

Página 215

1. Halla las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos:

a) Mediatriz del segmento de extremos $A(-5, -3)$, $B(7, 1)$. Comprueba que es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

b) Circunferencia de centro $C(-3, 4)$ y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas.

c) Bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

$$r_1: 5x + y + 3 = 0$$

$$r_2: x - 2y + 16 = 0$$

Comprueba que las bisectrices son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2 .

a) Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir $dist(X, A) = dist(X, B)$:

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$10x + 14x + 6y + 2y + 34 - 50 = 0 \rightarrow 24x + 8y - 16 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0 \rightarrow y = -3x + 2$$

- El punto medio de AB es $M(1, -1)$ que, efectivamente, está en la recta (pues verifica la ecuación).
- La pendiente de la recta es $m_r = -3$, y la del segmento es:

$$m_{AB} = \frac{1 - (-3)}{7 - (-5)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Cumplen que $m_r \cdot m_{AB} = (-3) \left(\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow AB \perp r$

b) Los puntos $X(x, y)$ son tales que:

$$\begin{aligned} \text{dist}(X, C) = 5 &\rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = 5 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y + 25 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y = 0 \end{aligned}$$

c) Son los puntos $X(x, y)$:

$$\text{dist}(X, r_1) = \text{dist}(X, r_2) \rightarrow \frac{|5x + y + 3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x - 2y + 16|}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Se dan dos casos: } \sqrt{5}(5x + y + 3) = \sqrt{26}(x - 2y + 16)$$

$$\sqrt{5}(5x + y + 3) = -\sqrt{26}(x - 2y + 16)$$

$$\text{Son dos rectas: } b_1: (5\sqrt{5} - \sqrt{26})x + (\sqrt{5} + 2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$$

$$b_2: (5\sqrt{5} + \sqrt{26})x + (\sqrt{5} - 2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$$

$$\bullet \text{ Sus pendientes son: } \left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{-(5\sqrt{5} - \sqrt{26})}{\sqrt{5} + 2\sqrt{26}} \\ m_2 &= \frac{-(5\sqrt{5} + \sqrt{26})}{\sqrt{5} - 2\sqrt{26}} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{25 \cdot 5 - 26}{5 - 4 \cdot 26} = \frac{99}{-99} = -1 \rightarrow b_1 \perp b_2$$

• Calculamos el punto de corte de las rectas iniciales y comprobamos que está también en ambas bisectrices:

$$\left. \begin{aligned} r_1: 5x + y + 3 = 0 &\rightarrow y = -5x - 3 \\ r_2: x - 2y + 16 = 0 & \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 2(-5x - 3) + 16 = 0 \rightarrow x + 10x + 6 + 16 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$$

$$\text{Luego: } y = -5(-2) - 3 = 7$$

El punto de corte es $(-2, 7)$, que se puede comprobar fácilmente que está en b_1 y b_2 sustituyendo en sus ecuaciones respectivas:

$$\begin{aligned} b_1: (5\sqrt{5} - \sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5} + 2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} &= \\ = -10\sqrt{5} + 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} + 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2: (5\sqrt{5} + \sqrt{26}) \cdot (-2) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{26}) \cdot 7 + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} &= \\ = -10\sqrt{5} - 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} - 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} &= 0 \end{aligned}$$

• Por tanto, b_1 y b_2 son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2 .

1. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(-5, 12)$ y radio 13. Comprueba que pasa por el punto $(0, 0)$.

$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 169 \rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$$

Si sustituimos $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por $(0, 0)$.

4. ¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a $x^2 + y^2 = 9$?

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y el radio es $r = 3$. La distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$ ha de ser igual al radio:

$$\text{dist}(C, s) = \frac{|b|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \rightarrow |b| = 3\sqrt{2} \begin{cases} b = 3\sqrt{2} \\ b = -3\sqrt{2} \end{cases}$$

Luego las rectas $y = x + 3\sqrt{2}$ e $y = x - 3\sqrt{2}$ son tangentes a la circunferencia dada.

