NÚMEROS COMPLEJOS

2 **Calcula en forma binómica:**

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$ **b)** $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$ **c)** i^{-216}

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i} = \dfrac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i} = \dfrac{18+6i}{2-2i} = \dfrac{(18+6i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} =$

$= \dfrac{36+36i+12i-12}{4+4} = \dfrac{24+48i}{8} = 3+6i$

b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)} = \dfrac{-2+3i}{-4+4i-2i-2} = \dfrac{-2+3i}{-6+2i} = \dfrac{(-2+3i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)} =$

$= \dfrac{12+4i-18i+6}{36+4} = \dfrac{18-14i}{40} = \dfrac{9-7i}{20} = \dfrac{9}{20} - \dfrac{7}{20}i$

e) $i^{-216} = \dfrac{1}{i^{216}} = \dfrac{1}{i^0} = \dfrac{1}{1} = 1$

7 **Calcula a y b de modo que se verifique $(a+bi)^2 = 3+4i$.**

$(a+bi)^2 = 3+4i$ $a^2 + bi^2 + 2abi = 3+4i$

$a^2 - b^2 + 2abi = 3+4i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$ $b = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{2}{a}$

$a^2 - \left(\dfrac{2}{a}\right)^2 = 3 \rightarrow a^2 - \dfrac{4}{a^2} = 3 \rightarrow a^4 - 4 = 3a^2 \rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$

$a^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$a = -2 \rightarrow b = -1$

$a = 2 \rightarrow b = 1$

11 **Halla el valor de b para que el producto $(3-6i)(4+bi)$ sea:**
a) Un número imaginario puro. **b) Un número real.**

$(3-6i)(4+bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b = (12+6b) + (3b-24)i$

a) $12 + 6b = 0 \rightarrow b = -2$ b) $3b - 24 = 0 \rightarrow b = 8$

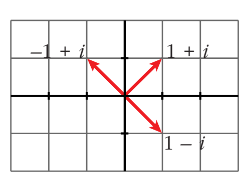
14 **Representa los complejos, sus opuestos y sus conjugados y exprésalos-en polar:**

a) $1 - i$ **b) $\sqrt{3} + i$** **c) –2i**

a) $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

Opuesto: $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

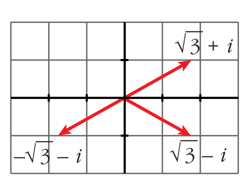
Conjugado: $1 + i = \sqrt{2}_{45°}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

Opuesto: $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

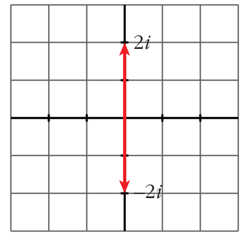
Conjugado: $\sqrt{3} - i = 2_{330°}$



f) $-2i = 2_{270°}$

Opuesto: $2i = 2_{90°}$

Conjugado: $2i = 2_{90°}$



15 Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $\mathbf{1_{150°}}$ **b)** $\mathbf{3_{(\pi/4)}}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{2}_{180°}}$ **d)** $\mathbf{1_{(\pi/2)}}$

a) $1_{150°} = \left(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}$

b) $3_{(\pi/4)} = 3\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}\right) = 3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\,i$

c) $\sqrt{2}_{180°} = \sqrt{2}\,(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = \sqrt{2}\,(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$

d) $1_{(\pi/2)} = \cos \dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = i$

16 Calcula en forma polar:

a) $\mathbf{(-1-i)^5}$ **d)** $\mathbf{\sqrt[3]{8i}}$ **e)** $\mathbf{\left(-2\sqrt{3} + 2i\right)^6}$

a) $(-1-i)^5 = \left(\sqrt{2}_{225°}\right)^5 = 4\sqrt{2}_{1\,125°} = 4\sqrt{2}_{45°} = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = 4 + 4i$

d) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = 2_{(90° + 360°\,k)/3} = 2_{30° + 120°\,k};\;\; k = 0,\, 1,\, 2$

Las tres raíces son: $2_{30°} = \sqrt{3} + i$ $\quad 2_{150°} = -\sqrt{3} + i$ $\quad 2_{270°} = -2i$

