

# GEOMETRÍA ANALÍTICA.

## PROBLEMAS AFINES Y MÉTRICOS

### Página 191

1. Halla las coordenadas de  $\vec{MN}$  y  $\vec{NM}$ , siendo  $M(7, -5)$  y  $N(-2, -11)$ .

$$\vec{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$$

$$\vec{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$$

2. Averigua si están alineados los puntos  $P(7, 11)$ ,  $Q(4, -3)$  y  $R(10, 25)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{PQ} = (-3, -14) \\ \vec{QR} = (6, 28) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \rightarrow A, B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

3. Calcula el valor de  $k$  para que los puntos de coordenadas  $A(1, 7)$ ,  $B(-3, 4)$ ,  $C(k, 5)$  estén alineados.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (-4, -3) \\ \vec{BC} = (k+3, 1) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-4}{k+3} = \frac{-3}{1} \rightarrow -4 = -3k - 9 \rightarrow 3k = -5 \rightarrow k = \frac{-5}{3}$$

4. Dados los puntos  $P(3, 9)$  y  $Q(8, -1)$ :

a) Halla el punto medio de  $PQ$ .

b) Halla el simétrico de  $P$  respecto de  $Q$ .

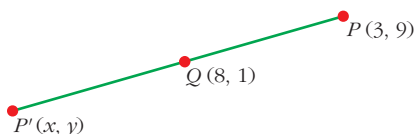
c) Halla el simétrico de  $Q$  respecto de  $P$ .

d) Obtén un punto  $A$  de  $PQ$  tal que  $\overline{PA}/\overline{AQ} = 2/3$ .

e) Obtén un punto  $B$  de  $PQ$  tal que  $\overline{PB}/\overline{PQ} = 1/5$ .

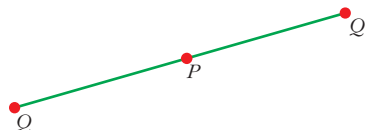
$$a) M\left(\frac{3+8}{2}, \frac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \frac{3+x}{2} = 8 \rightarrow x = 13 \\ \frac{9+y}{2} = -1 \rightarrow y = -11 \end{array} \right\} \rightarrow P'(13, -11)$$



c) Llamamos  $Q'(x', y')$  al simétrico de  $Q$  respecto de  $P$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Así: } \frac{x'+8}{2} = 3 \rightarrow x' = -2 \\ \frac{y'+(-1)}{2} = 9 \rightarrow y' = 19 \end{array} \right\} Q'(-2, 19)$$



d) Llamamos  $A(x, y)$  al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$$\vec{PA} = \frac{2}{3} \vec{AQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{2}{3}(8-x, -1-y)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-3 = \frac{2}{3}(8-x) \rightarrow x=5 \\ y-9 = \frac{2}{3}(-1-y) \rightarrow y=5 \end{array} \right\} A(5, 5)$$

e) Llamamos  $B(x, y)$  al punto que buscamos.

$$\vec{PB} = \frac{1}{5} \vec{PQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-3 = 1 \rightarrow x=4 \\ y-9 = -2 \rightarrow y=7 \end{array} \right\} B(4, 7)$$

### 1. Escribe las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) Que pasa por  $A(-3, 7)$  y tiene una dirección paralela al vector  $\vec{d}(4, -7)$ .

b) Que pasa por  $M(5, 2)$  y es paralela a  $\vec{d}'(2, 2)$ .

En ambos casos, dando valores al parámetro, obtén otros cinco puntos de la recta.

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{OX} &= \vec{OA} + t\vec{d} \rightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + t(d_1, d_2) \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 7t \end{cases} \end{aligned}$$

$t$	-2	-1	0	1	2	3
$(x, y)$	(-11, 21)	(-7, 14)	(-3, 7)	(1, 0)	(5, -7)	(9, -14)

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{OX} &= \vec{OM} + t\vec{d}' \rightarrow (x, y) = (m_1, m_2) + t(d'_1, d'_2) \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x = m_1 + td'_1 \\ y = m_2 + td'_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \end{aligned}$$

$t$	-2	-1	0	1	2	3
$(x, y)$	(1, -2)	(3, 0)	(5, 2)	(7, 4)	(9, 6)	(11, 8)

### 2. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por:

a)  $P(5, -2)$  y  $Q(0, 4)$

b)  $M(3, 7)$  y  $N(3, 0)$

c)  $A(0, 0)$  y  $B(7, 0)$

d)  $R(1, 1)$  y  $S(3, 3)$

$$\text{a) El vector dirección es: } \vec{PQ} = (-5, 6) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 5t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$$

$$b) \vec{d} = \vec{MN} = (0, -7) \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 - 7t \end{cases}$$

$$c) \vec{d} = \vec{AB} = (7, 0) \rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = 0 \end{cases}$$

$$d) \vec{d} = \vec{RS} = (2, 2) \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

**3. Halla  $k$  para que  $S(-5, k)$  pertenezca a  $r$ :**  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

$$\begin{cases} -5 = 1 + 3t \rightarrow t = -6/3 = -2 \\ k = 2 - 4t \end{cases} \rightarrow k = 2 - 4(-2) = 10$$

**1. Halla el ángulo que forman las siguientes rectas:**

$$r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$$

Los vectores directores de  $r_1$  y  $r_2$  son, respectivamente,  $\vec{d}_1(-2, 1)$  y  $\vec{d}_2(-4, 3)$ .

