11 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD.

Problema 1

Representa gráficamente las siguientes funciones y di, de cada una de ellas, si es continua o discontinua:

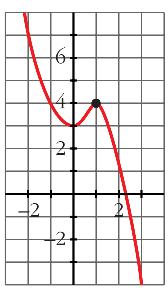
a) $y = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 1 \\ 5 - x^2 & x \geq 1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 4 & x < 0 \\ 4 - x & 0 \leq x \leq 5 \\ 2x - 11 & x > 5 \end{cases}$

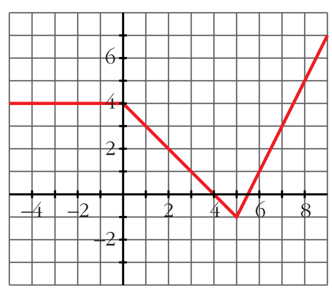
c) $y = \begin{cases} \sqrt{x + 3} & x < 1 \\ 2/x & x \geq 1 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 3 \\ x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$

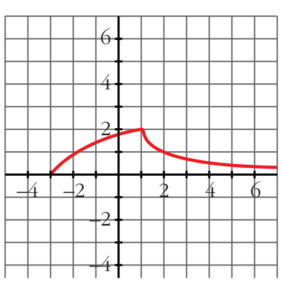
a)



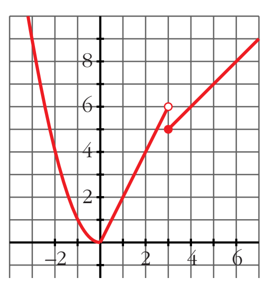
b)



c)



d)



Las tres primeras son continuas y d) es discontinua.

1. Explica por qué la función $y = x^2 - 5$ **es continua en todo** $\mathbb{R}$**.**

Porque es polinómica.

2. Explica por qué la función $y = \sqrt{5 - x}$ **es continua en** $(-\infty, 5]$**.**

Porque $(-\infty, 5]$ es su dominio, y en él no hay ningún punto crítico.

3. **Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:**

a) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-3x}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^2-3}{x}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **e)** $y = \begin{cases} 3x-4, & x < 3 \\ x+1, & x \geq 3 \end{cases}$ **f)** $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) Rama infinita en $x = 3$ (asíntota vertical).

b) Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

e) Salto en $x = 3$.

f) Salto en $x = 4$.

1. **Calcula el valor de los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) -2

2. **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2-3x+5}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$ b) -1

3. **Calcula** k **para que** $y = \begin{cases} x^3-2x+k & \text{si } x \neq 3 \\ 7 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ **sea continua en** $\mathbb{R}$.

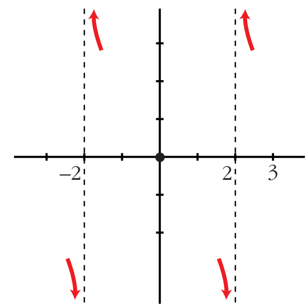
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} (x^3-2x+k) = 21+k \\ f(3) = 7 \end{array}\right\} 21+k = 7 \;\rightarrow\; k = -14$$

4. **Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados.**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ **en –2, 0 y 2** **b)** $f(x) = \dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ **en 2, 0 y 3**

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$ **en 1 y –3** **d)** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3+3x^2}$ **en 0 y –3**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+2)(x-2)}$

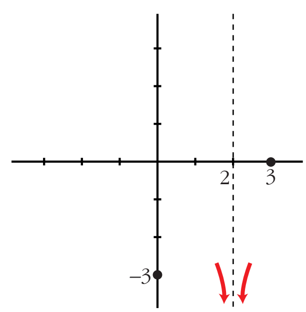


$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -2} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to 2} f(x)$$

b) $f(x) = \dfrac{4(x-3)}{(x-2)^2}$

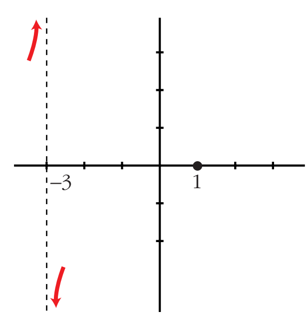


$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 0$$

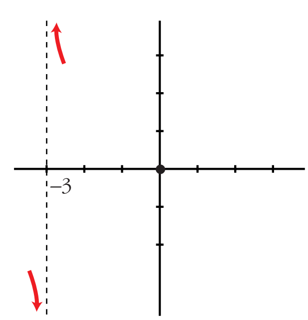
c) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)}$