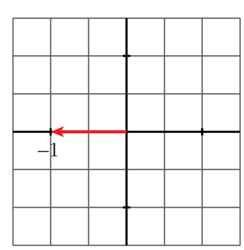
e) $\left(-2\sqrt{3} + 2i\right)^6 = (4_{150°})^6 = 4\,096_{900°} = 4\,096_{180°} = -4\,096$

17 Calcula y representa gráficamente el resultado:

a) $\mathbf{\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i}}$ **b)** $\mathbf{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3}$ **c)** $\mathbf{\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}}$ **d)** $\mathbf{\sqrt{-1-i}}$

a) $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \dfrac{i^7 - 1/i^7}{2i} = \dfrac{i^{14} - i}{2i^8} = \dfrac{i^2 - 1}{2} =$

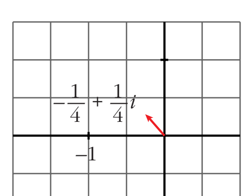
$= \dfrac{-1-1}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$



b) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}_{315°}}{2_{30°}}\right)^3 = \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285°}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855°} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135°} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{-1}{4} + \dfrac{1}{4}\,i$



c) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}} = \sqrt[3]{\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}} = \sqrt[3]{\dfrac{1+3i}{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i} =$

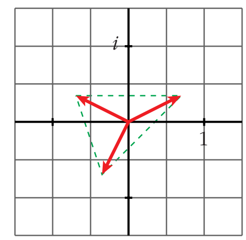
$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71^\circ\,34'}} = \left(\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71^\circ\,34' + 360^\circ k)/3} = \sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23^\circ\,51' + 120\,k}\,;\quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23^\circ\,51'} = 0{,}785 + 0{,}347i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{143^\circ\,51'} = -0{,}693 + 0{,}56i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{263^\circ\,51'} = -0{,}092 - 0{,}853i$



d) $\sqrt{-1-i} = \sqrt{\sqrt{2}_{225^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{(225^\circ + 360^\circ k)/2} = \sqrt[4]{2}_{112^\circ\,30' + 180^\circ k}\,;\quad k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$\sqrt[4]{2}_{112^\circ\,30'} = -0{,}46 + 1{,}1i$ $\qquad$ $\sqrt[4]{2}_{292^\circ\,30'} = 0{,}46 - 1{,}1i$

18 **Calcula y representa las soluciones:**

a) $\boldsymbol{\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}\,i}}$ $\qquad$ **b)** $\boldsymbol{\sqrt[4]{-16}}$ $\qquad$ **c)** $\boldsymbol{\sqrt[6]{-i}}$ $\qquad$ **d)** $\boldsymbol{\sqrt[5]{1}}$

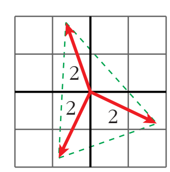
a) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}\,i} = \sqrt[3]{8_{300^\circ}} = 2_{(300^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{100^\circ + 120^\circ k}\,;\quad k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{100^\circ} = -0{,}35 + 1{,}97i$

$2_{220^\circ} = -1{,}53 - 1{,}26i$

$2_{340^\circ} = 1{,}88 - 0{,}68i$

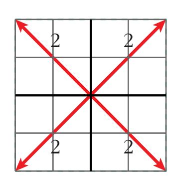


b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ + 90^\circ k}\,;\quad k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ $\qquad$ $2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ $\qquad$ $2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

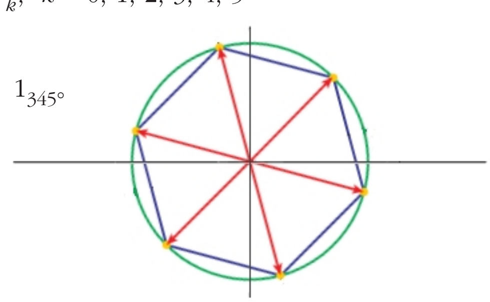


c) $\sqrt[6]{-i} = \sqrt[6]{1_{270^\circ}} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/6} = 1_{45^\circ + 60^\circ k}\,;\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$1_{45^\circ}\qquad 1_{105^\circ}\qquad 1_{165^\circ}\qquad 1_{225^\circ}\qquad 1_{285^\circ}\qquad 1_{345^\circ}$

Representación: Hexágono inscrito.
en una circunferencia de radio 1.

