $\text{sen}\,4\alpha = \text{sen}\,(2\cdot 2\alpha) = 2\,\text{sen}\,2\alpha\cos 2\alpha =$

$$= 2\cdot 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) =$$

$$= 4\,(\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - \text{sen}^3\alpha\cos\alpha)$$

40 **Demuestra que para todo α se cumple:** $\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$

Desarrollamos la segunda parte de la igualdad:

$$\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\,\text{sen}\,\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\,sen\,\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\cos\alpha + sen\,\alpha) = \frac{2}{2}\,(\cos\alpha + sen\,\alpha) = \cos\alpha + sen\,\alpha$$

46 **Demuestra que si α, β y γ son los tres ángulos de un triángulo, se verifica:**

sen* $(\alpha + \beta)$ – *sen* γ = 0** ☛ ***Aplica que en todo triángulo: $\alpha + \beta$ = ***180°*** – γ

Como en un triángulo $\alpha + \beta + \gamma = 180° \rightarrow \alpha + \beta = 180° - \gamma$, entonces:

$sen\,(\alpha + \beta) = sen\,(180° - \gamma) = sen\,\gamma \rightarrow sen\,(\alpha + \beta) - sen\,\gamma = 0$