$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -3} f(x)$$

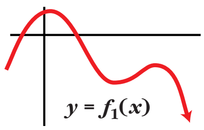
d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2(x+3)}$

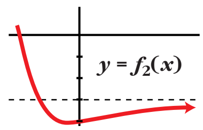


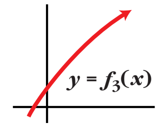
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

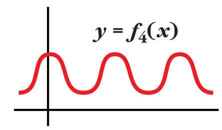
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -3} f(x)$$

1. **Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:**









$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x)$ no existe

1. **Di el valor del límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ $\qquad$ **b)** $f(x) = 5x^3 + 7x$ $\qquad$ **c)** $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ $\qquad$ **e)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$ $\qquad$ b) $+\infty$ $\qquad$ c) $-\infty$

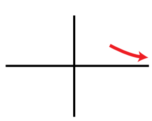
d) 0 $\qquad$ e) 0 $\qquad$ f) $-\infty$

4. **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:**

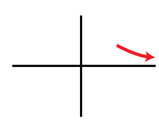
a) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ **d)** $f(x) = 3x - 5$

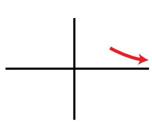
a) 0



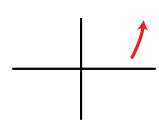
b) 0



c) 0



d) $+\infty$

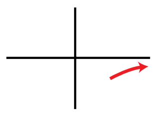


5. **Calcula** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **y representa sus ramas:**

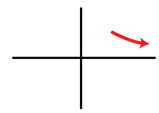
a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

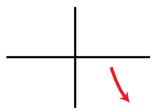
a) $-\infty$



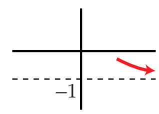
b) 0



c) $+\infty$



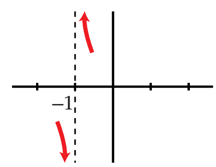
d) -1



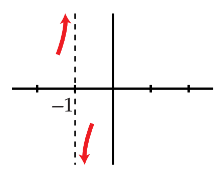
1. **Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:**

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -1$ es asíntota vertical



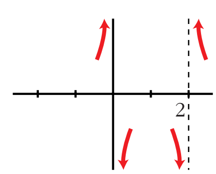
b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ $x = -1$ es asíntota vertical



2. **Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:**

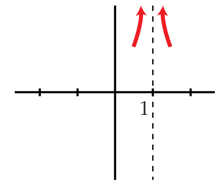
a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ $x = 0$ es asíntota vertical



$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 2$ es asíntota vertical

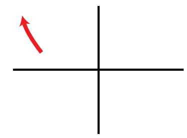
b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 1$ es asíntota vertical



1. **Halla $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y representa la rama correspondiente:**

$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$

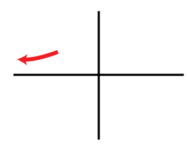
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 7x^4 = +\infty$



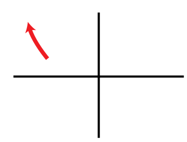
2. **Halla $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y traza las ramas correspondientes:**

a) $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$ **b) $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$**

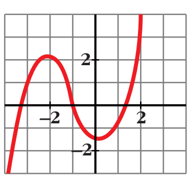
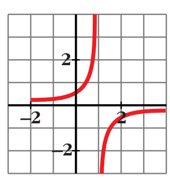
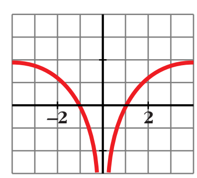
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