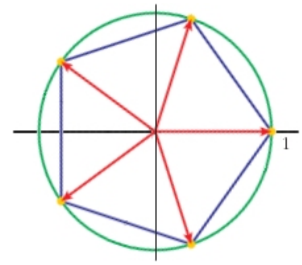


d) $\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1_{0°}} = 1_{360° k/5} = 1_{72° k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$1_{0°}$ $1_{72°}$ $1_{144°}$ $1_{216°}$ $1_{288°}$

Representación: Pentágono inscrito en una circunferencia de radio 1.



19 **Calcula pasando a forma polar:**

a) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^6 \left(\sqrt{3} - i\right)$ **b)** $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}\,i}$ **c)** $\dfrac{8}{(1 - i)^5}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{2 - 2i}{-3 + 3i}}$

a) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^6 \left(\sqrt{3} - i\right) = (2_{240°})^6 (2_{330°}) = (64_{1\,440°})(2_{330°}) =$

$= (64_{0°})(2_{330°}) = 128_{330°} = 128(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) =$

$= 128\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{-1}{2}\right) = 64\sqrt{3} - 64i$

b) $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}\,i} = \sqrt[4]{4_{120°}} = \sqrt[4]{4}_{(120° + 360° k)/4} = \sqrt[4]{2^2}_{30° + 90° k} =$

$= \sqrt{2}_{30° + 90° k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$\sqrt{2}_{30°} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ $\sqrt{2}_{120°} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

$\sqrt{2}_{210°} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ $\sqrt{2}_{300°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

c) $\dfrac{8}{(1 - i)^5} = \dfrac{8_{0°}}{(\sqrt{2}_{315°})^5} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{1\,575°}} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{135°}} = \left(\dfrac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135°} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225°} =$

$= \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

d) $\sqrt{\dfrac{2 - 2i}{-3 + 3i}} = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}_{315°}}{3\sqrt{2}_{135°}}} = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)_{180°}} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{(180° + 360° k)/2} =$

$= \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90° + 180° k}$; $k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90°} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{270°} = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$

20 **Calcula m para que el número complejo $3 - mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i$.**

$$\left.\begin{array}{l} |3 - mi| = \sqrt{9 + m^2} \\ |2\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i| = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \sqrt{9 + m^2} = 5 \rightarrow 9 + m^2 = 25 \rightarrow m^2 = 16 \\ m = \pm 4 \end{array}$$

Hay dos posibilidades: $m = -4$ y $m = 4$

23 **Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\frac{\pi}{3}$, y la suma de sus módulos 8.**

Sean $\boldsymbol{r_\alpha}$ ***y*** $\boldsymbol{s_\beta}$ los nmeros pedidos en forma polar. Escribimos las ecuaciones:

i) $\dfrac{\boldsymbol{r_\alpha}}{\boldsymbol{s_\beta}} = \boldsymbol{3} = \boldsymbol{3_{0^\circ}} \quad \rightarrow \quad \dfrac{r}{s} = 3 \quad$ y $\quad \alpha - \beta = 0^\circ$

ii) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{\boldsymbol{3}}$. iii) $\boldsymbol{r + s = 8}$

Obtenemos 2 ecuaciones para los mdulos y 2 para los argumentos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha - \beta = 0^\circ \\ \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right\}$$

Hallamos sus módulos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8;\ \ 4s = 8;\ \ s = 2;\ \ r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \beta = 0^\circ \\ \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right\} \alpha = \beta;\ \ 2\beta = \frac{\pi}{3};\ \ \beta = \frac{\pi}{6};\ \ \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y 2_π

24 **El producto de dos números complejos es $2i$ y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/2. Hállalos.**

Sean z y $\cdot w$ los nmeros complejos buscados.

$$\left.\begin{array}{l} z \cdot w = 2i \\ \dfrac{z^3}{w} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} 2z^3 = w;\ \ z \cdot 2z^3 = 2i;\ \ 2z^4 = 2i;\ \ z^4 = i$$

$$z = \sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{90^\circ}} = 1_{(90^\circ + 360^\circ\, k)/4} = 1_{22^\circ\, 30' + 90^\circ\, k};\ \ k = 0, 1, 2, 3$$

Hay cuatro soluciones:

$z_1 = 1_{22^\circ\, 30'} \rightarrow w_1 = 2z_1^3 = 2 \cdot 1_{67^\circ\, 30'} = 2_{67^\circ\, 30'}$