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1| |\vec{d}_2|} = \frac{8 + 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{25} \approx 0,984 \rightarrow \alpha = 10^\circ 18' 17,4''$$

**2. Obtén para las rectas del ejercicio anterior:**

**a) La paralela a  $r_1$  que pase por el punto  $(5, 7)$ .**

**b) Una perpendicular a  $r_2$  que pase por  $(0, 0)$ .**

$$a) \left. \begin{array}{l} r \parallel r_1 \\ P(5, 7) \in r \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{d} = \vec{d}_1 \\ P \in r \end{array} \right\} \rightarrow r: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} r' \perp r_2 \\ P(0, 0) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{d}' \perp \vec{d}_2 \\ \vec{d}' = (3, 4) \end{array} \right\} \rightarrow r': \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases}$$

**1. Considera las siguientes rectas:**

$$r_1: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad r_3: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -5 - 6t \end{cases} \quad r_4: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -12 + 4t \end{cases}$$

**Halla la posición relativa de  $r_1$  y  $r_2$ ,  $r_2$  y  $r_3$ ,  $r_3$  y  $r_4$ .**

• Posición relativa de  $r_1$  y  $r_2$

$$\begin{cases} 7 + 5t = 2 + s \\ -2 - 3t = 1 - 2s \end{cases} \quad \begin{cases} 5t - s = -5 \\ -3t + 2s = 3 \end{cases} \quad \text{Por 2 la 1ª ecuación y se suman:}$$

$$10t - 2s = -10$$

$$\underline{-3t + 2s = 3}$$

$$7t = -7 \rightarrow t = -1 \rightarrow \text{de la 1ª ecuación: } s = 5 + 5(-1) = 0$$

Como tiene solución única, entonces  $r_1$  y  $r_2$  se cortan en el punto  $P(2, 1)$  (que se obtiene sustituyendo  $t = -1$  en  $r_1$  o  $s = 0$  en  $r_2$ ).

- Posición relativa de  $r_2$  y  $r_3$

$$\left. \begin{array}{l} 2 + s = 5 + 3t \\ 1 - 2s = -5 - 6t \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} s - 3t = 3 \\ -2s + 6t = -6 \end{array} \right\} \text{Las dos ecuaciones son equivalentes.}$$

Luego el sistema tiene infinitas soluciones. Por tanto,  $r_2 = r_3$  (son la misma recta).

- Posición relativa de  $r_3$  y  $r_4$

$$\left. \begin{array}{l} 5 + 3t = 5 - 2s \\ -5 - 6t = -12 + 4s \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3t + 2s = 0 \\ -6t - 4s = -7 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No tienen solución.}$$

Luego no tienen ningún punto en común. Por tanto, son paralelas.

Es decir,  $r_3 \parallel r_4$ .

### 1. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene por ecuación:

$$5x - 3y + 8 = 0$$

$$\text{Sea } x = t \rightarrow 5t - 3y + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 8/3 + (5/3)t \end{cases}$$

NOTA - 2º MÉTODO

El vector  $(5, -3)$  es perpendicular a  $r$ . Por tanto, el vector  $(3, 5)$  es paralelo a  $r$ . Podemos tomarlo como vector dirección:

$$\vec{d} = (3, 5)$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y = \frac{8}{3}. \text{ Luego } \left(0, \frac{8}{3}\right) \in r$$

Así, las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 8/3 + 5t \end{cases}$$

(equivalente a la obtenida por el otro método).

### 2. Halla la ecuación implícita de la recta: $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, y las sumamos:

$$2x = 10 - 6t$$

$$3y = -3 + 6t$$

$$2x + 3y = 7 \rightarrow r: 2x + 3y - 7 = 0$$

$$\text{NOTA - 2º MÉTODO: } \left. \begin{array}{l} x = 5 - 3t \rightarrow t = \frac{x-5}{-3} \\ y = -1 + 2t \rightarrow t = \frac{y+1}{2} \end{array} \right\} \begin{cases} \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} \\ 2x - 10 = -3y - 3 \\ r: 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

## Página 199

1. Escribe la ecuación de la recta de pendiente 3 y cuya ordenada en el origen es -5.

$$\left. \begin{array}{l} m = 3 \\ P(0, -5) \in r \end{array} \right\} \rightarrow r: y = -5 + 3(x - 0) \rightarrow$$

$$\rightarrow r: y = 3x - 5 \rightarrow \text{ECUACIÓN EXPLÍCITA}$$

$$\rightarrow r: 3x - y - 5 = 0 \rightarrow \text{ECUACIÓN IMPLÍCITA}$$

2. Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:

a) (-7, 11), (1, 7)

b) (3, -2), (1, 4)

c) (6, 1), (11, 1)

d) (-2, 5), (-2, 8)

$$a) m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{7 - 11}{1 - (-7)} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2} \left\{ \begin{array}{l} y - 7 = \frac{-1}{2}(x - 1) \\ x + 2y - 15 = 0 \end{array} \right.$$

Tomando el punto (1, 7)

$$b) m = \frac{4 - (-2)}{1 - 3} = \frac{6}{-2} = -3 \left\{ \begin{array}{l} y - 4 = -3(x - 1) \\ 3x + y - 7 = 0 \end{array} \right.$$

Tomando el punto (1, 4)

$$c) m = \frac{1 - 1}{11 - 6} = 0 \left\{ \begin{array}{l} y - 1 = 0 \rightarrow y = 1 \end{array} \right.$$

Tomando el punto (6, 1)

d)  $m = \frac{8 - 5}{-2 - 2}$  ¡Imposible! Entonces, no tiene pendiente.

No se puede poner de forma explícita. Es la recta  $x = -2$ , paralela al eje  $Y$ .

3. Halla dos puntos de la recta  $y = -3x + 4$ . Calcula a partir de ellos su pendiente, y comprueba que es la que corresponde a esa ecuación.