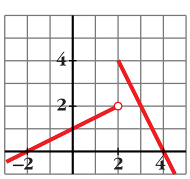
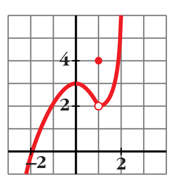
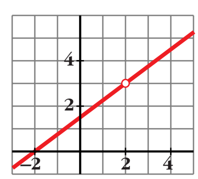


b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$



1 **a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?**
b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.

a)

b)

c)


d)

e)

f)


a) Solo la a).

b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

f) No está definida en $x = 2$.

2 **Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$

b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$

f) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

a) 0 y –1

b) 2

c) $-\dfrac{1}{2}$

d) Continua

e) 0 y 5

f) $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

3 **Comprueba si las siguientes funciones son continuas en $x = 0$ y en $x = -2$:**

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

d) $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) No es continua ni en $x = 0$ ni en $x = -2$.

b) Sí es continua en $x = 0$, no en $x = -2$.

c) No es continua en $x = 0$, sí en $x = -2$.

d) Continua en $x = 0$ y en $x = -2$.

4 **Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:**

a) $y = 5 - \dfrac{x}{2}$

b) $y = \sqrt{x - 3}$

c) $y = \sqrt{-3x}$

d) $y = \sqrt{5 - 2x}$

a) $\mathbb{R}$

b) $[3, +\infty)$

c) $(-\infty, 0]$

d) $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$

5 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(5 - \dfrac{x}{2}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-x}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0,5} 2^x$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$

f) $\lim\limits_{x \to 4} \log_2 x$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$

h) $\lim\limits_{x \to 2} e^x$

a) 5

b) 0

c) –2

d) $\sqrt{2}$

e) 4

f) 2

g) 1

h) e^2

6 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^3 - 10x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{3 - x}{2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{-3}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

7 **Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

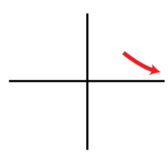
8 **Comprueba, que las siguientes funciones tienden a 0 cuando $x \to +\infty$.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10}$ **b)** $f(x) = \dfrac{100}{3x^2}$

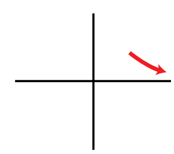
c) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{x}}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2}{10x^2 - x^3}$

Representa gráficamente su posición sobre el eje *OX* o bajo el eje *OX*.

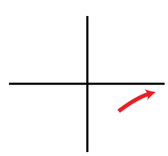
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



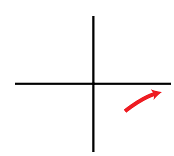
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



9 **Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:**

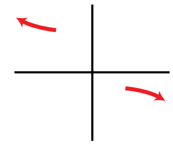
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - x)^2$

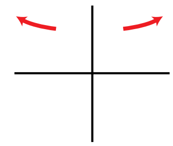
10 **Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.**

Resolución de los ejercicios 9 y 10:

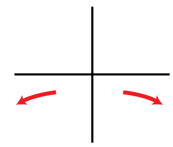
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$



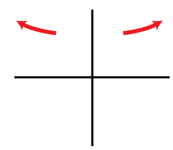
b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{-x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17 \right) = -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$



11 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3}$ **h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x}$

12 Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$

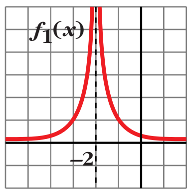
13 **Dada la función** $y = \dfrac{2x}{1-x}$, **halla:**

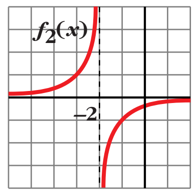
a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{1-x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{1-x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{1-x}$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) -2 d) -2

14





Estas son, respectivamente, las gráficas de las funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