5. Halla la posición relativa de la circunferencia $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecto a las rectas: $s_1: x + y = 10$, $s_2: 4x + 3y + 20 = 0$ y $s_3: 3x - 4y = 0$.

El centro de la circunferencia es $O_c(3, -4)$ y su radio es $r = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Hallamos la distancia de O_c a cada una de las rectas:

$$d_1 = \text{dist}(O_c, s_1) = \frac{|3 - 4 - 10|}{\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7,78$$

$$d_2 = \text{dist}(O_c, s_2) = \frac{|12 - 12 + 20|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$d_3 = \text{dist}(O_c, s_3) = \frac{|9 + 16|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5$$

$d_1 > r \rightarrow$ La recta s_1 es exterior a la circunferencia.

$d_2 < r \rightarrow$ La recta s_2 y la circunferencia son secantes.

$d_3 = r \rightarrow$ La recta s_3 es tangente a la circunferencia.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Circunferencia

1 Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x + 10y = -30$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy .

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 1 - 10 = 7 > 0.$$

Es una circunferencia de centro $(4, -1)$ y radio $\sqrt{7}$.

b) Los coeficientes de x^2 e y^2 no son iguales. No es una circunferencia.

c) Hay un término xy . No es una circunferencia.

d) Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y no tiene término en xy . Dividimos entre 2 la igualdad: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0.$$

Es una circunferencia de centro $(4, 0)$ y radio $\sqrt{4} = 2$.

e) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy .

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 9 + 25 - 30 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro $(-3, -5)$ y radio 2.

2 Los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$ son los extremos de un diámetro de una circunferencia C . Halla su ecuación.

El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento AB :

$$P = \text{Centro} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (2, 4)$$

El radio es la distancia del centro a uno de los puntos:

$$r = \text{dist}(P, A) = |\vec{PA}| = |(-1, -2)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

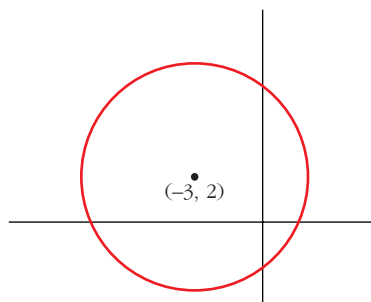
Por tanto, la ecuación es: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$

- 3** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que distan 5 unidades del punto $P(-3, 2)$? Representalo gráficamente y halla su ecuación.

Es una circunferencia de centro $P(-3, 2)$ y radio 5.

Ecuación: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$



- 4** Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C(-2, 1)$ y que pasa por $P(0, -4)$.

El radio de la circunferencia es la distancia de P a C :

$$r = |\overrightarrow{PC}| = |(-2, 5)| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

La ecuación es: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 29$, o bien, $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$

- 5** Estudia la posición de la recta $x + y = 0$ con relación a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$.

El centro de la circunferencia es $C(-3, -1)$ y su radio es $r = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x + y = 0$:

$$d = \text{dist}(C, s) = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2,83 > 2 = r$$

La recta es *exterior* a la circunferencia.

- 6** ¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$?

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y su radio es $r = 1$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$: $d = \text{dist}(C, s) = \frac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = r$, es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

- 8** Halla la longitud de la cuerda común a las circunferencias de ecuaciones: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Hallamos los puntos de corte:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 0 \rightarrow y = 2x \\ x^2 + 4x^2 - 4 = 0 \rightarrow 5x^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{4}{5} \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow y_1 = \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5} \rightarrow y_2 = \frac{-4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Las dos circunferencias se cortan en $P\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ y en $Q\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$.

La longitud de la cuerda común es igual a la distancia entre P y Q :

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, Q) &= |\overrightarrow{PQ}| = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = \\ &= \frac{16}{5} + \frac{64}{5} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

- 9** Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta $r: 2x - y + 3 = 0$. ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?

El centro de la circunferencia es $C(0, 1)$ y su radio es $R = \sqrt{2}$. La distancia de C a r es:

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|-1 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89 < \sqrt{2} \approx 1,41$$

Luego la circunferencia y la recta son secantes.