Si  $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow A(0, 4) \in r$

Si  $x = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow B(1, 1) \in r$

$$m = \frac{1 - 4}{1 - 0} = \frac{-3}{1} = -3$$

Efectivamente, es la de la recta  $y = -3x + 4$ .

4.  Escribe las ecuaciones de las rectas representadas.

$$s: \left\{ \begin{array}{l} m_s = -1/2 \\ P_s(0, 3) \end{array} \right. \rightarrow \text{Como } s: y = mx + n \rightarrow s: y = \frac{-1}{2}x + 3$$

$$r: \begin{cases} m_s = 2/3 \\ P_r(0, 2) \end{cases} \rightarrow r: y = \frac{2}{3}x + 2; \quad t: \begin{cases} m_t = 0 \\ P_t(0, 1) \end{cases} \rightarrow t: y = 1$$

## Página 201

### 1. Averigua la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 3y + 4 = 0 \\ 3x - 9y - 12 = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 5x + y + 3 = 0 \\ x - 2y + 16 = 0 \end{cases}$$

Se puede resolver el sistema o bien observar los coeficientes y el término independiente de ambas ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{A}{A'} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{-9} = \frac{B}{B'} = \frac{4}{-12} = \frac{C}{C'}$$

Es decir:  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \rightarrow$  Son la misma recta.

$$\text{b) } \frac{5}{1} \neq \frac{1}{-2} \rightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \rightarrow \text{Las rectas se cortan en un punto.}$$

Para calcular el punto de corte, bastará con resolver el sistema.

Despejando en la primera ecuación:  $y = -3 - 5x$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x - 2(-3 - 5x) + 16 = 0 \rightarrow x + 6 + 10x + 16 = 0 \rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$$

Con lo que:

$$y = -3 - 5(-2) = 7 \rightarrow (x, y) = (-2, 7) \rightarrow \text{Punto de corte}$$

### 2. ¿Cuál es la posición relativa de estos dos pares de rectas?

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ 6x + 10y + 4 = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \rightarrow \text{Son paralelas.}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x + x - 4 = 0 \\ x = y \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x = 4 \rightarrow x = 4/3 \\ y = 4/3 \end{array} \right.$$

Son dos rectas que se cortan en el punto  $(4/3, 4/3)$

## Página 202

### 1. Obtén la distancia entre los siguientes pares de puntos:

$$\text{a) } (3, -5), (1, 4) \quad \text{b) } (0, 7), (-5, 7) \quad \text{c) } (-2, 5), (-3, -7) \quad \text{d) } (8, 14), (3, 2)$$

$$\text{a) } \text{dist}(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(1-3)^2 + (4+5)^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$$

$$b) \text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(-5-0)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{25+0} = 5$$

$$c) \text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(-3+2)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{145}$$

$$d) \text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(3-8)^2 + (2-14)^2} = \sqrt{169} = 13$$

**2. Halla la distancia de  $Q(-3, 4)$  a las siguientes rectas:**

$$a) 2x + 3y = 4 \quad b) \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} \quad c) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases} \quad d) \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$a) 2x + 3y - 4 = 0$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|-6 + 12 - 4|}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \approx 0,55$$

$$b) \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} \rightarrow 5x-5 = 2y-8 \rightarrow 5x-2y+3 = 0$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|5 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|-15 - 8 + 3|}{\sqrt{29}} = \frac{20\sqrt{29}}{29} \approx 3,71$$

$$c) \begin{cases} t = \frac{x-1}{-2} \\ t = \frac{y-3}{-6} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-6} \rightarrow -6x+6 = -2y+6 \rightarrow 6x-2y=0 \rightarrow 3x-y=0 \end{array} \right.$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|3 \cdot (-3) - 4|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-9-4|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10} \approx 4,11$$

$$d) 3x + 2y = 6 \rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

$$\text{dist}(Q, r) = \frac{|3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|-9 + 8 - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13} \approx 1,94$$

## Página 207

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

#### PARA PRACTICAR

#### Ecuaciones de la recta

**1** Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por  $A(-3, 7)$  y tiene una dirección paralela al vector  $\vec{d}(4, -1)$ . Dando valores al parámetro, obtén otros cinco puntos de la recta.

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - t \end{cases}$$

$t$	-2	-1	1	2	3
$(x, y)$	(-11, 9)	(-7, 8)	(1, 6)	(5, 5)	(9, 4)

**2 Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por:**

- a)  $P(6, -2)$  y  $Q(0, 5)$       b)  $M(3, 2)$  y  $N(3, 6)$       c)  $A(0, 0)$  y  $Q(8, 0)$

**Halla, en todos los casos, la ecuación implícita.**

$$\text{a) } \vec{PQ} = (-6, 7) \rightarrow r: \begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases} \equiv r: \begin{cases} x = -6t \\ y = 5 + 7t \end{cases} \rightarrow$$

(Usando el punto  $P$ )                      (Usando  $Q$ )

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow t = \frac{x}{-6} \\ t = \frac{y-5}{7} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{x}{-6} = \frac{y-5}{7}$$

$$\rightarrow 7x = -6y + 30 \rightarrow r: 7x + 6y - 30 = 0$$

$$\text{b) } \vec{MN} = (0, 4) \rightarrow r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases} \quad \text{--- } x = 3 \rightarrow \text{recta paralela al eje } Y$$

$$\text{c) } \vec{AQ} = (8, 0) \rightarrow r: \begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow r: y = 0 \rightarrow \text{eje } X$$