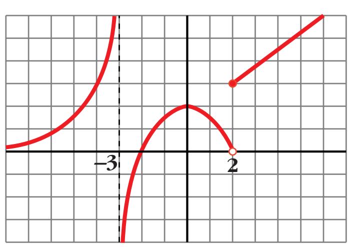
¿Cuál es el límite de cada una de estas funciones cuando $x \to -2$**?**

Observa la función cuando $x \to -2$ *por la izquierda y por la derecha.*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f_1(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f_1(x) = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -2} f_1(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f_2(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f_2(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -2} f_2(x)$$

15



Sobre la gráfica de la función $f(x)$, **halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **h)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$

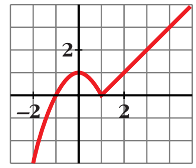
c) 2 d) 0

e) 0 f) 3

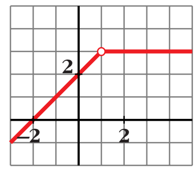
g) $+\infty$ h) 0

16 **Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica y di si son continuas o discontinuas en $x = 1$.**

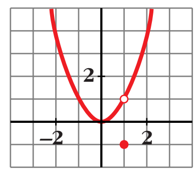
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Continua

b) Discontinua

c) Discontinua

17 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$**, halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

☛ ***Para que exista límite en el punto de ruptura, tienen que ser iguales los límites laterales.***

a) 5

b) 4

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

18 **Comprueba si la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **es continua en $x = 0$.**

☛ ***Recuerda que para que f sea continua en $x = 0$, debe verificarse que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.***

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$

Es continua en $x = 0$.

19 **Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:**

a) $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **en** $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2)-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$

a) No, pues no existe $f(-1)$.

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí es continua en $x = 2$.

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$. No es continua en $x = 1$.

20 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x^2 - 2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^3 - 2h^2}{h}$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 - 7h}{4h}$

☛ ***Saca factor común y simplifica cada fracción.***

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x(x-2)} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(2x+3)}{x} = 3$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2(3h-2)}{h} = 0$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h-7)}{4h} = -\dfrac{7}{4}$

21 **Resuelve los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{3}{-1} = -3$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = 2$

22 **Resuelve los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 1-(x-2)^2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+1}{5x}$

a) 3 b) $-\infty$ c) 0 d) $+\infty$

23 **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ **b)** $f(x) = 10x - x^3$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$

24 **Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x}$ en $x = 3$, $x = 0$ y $x = -1$.**

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{3}{4}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

25 **Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:**

a) $f(x) = \dfrac{3x}{2x+4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$ **d)** $f(t) = \dfrac{t^3-2t^2}{t^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x(x-2)}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

c) $f(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

d) $f(t) = \dfrac{t^2(t-2)}{t^2}$; $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = -2$

26 **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva con respecto a ellas:**

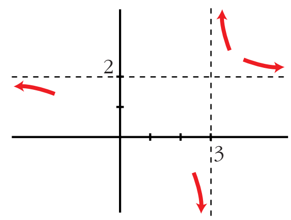
a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$

e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

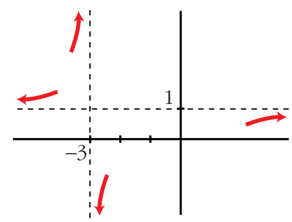
a) Asíntota vertical: $x = 3$

Asíntota horizontal: $y = 2$



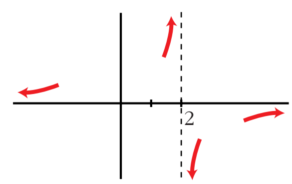
b) Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 1$



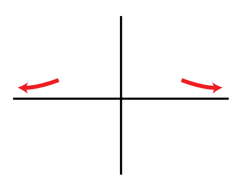
c) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$



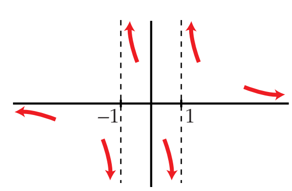
d) Asíntota vertical: $y = 0$

No tiene más asíntotas.