$z_2 = 1_{112^\circ\, 30'} \rightarrow w_2 = 2_{337^\circ\, 30'}$

$z_3 = 1_{202^\circ\, 30'} \rightarrow w_3 = 2_{607^\circ\, 30'} = 2_{247^\circ\, 30'}$

$z_4 = 1_{292^\circ\, 30'} \rightarrow w_4 = 2_{877^\circ\, 30'} = 2_{157^\circ\, 30'}$

31 **Calcula x para que el número complejo que obtenemos al dividir $\frac{x+2i}{4-3i}$ esté representado en la bisectriz del primer cuadrante.**

El número complejo $a + bi$ se representa como el punto (a, b), su afijo. Para que esté en la bisectriz del primer cuadrante, debe ser $a = b$.

$$\frac{x+2i}{4-3i} = \frac{(x+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{4x+3xi+8i-6}{16+9} = \frac{4x-6}{25} + \frac{3x+8}{25}i$$

Ha de ser:

$$\frac{4x-6}{25} = \frac{3x+8}{25} \rightarrow 4x-6 = 3x+8 \Rightarrow x = 14$$

33 **La suma de dos números complejos es $3 + i$. La parte real del primero es 2, y el cociente de este entre el segundo es un número real. Hállalos.**

Llamamos $z = a + bi$ y $w = c + di$

Tenemos que:

$$\begin{cases} z + w = 3 + i \\ a = 2 \rightarrow c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + c = 3 \\ b + d = 1 \rightarrow b = 1 - d \end{cases}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2+bi}{1+di} = \frac{(2+bi)(1-di)}{(1+di)(1-di)} = \frac{2-2di+bi+bd}{1+d^2} = \frac{2+bd}{1+d^2} + \frac{-2d+b}{1+d^2}i$$

Para que $\frac{z}{w}$ sea un número real, ha de ser:

$$\frac{-2d+b}{1+d^2} = 0 \rightarrow -2d+b = 0 \rightarrow b = 2d$$

$$2d = 1 - d \rightarrow 3d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}$$

Por tanto, los números son:

$$z = 2 + \frac{2}{3}i \quad \text{y} \quad w = 1 + \frac{1}{3}i$$

39 **El complejo 3_{40° es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.**

Los otros vértices tienen todos módulo 3 y se diferencian entre sí $360:5 = 72^\circ$

Por tanto serán: 3_{112° 3_{184° 3_{256° 3_{328°

El número será: $z = (3_{40^\circ})^5 = 243$

41 **Resuelve las ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica**

c) $x^2 + x + 4 = 0$ **b) $ix^3 - 27 = 0$** **c) $z^4 - 8z = 0$**

d) $z^3 + 8i = 0$ **e) $z^5 - z^4 - 16z + 16 = 0$**

a) $x^2 + x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$$

b) $ix^3 - 27 = 0 \ \rightarrow \ x^3 + 27i = 0 \ \rightarrow \ x^3 = -27i$

$x = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270°}} = 3_{(270° + 360°\ k)/3} = 3_{90° + 120°\ k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$3_{90°} \qquad 3_{210°} \qquad 3_{330°}$$

c) $z^4 - 8z = 0 \ \rightarrow \ z(z^3 - 8) = 0 \ \begin{cases} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{cases}$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0°}} = 2_{(360°\ k)/3} = 2_{120°\ k}$; $k = 0, 1, 2$

Las soluciones de la ecuación son:

$$0 \qquad 2_{0°} = 2 \qquad 2_{120°} = -1 + \sqrt{3}\,i \qquad 2_{240°} = -1 - \sqrt{3}\,i$$

d) $z^3 + 8i = 0 \ \rightarrow \ z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270°}} = 2_{(270° + 360°\ k)/3} = 2_{90° + 120°\ k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$2_{90°} = 2i \qquad 2_{210°} = -\sqrt{3} - i \qquad 2_{330°} = \sqrt{3} - i$$

e) $z^5 - z^4 - 16z + 16 = 0 \ \rightarrow \ (z - 1)(z^4 - 16) = 0 \ \begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt[4]{16} \end{cases}$

$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16_{0°}} = 2_{(360°\ k)/4} = 2_{90°\ k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las soluciones de la ecuación son:

$1 \qquad 2_{0°} = 2 \qquad 2_{90°} = 2i \qquad 2_{180°} = -2 \qquad 2_{270°} = -2i$