**3 Halla las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas:**

- a)  $2x - y = 0$       b)  $x - 7 = 0$       c)  $3y - 6 = 0$       d)  $x + 3y = 0$

$$\text{a) Si } x = t \rightarrow 2t - y = 0 \rightarrow y = 2t \rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 7 \\ y = t \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x = t \\ y = 6/3 = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}$$

**4 Escribe las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.**

• *Ambos ejes pasan por el origen de coordenadas y sus vectores directores son los vectores de la base.*

$$\text{Eje } X: \begin{cases} O(0, 0) \in \text{eje } X \\ \vec{d}_X = (1, 0) \end{cases} \rightarrow \text{Eje } X: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$$

$$\text{Eje } Y: \begin{cases} O(0, 0) \in \text{eje } Y \\ \vec{d}_Y = (0, 1) \end{cases} \rightarrow \text{Eje } Y: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \rightarrow x = 0$$

**5 Halla la ecuación de la paralela a  $2x - 3y = 0$  cuya ordenada en el origen es  $-2$ .**

• *La recta pasa por el punto  $(0, -2)$ .*

$$r: 2x - 3y = 0$$

$$s \parallel r \rightarrow \text{pendiente de } s \text{ ha de ser igual a la de } r \left\{ \begin{aligned} P(0, -2) \in s \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} m_s = m_r = 2/3 \\ P(0, -2) \in s \end{aligned} \right. \rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2 \rightarrow 2x - 3y - 6 = 0$$

ECUACIÓN EXPLÍCITA

ECUACIÓN IMPLÍCITA

- 6** Dada la recta  $4x + 3y - 6 = 0$ , escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.

• El eje de ordenadas es el vertical:  $x = 0$ .

- Veamos primero cuál es el punto de corte,  $P(x, y)$ , de la recta con el eje de ordenadas.

$$r: \begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ \text{Eje } Y: x = 0 \end{cases} \rightarrow 4 - 0 + 3y - 6 = 0 \rightarrow 3y = 6 \rightarrow y = 2$$

Luego  $P(0, 2) \in r$  y también debe ser  $P(0, 2) \in s$ , donde  $s \perp r$ .

- Como  $s \perp r \rightarrow$  sus pendientes deben cumplir:

$$m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-4/3} = \frac{3}{4}$$

- Como  $P(0, 2) \in s$  y  $m_s = \frac{3}{4} \rightarrow y = \frac{3}{4}x + 2 \rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

**7** Escribe las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:

a) Su vector de posición es  $\vec{a}(-3, 1)$  y su vector de dirección  $\vec{v}(2, 0)$ .

b) Pasa por  $A(5, -2)$  y es paralela a:  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$

c) Pasa por  $A(1, 3)$  y es perpendicular a la recta de ecuación  $2x - 3y + 6 = 0$ .

d) Es perpendicular al segmento  $PQ$  en su punto medio, siendo  $P(0, 4)$  y  $Q(-6, 0)$ , en su punto medio.

a) La ecuación vectorial será:

$$\vec{OX} = \vec{a} + t\vec{v} \rightarrow (x, y) = (-3, 1) + t(2, 0) \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$$

b) El vector dirección de la recta buscada debe ser el mismo (o proporcional) al de

la recta  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$  (pues debe ser paralela a ella).

Luego:  $\vec{d}(-1, 2)$

Como debe pasar por  $A(5, -2) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

c) La pendiente de la recta  $r: 2x - 3y + 6 = 0$  es:

$$m_r = \frac{2}{3} \rightarrow m_s = \frac{-3}{2} \text{ (pues } m_r \cdot m_s = -1 \text{ por ser } r \perp s)$$

Un vector director puede ser  $\vec{s} = (2, -3)$ .

Además,  $A(1, 3) \in s$ .

Por tanto,  $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

d) El punto medio de  $PQ$  es  $m\left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$

$$\vec{PQ} = (-6, -4)$$

→  $\begin{cases} m(-3, 2) \in s \\ \vec{d}(4, -6) \text{ es un vector director de } s, \text{ pues } \vec{d} \perp \vec{PQ} \end{cases}$

Luego,  $s: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$

## Coordenadas de puntos

**8** El punto  $P(5, -2)$  es el punto medio del segmento  $AB$ , y conocemos  $A(2, 3)$ . Halla  $B$ .

• Si  $B = (x, y)$ ,  $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2)$

Si  $B = (x, y)$   
Como  $P$  es punto medio de  $AB$  } →  $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2)$  →

→  $\begin{cases} x+2 = 10 \rightarrow x = 8 \\ y+3 = -4 \rightarrow y = -7 \end{cases}$  →  $B = (8, -7)$

**9** Halla el punto simétrico de  $P(1, -2)$  respecto del punto  $H(3, 0)$ .

•  $H$  es el punto medio entre  $P$  y su simétrico.

Si  $P'(x, y)$  es simétrico de  $P(1, -2)$  respecto de  $H(3, 0)$  →

→  $H$  es el punto medio de  $PP'$  →

→  $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-2}{2}\right) = (3, 0)$  →  $\begin{cases} x+1 = 6 \rightarrow x = 5 \\ y-2 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases}$  →  $P'(5, 2)$

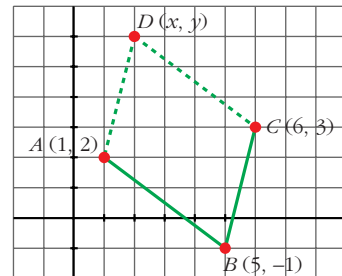
**10** Halla las coordenadas del vértice  $D$  del paralelogramo  $ABCD$ , sabiendo que  $A(1, 2)$ ,  $B(5, -1)$  y  $C(6, 3)$ .

Sea  $D(x, y)$ .