- 30** Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y s :

$$r: 4x - 3y + 8 = 0 \quad y \quad s: 12x + 5y - 7 = 0$$

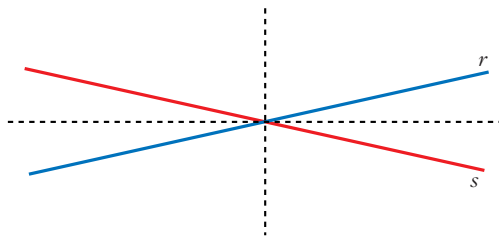
Son todos los puntos $P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s)$:

$$\begin{aligned} \frac{|4x - 3y + 8|}{\sqrt{25}} &= \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{169}} \rightarrow \frac{|4x - 3y + 8|}{5} = \frac{|12x + 5y - 7|}{13} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 13(4x - 3y + 8) = 5(12x + 5y - 7) \rightarrow \\ 13(4x - 3y + 8) = -5(12x + 5y - 7) \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 52x - 39y + 104 = 60x + 25y - 35 \rightarrow \\ 52x - 39y + 104 = -60x - 25y + 35 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8x + 64y - 139 = 0 \\ 112x - 14y + 69 = 0 \end{cases}$$

Luego hay dos soluciones, bisectrices de los ángulos cóncavo y convexo que forman las rectas r y s .

Ambas bisectrices se cortan en el punto de corte de las rectas r y s , y son perpendiculares.



33 Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a) Centro $(3, 5)$ y es tangente a la recta: $4x + 3y - 2 = 0$

b) Pasa por $A(0, 1)$ y $B(-1, 0)$ y su radio es $\sqrt{5}$.

c) Pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$.

d) Tiene su centro en la recta $x - 3y = 0$ y pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(3, 6)$.

a) El radio de la circunferencia es la distancia del centro $C(3, 5)$ a la recta $s: 4x + 3y - 2 = 0$:

$$r = \text{dist}(C, s) = \frac{|12 + 15 - 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5$$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$

b) El centro pertenece a la mediatriz del segmento AB :

— Pendiente de la recta que pasa por A y $B \rightarrow m = \frac{0 - 1}{-1 - 0} = 1$

La mediatriz tiene pendiente $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{1} = -1$.

— El punto medio de AB es $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

— La ecuación de la mediatriz es:

$$y = \frac{1}{2} - 1 \left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} \rightarrow y = -x$$

— Un punto de la mediatriz es de la forma $P(x, -x)$.

Buscamos P tal que $\text{dist}(P, A) = \text{dist}(P, B) = \sqrt{5}$, es decir:

$$\sqrt{x^2 + (-x - 1)^2} = \sqrt{5} \rightarrow x^2 + x^2 + 1 + 2x = 5 \rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = -1 \\ x = -2 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

• Centro $(1, -1) \rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$

• Centro $(-2, 2) \rightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

c) El centro pertenece a la mediatriz del segmento que une $O(0, 0)$ y $A(4, 0)$, es decir, pertenece a la recta $x = 2$.

También pertenece a la mediatriz del segmento que une $O(0, 0)$ y $B(0, 3)$, es decir, pertenece a la recta $y = \frac{3}{2}$.

Por tanto, el centro de la circunferencia es $C\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos:

$$r = \text{dist}(C, O) = |\vec{OC}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

La ecuación es: $(x - 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, o bien, $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$

d) Si el centro está sobre la recta $x - 3y = 0$, es de la forma $C(3y, y)$.

El centro está a igual distancia de $A(-1, 4)$ que de $B(3, 6)$. Además, esta distancia es el radio, r , de la circunferencia:

$$r = \text{dist}(A, C) = \text{dist}(B, C) \rightarrow |\vec{AC}| = |\vec{BC}| \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(3y + 1)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(3y - 3)^2 + (y - 6)^2}$$

$$9y^2 + 1 + 6y + y^2 + 16 - 8y = 9y^2 + 9 - 18y + y^2 + 36 - 12y$$

$$28y = 28 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3y = 3$$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en $C(3, 1)$, y su radio es:

$$r = |\vec{AC}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

40 Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(3, 2)$ y una de cuyas rectas tangentes tiene por ecuación: $4x - 3y - 5 = 0$

Determina si el punto $X(3, 3)$ es interior, es exterior o está en la circunferencia.