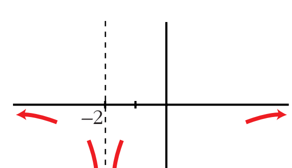
e) Asíntota vertical: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$



f) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$



30 **Prueba que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ solo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.**

☛ ***Al hallar $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ verás que no es ∞.***

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

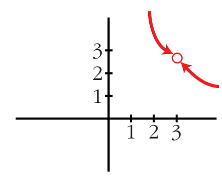
Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 1$

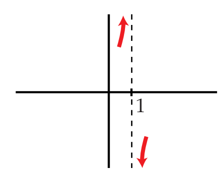
31 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \dfrac{5}{3}$



b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x-1}$



Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-2}{x-1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-2}{x-1} = -\infty$

No existe $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

32 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-2}{x(x+1)}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-2}{x(x+1)} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-2}{x(x+1)} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x+1}$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = 4$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2(x+2)}{x-2}$

Calculamos los límites laterales:

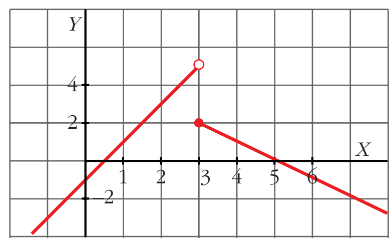
$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2(x+2)}{x-2} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2(x+2)}{x-2} = +\infty$

34 **Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:**

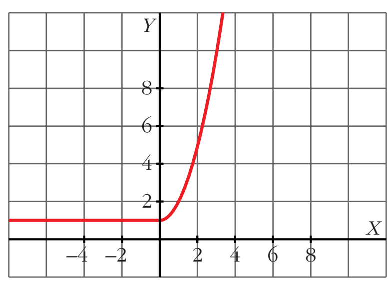
a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

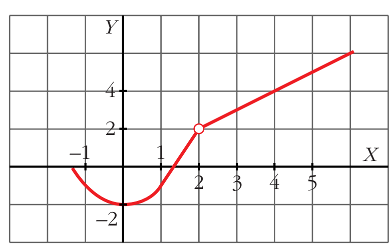
a) Discontinua en $x = 3$.



b) Función continua.



c) Discontinua en $x = 2$.



35 **a) Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior en $x = -3$ y $x = 5$.**

b) Halla, en cada una de ellas, el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -7$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 26$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 7$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

36 **Calcula los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 2^{x-1}$ **b)** $f(x) = 0{,}75^x$

c) $f(x) = 1 + e^x$ **d)** $f(x) = 1/e^x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

38 **Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} 5 = 3 + k \to k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} 5 = 4 + 2k \to k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \to k = 1$

39 **Estudia la continuidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \ge x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \to$ Continua en $x = 1$

$x \ne 1 \to$ Continua Es continua en $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \to$ Continua en $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \to$ Continua en $x = 1$

$x \ne 1$ y $x \ne -1 \to$ Continua Es continua en $\mathbb{R}$.

40 **Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \ne 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - a \end{array}\right\} 2 = 4 - a \;\rightarrow\; a = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array}\right\} a = 2$

CUESTIONES TEÓRICAS

43 **¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto?**

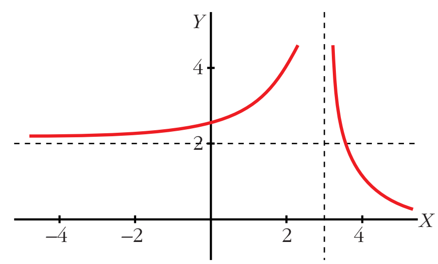
Sí se puede calcular, pero no puede ser continua.

47 **Representa una función que cumpla estas condiciones:**

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

¿Es discontinua en algún punto?

Sí, es discontinua al menos en $x = 3$.



49 **Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$, ¿podemos afirmar que f es continua en $x = 2$?**

No. Para que fuera continua debería ser, además, $f(2) = 5$.

50 **¿Existe algún valor de k para el cual la función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$? Justifica tu respuesta.**

No, puesto que no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

51 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^x+4}}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1} = \sqrt{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{x} = -1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{|x|} = 3$