Debe cumplirse:  $\vec{AB} = \vec{DC}$

$(5 - 1, -1 - 2) = (6 - x, 3 - y)$  →

→  $\begin{cases} 4 = 6 - x \rightarrow x = 2 \\ -3 = 3 - y \rightarrow y = 6 \end{cases}$  →  $D(2, 6)$



- 12** Determina  $k$  para que los puntos  $A(-3, 5)$ ,  $B(2, 1)$  y  $C(6, k)$  estén alineados.

Debe ocurrir que  $\vec{AB}$  y  $\vec{BC}$  sean proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (5, -4) \\ \vec{BC} = (4, k-1) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \rightarrow 5k-5 = -16 \rightarrow k = \frac{-11}{5}$$

## Distancias

- 13** Halla la distancia del punto  $P(2, -3)$  a las siguientes rectas:

a)  $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$       b)  $y = \frac{9}{4}$       c)  $2x + 5 = 0$

a) Veamos primero la ecuación implícita de la recta:

$$\begin{cases} t = x/2 \\ t = -y \end{cases} \rightarrow \frac{x}{2} = -y \rightarrow x + 2y = 0$$

Entonces:

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|1 \cdot 2 + 2(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

b)  $y = \frac{9}{4} \rightarrow y - \frac{9}{4} = 0$

Por tanto:

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|1(-3) - 9/4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|-3 - 9/4|}{\sqrt{1}} = \frac{21}{4}$$

c)  $\text{dist}(P, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 0}} = \frac{9}{2}$

- 14** Calcula la distancia del origen de coordenadas a las siguientes rectas:

a)  $3x - 4y + 12 = 0$

b)  $2y - 9 = 0$

c)  $x = 3$

d)  $3x - 2y = 0$

a)  $\text{dist}(0, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{12}{5}$

$$b) \text{dist}(0, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{9}{2}$$

$$c) \text{dist}(0, r) = \frac{|0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$d) \text{dist}(0, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{13}} = 0$$

(es decir, la recta  $3x - 2y = 0$  pasa por el origen).

**15 Halla la longitud del segmento que determina la recta  $x - 2y + 5 = 0$  al cortar a los ejes de coordenadas.**

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

$$\bullet \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow -2y + 5 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2} \rightarrow \\ \rightarrow A\left(0, \frac{5}{2}\right) \text{ es el punto de corte con el eje } Y$$

$$\bullet \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow \\ \rightarrow B(-5, 0) \text{ es el punto de corte con el eje } X$$

$$\bullet \text{ Luego } \overline{AB} = \text{dist}(A, B) = \sqrt{(5 - 0)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2} = \\ = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2} \sqrt{5}$$

**16 Halla la distancia entre las rectas  $r: x - 2y + 8 = 0$  y  $r': -2x + 4y - 7 = 0$ .**

• Comprueba que son paralelas; toma un punto cualquiera de  $r$  y halla su distancia a  $r'$ :

Sus pendientes son  $m_r = \frac{1}{2} = m_{r'} \rightarrow$  Son paralelas.

Entonces, la distancia entre  $r$  y  $r'$  será:

$$\text{dist}(P, r') \text{ donde } P \in r$$

Sea  $x = 0$ .

$$\text{Sustituyendo en } r \rightarrow y = \frac{-8}{-2} = 4 \rightarrow P(0, 4) \in r$$

Así:

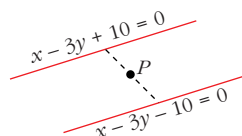
$$\text{dist}(r, r') = \text{dist}(P, r') = \frac{|-2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{|16 - 7|}{\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$$

- 17** Determina  $c$  para que la distancia de la recta  $x - 3y + c = 0$  al punto  $(6, 2)$  sea de  $\sqrt{10}$  unidades. (Hay dos soluciones).

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Hay dos soluciones: 
$$\begin{cases} \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \rightarrow c_1 = 10 \\ \frac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \rightarrow c_2 = -10 \end{cases}$$

Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas:



- 18** Calcula el valor de  $a$  para que la distancia del punto  $P(1, 2)$  a la recta  $ax + 2y - 2 = 0$  sea igual a  $\sqrt{2}$ .

$$\text{dist}(P, r) = \sqrt{2} \rightarrow \frac{|a \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \rightarrow a + 2 = \sqrt{2(a^2 + 4)} \\ \frac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = -\sqrt{2} \rightarrow a + 2 = -\sqrt{2(a^2 + 4)} \end{cases}$$

Al elevar al cuadrado obtenemos la misma ecuación en ambos casos.

$$\rightarrow (a + 2)^2 = 2(a^2 + 4) \rightarrow a^2 + 4a + 4 = 2a^2 + 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

## Página 208

### Ángulos

- 19** Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a)  $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 3x - 5y + 7 = 0 \\ 10x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$        $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$       d)  $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y + 3 = 0 \end{cases}$

a)  $r: y = 2x + 5$        $s: y = -3x + 1$  }  $\rightarrow$  sus pendientes son:  $\begin{cases} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{cases}$

$$\text{tg } \alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right| = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \equiv \widehat{r_1 r_2} = \widehat{\vec{v}, \vec{w}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = \frac{|30 - 30|}{|\vec{v}| |\vec{w}|} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

c) Los vectores directores de esas rectas son:

$$\vec{d}_1 = (-1, 2) \quad \text{y} \quad \vec{d}_2 = (-3, 1)$$

Entonces:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1| |\vec{d}_2|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$d) \left. \begin{array}{l} \vec{a}_1 = (2, -1) \perp r_1 \\ \vec{a}_2 = (0, 2) \perp r_2 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \equiv \widehat{r_1 r_2} = \widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|} = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} =$$

$$\approx 0,4472 \rightarrow \alpha = 63^\circ 26' 5,82''$$

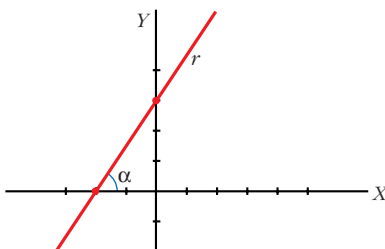
## 20 ¿Qué ángulo forma la recta $3x - 2y + 6 = 0$ con el eje de abscisas?