- El radio, r , de la circunferencia es igual a la distancia del centro, $C(3, 2)$, a la recta $s: 4x - 3y - 5 = 0$; es decir:

$$r = \text{dist}(C, s) = \frac{|12 - 6 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1}{5}$$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{25}$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 4y - \frac{324}{25} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 25x^2 + 25y^2 - 150x - 100y - 324 = 0$$

- Veamos si $X(3, 3)$ es interior, exterior o está en la circunferencia:

$$\text{dist}(C, X) = |\vec{CX}| = |(0, 1)| = 1 > \text{radio} = \frac{1}{5}$$

Luego el punto es *exterior* a la circunferencia.

Página 236

47 Aplica dos métodos diferentes que permitan decidir si la recta $4x + 3y - 8 = 0$ es exterior, tangente o secante a la circunferencia $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Razona tu respuesta.

■ Primer método:

- Hallamos la distancia del centro de la circunferencia $C(6, 3)$ a la recta dada $s: 4x + 3y - 8 = 0$:

$$d = \text{dist}(C, s) = \frac{|24 + 9 - 8|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5$$

- Como esta distancia es igual al radio de la circunferencia, $d = r = 5$, entonces, *la recta es tangente a la circunferencia.*

■ Segundo método:

- Obtenemos los puntos de intersección de la recta y la circunferencia, resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y - 8 = 0 \\ (x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \frac{8 - 4x}{3} \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 25 \end{array}$$

$$x^2 - 12x + 36 + \left(\frac{8 - 4x}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{8 - 4x}{3}\right) + 9 = 25$$

$$x^2 - 12x + 36 + \frac{64 - 64x + 16x^2}{9} - 16 + 8x + 9 = 25$$

$$9x^2 - 108x + 324 + 64 - 64x + 16x^2 - 144 + 72x + 81 = 225$$

$$25x^2 - 100x + 100 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2 \rightarrow y = \frac{8 - 4x}{3} = 0 \rightarrow \text{Se cortan en } (2, 0).$$

Como solo se cortan en un punto, *la recta es tangente a la circunferencia.*



54 Determina la ecuación de la circunferencia de radio 10 que, en el punto (7, 2), es tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$.

El centro pertenece a la recta perpendicular a la dada que pasa por (7, 2).

— Una recta perpendicular a $3x - 4y - 13 = 0$ es de la forma $4x + 3y + k = 0$. Como (7, 2) pertenece a la recta: $28 + 6 + k = 0 \rightarrow k = -34$. El centro pertenece a la recta:

$$4x + 3y - 34 = 0 \rightarrow y = \frac{-4x + 34}{3}$$

— El centro es $C\left(x, \frac{-4x + 34}{3}\right)$. La distancia de C al punto (7, 2) es igual al radio, que es 10, es decir:

$$\sqrt{(x - 7)^2 + \left(\frac{-4x + 34}{3} - 2\right)^2} = 10$$

$$(x - 7)^2 + \left(\frac{-4x + 34}{3}\right)^2 = 100$$

$$x^2 - 14x + 49 + \frac{16x^2 - 224x + 784}{9} = 100$$

$$9x^2 - 126x + 441 + 16x^2 - 224x + 784 = 900$$

$$25x^2 - 350x + 325 = 0 \rightarrow x^2 - 14x + 13 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2} \begin{cases} x = 13 \rightarrow y = -6 \\ x = 1 \rightarrow y = 10 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1ª) Centro (13, -6) y radio 10:

$$(x - 13)^2 + (y + 6)^2 = 100 \rightarrow x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$$

2ª) Centro (1, 10) y radio 10:

$$(x - 1)^2 + (y - 10)^2 = 100 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 20y + 1 = 0$$