*No es necesario que apliques ninguna fórmula. Sabes que la pendiente de  $r$  es la tangente del ángulo que forma  $r$  con el eje de abscisas. Halla el ángulo con la pendiente de  $r$ .*

La pendiente de  $r$  es  $m_r = \frac{3}{2}$ .

La pendiente de  $r$  es, además,  $\operatorname{tg} \alpha$ :

$$m_r = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \alpha = 56^\circ 18' 35,8''$$



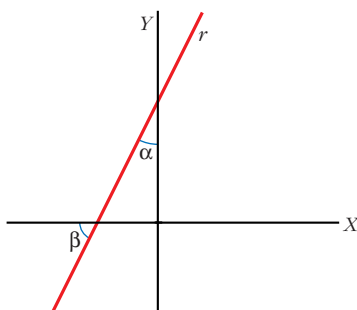
**21** ¿Qué ángulo forma la recta  $2x - y + 5 = 0$  con el eje de ordenadas?

• El ángulo pedido es el complementario del ángulo que la recta forma con el eje de abscisas.

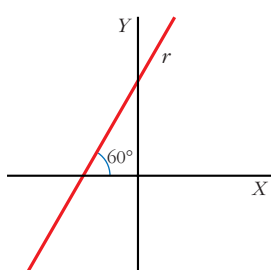
El ángulo pedido,  $\alpha$ , es complementario de  $\beta \rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Por otro lado,  $\operatorname{tg} \beta = m_r = 2$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26^\circ 33' 54,2''$$



**22** Calcula  $n$  de modo que la recta  $3x + ny - 2 = 0$  forme un ángulo de  $60^\circ$  con el OX.



$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \\ m_r = -\frac{3}{n} \end{array} \right\} \text{ Como } \operatorname{tg} 60^\circ = m_r, \text{ se tiene que:}$$

$$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \rightarrow n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

### PARA RESOLVER

**23** Calcula  $m$  y  $n$  en las rectas de ecuaciones:

$$r: mx - 2y + 5 = 0 \quad s: nx + 6y - 8 = 0$$

sabiendo que son perpendiculares y que  $r$  pasa por el punto  $P(1, 4)$ .

• Las coordenadas de  $P$  deben verificar la ecuación de  $r$ . Así calculas  $m$ . Expresa la perpendicularidad con vectores o con pendientes y halla  $n$ .

•  $P(1, 4) \in r \rightarrow m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \rightarrow m = 3$

$$\left. \begin{array}{l} (m, -2) \perp r \\ (n, 6) \perp s \\ \text{Como deben ser } r \perp s \end{array} \right\} \rightarrow (m, -2) \perp (n, 6) \rightarrow$$

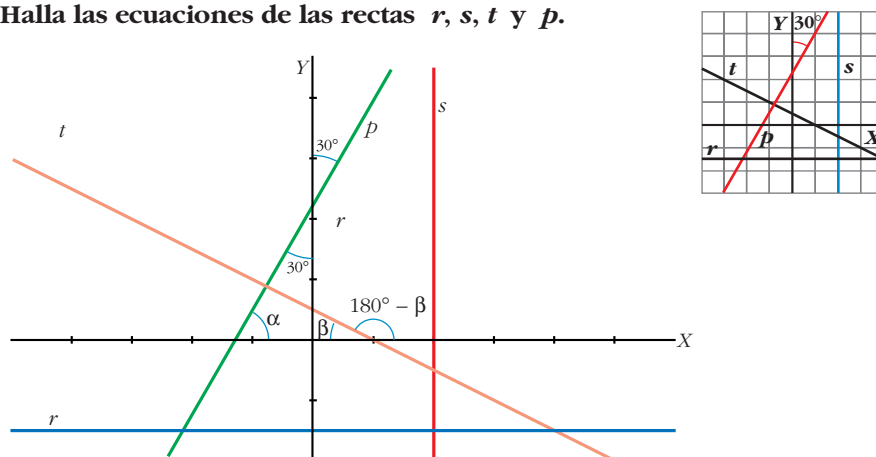
$$\rightarrow (m, -2) \cdot (n, 6) = 0 \rightarrow m \cdot n + (-2) \cdot 6 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3n - 12 = 0 \rightarrow n = 4$$

NOTA: Usando las pendientes  $m_r = \frac{m}{2}$  y  $m_s = \frac{-n}{6}$ , para que  $r \perp s$  debe ser  $m_r \cdot m_s = -1$ , es decir:

$$\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{-n}{6}\right) = -1 \rightarrow -mn = -12 \rightarrow -3n = -12 \rightarrow n = 4$$

**24 Halla las ecuaciones de las rectas  $r$ ,  $s$ ,  $t$  y  $p$ .**



- $p$ : Pasa por los puntos  $(-3, -3)$  y  $(1, 4)$ .

Así, su pendiente es:

$$m = \frac{4 - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{7}{4}$$

Por tanto:

$$p: y = 1 + \frac{7}{4}(x - 4) \rightarrow 7x - 4y + 9 = 0$$

- $r$ : Su pendiente es 0 y pasa por el punto  $(0, \frac{-3}{2})$ .

Por tanto:

$$r: y = -\frac{3}{2}$$

- $s$ : Su vector director es  $(0, 1)$  y pasa por  $(2, 0)$ .

Por tanto:

$$s: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$$

- $t$ : Pasa por los puntos  $(1, 0)$  y  $(-3, 2)$ .

Así, su pendiente es:

$$m = \frac{2 - 0}{-3 - 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$t: y = -\frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow x + 2y - 1 = 0$$

**25** Dada la recta  $r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + kt \end{cases}$  halla  $k$  de modo que  $r$  sea paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

- La bisectriz del segundo cuadrante es  $x = -y \rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$  (en paramétricas).  
Su vector director es  $\vec{d} = (-1, 1)$ .

- El vector director de  $r$  es  $\vec{r} = (3, k)$ .

- Como queremos que  $r \parallel$  bisectriz del segundo cuadrante, entonces sus vectores directores deben ser proporcionales:

$$\frac{-1}{3} = \frac{1}{k} \rightarrow k = -3$$

**26** En el triángulo de vértices  $A(-2, 3)$ ,  $B(5, 1)$ ,  $C(3, -4)$ , halla las ecuaciones de:

a) La altura que parte de  $B$ .

b) La mediana que parte de  $B$ .

c) La mediatriz del lado  $CA$ .

a) La altura que parte de  $B$ ,  $h_B$ , es una recta perpendicular a  $AC$  que pasa por el punto  $B$ :

$$\left. \begin{array}{l} h_B \perp AC (5, -7) \rightarrow \text{el vector director de } h_B \text{ es } \vec{h}_B (7, 5) \\ B(5, 1) \in h_B \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow h_B: \begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-5}{7} \\ t = \frac{y-1}{5} \end{cases} \rightarrow \frac{x-5}{7} = \frac{y-1}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow h_B: 5x - 7y - 18 = 0$$

b)  $m_B$  (mediana que parte de  $B$ ) pasa por  $B$  y por el punto medio,  $m$ , de  $AC$ :

$$\left. \begin{array}{l} m \left( \frac{-2+3}{2}, \frac{3-4}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \in m_B \\ B(5, 1) \in m_B \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{m}_B \left( 5 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \right) = \left( \frac{9}{2}, \frac{3}{2} \right) \text{ es vector director de } m_B.$$

Luego:

$$m_B: \begin{cases} x = 5 + \frac{9}{2}t \\ y = 1 + \frac{3}{2}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 10 + 9t \\ t = \frac{2y-2}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = \frac{2x-10}{9} \\ t = \frac{2y-2}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{2x-10}{9} = \frac{2y-2}{3} \rightarrow m_B: 6x - 18y - 12 = 0$$

c) La mediatriz de  $CA$ ,  $z$ , es perpendicular a  $CA$  por el punto medio del lado,  $m'$ . Así:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{CA} = (-5, 7) \perp z \rightarrow \text{vector director de } z: \vec{z}(7, 5) \\ m' \left( \frac{3-2}{2}, \frac{-4+3}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \in z \end{array} \right\} \rightarrow$$

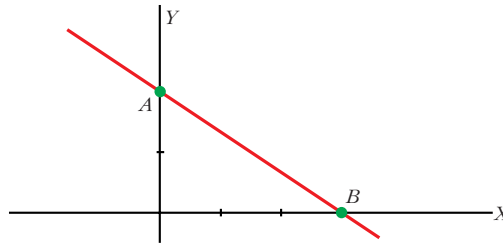
$$\rightarrow z: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 7t \\ y = -\frac{1}{2} + 5t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{2x-1}{14} \\ t = \frac{2y+1}{10} \end{cases} \rightarrow \frac{2x-1}{14} = \frac{2y+1}{10} \rightarrow$$

$$\rightarrow z: 20x - 28y - 24 = 0 \rightarrow z: 5x - 7y - 6 = 0$$

**27** La recta  $2x + 3y - 6 = 0$  determina, al cortar a los ejes de coordenadas, un segmento  $AB$ .

Halla la ecuación de la mediatriz de  $AB$ .

• Después de hallar los puntos  $A$  y  $B$ , halla la pendiente de la mediatriz, inversa y opuesta a la de  $AB$ . Con el punto medio y la pendiente, puedes escribir la ecuación.



$$\bullet A = r \cap \text{eje } Y: \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 3y - 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow A(0, 2)$$

$$\bullet B = r \cap \text{eje } X: \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow B(3, 0)$$

$$\bullet \vec{AB} = (3, -2) \perp m_{AB} \text{ (mediatriz de } AB) \rightarrow \vec{m}_{AB} = (2, 3) \left. \begin{array}{l} \\ m_{AB} \left( \frac{3}{2}, \frac{2}{2} \right) = \left( \frac{3}{2}, 1 \right) \text{ (punto medio de } AB) \in \text{mediatriz} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow y - 1 = \frac{3}{2} \left( x - \frac{3}{2} \right) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \rightarrow m_{AB}: 6x - 4y - 5 = 0$$

- 28** Determina los puntos que dividen al segmento  $AB$ ,  $A(-2, 1)$ ,  $B(5, 4)$ , en tres partes iguales.

• Si  $P$  y  $Q$  son esos puntos,  $\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB}$ .

Escribe las coordenadas de  $\vec{AP}$  y de  $\vec{AB}$  y obtén  $P$ .  $Q$  es el punto medio de  $\overline{PB}$



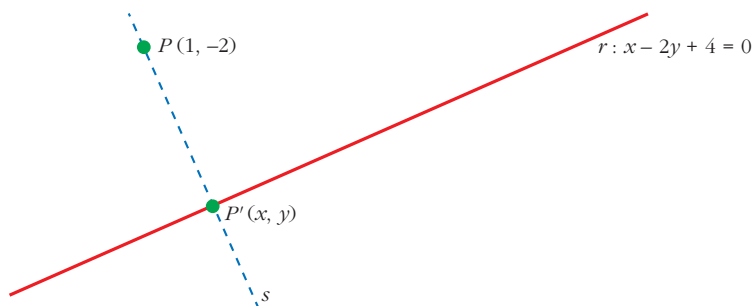
•  $\vec{AP} = \frac{1}{3} \vec{AB} \rightarrow (x + 2, y - 1) = \frac{1}{3} (7, 3) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2 = \frac{7}{3} \rightarrow x = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} \\ y - 1 = \frac{3}{3} \rightarrow y = 1 + 1 = 2 \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{1}{3}, 2\right)$$

•  $Q$  es un punto medio de  $PB \rightarrow Q\left(\frac{1/3 + 5}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) \rightarrow Q\left(\frac{8}{3}, 3\right)$

- 31** Halla el pie de la perpendicular trazada desde  $P(1, -2)$  a la recta  $r: x - 2y + 4 = 0$ .

• Escribe la perpendicular a  $r$  desde  $P$  y halla el punto de corte con  $r$ .



Sea  $s$  la recta perpendicular a  $r$  desde  $P$  y  $\vec{r} = (2, 1)$  vector director de  $r$ .

Así,  $\vec{PP'} \perp \vec{r} \Rightarrow$  el vector director de  $s$ ,  $\vec{s}$ , también es perpendicular a  $\vec{r}$  ( $\vec{s} \perp \vec{r}$ ), luego podemos tomar  $\vec{s}(1, -2)$ . Como  $P(1, -2) \in s$ :

$$s: \begin{cases} x = 1 + t & \rightarrow t = x - 1 \\ y = -2 - 2t & \rightarrow t = \frac{y + 2}{-2} \end{cases} \rightarrow x - 1 = \frac{y + 2}{-2} \rightarrow -2x + 2 = y + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow s: 2x + y = 0$$

El punto  $P'(x, y)$  es tal que:

$$P' = s \cap r \begin{cases} s: 2x + y = 0 \rightarrow y = -2x \\ r: x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x - 2(-2x) + 4 = 0 \rightarrow x + 4x + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-4}{5} \rightarrow y = -2\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

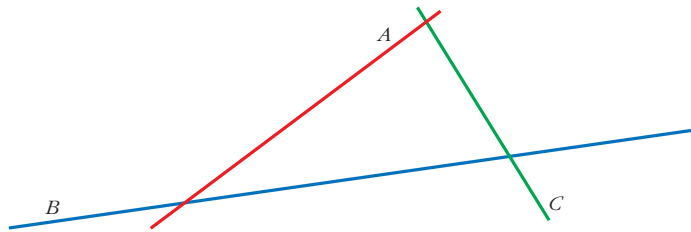
Luego:  $P'\left(\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

- 32** Las ecuaciones de los lados del triángulo  $ABC$  son  $AB: x + 2y - 4 = 0$ ,  $AC: x - 2y = 0$ ,  $BC: x + y = 0$ . Halla:

a) Los vértices del triángulo.

b) El vector que une los puntos medios de  $AB$  y  $AC$ . Comprueba que es paralelo a  $\vec{BC}$ .

• b) Las coordenadas de  $\vec{BC}$  deben ser proporcionales a las del vector que has hallado.



$$a) A = AB \cap AC$$

$$B = AB \cap BC$$

$$C = AC \cap BC$$

$$\bullet A: \begin{cases} AB: x + 2y - 4 = 0 \\ AC: x - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{Sumamos las ecuaciones:}$$

$$\frac{2x}{2x} \quad -4 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Sustituyendo en } AC: 2 - 2y = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\text{Luego: } A(2, 1)$$

$$\bullet B: \begin{cases} AB: x + 2y - 4 = 0 \\ BC: x + y = 0 \rightarrow x = -y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow -y + 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow x = -4$$

$$\text{Luego: } B(-4, 4)$$

$$\bullet C: \begin{cases} AC: x - 2y = 0 \\ BC: x + y = 0 \rightarrow x = -y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow -y - 2y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Luego: } C(0, 0)$$

$$b) \text{ El punto medio de } AB \text{ es } M_{AB} \left( -1, \frac{5}{2} \right).$$

$$\text{El punto medio de } AC \text{ es } M_{AC} \left( 1, \frac{1}{2} \right).$$

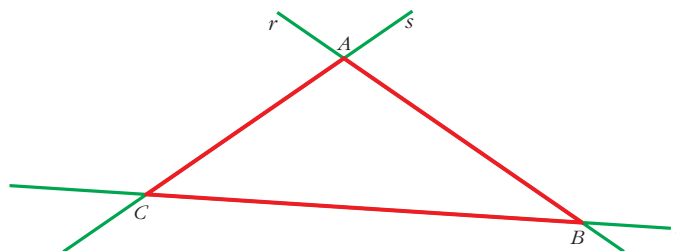
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{M_{AB}M_{AC}} = (2, -2) \\ \overrightarrow{BC} = (4, -4) \end{array} \right\} \text{ Así, } \overrightarrow{M_{AB}M_{AC}} \parallel \overrightarrow{BC}, \text{ pues: } \overrightarrow{M_{AB}M_{AC}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

**34** **Calcula el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:**

$$r: x = 3$$

$$s: 2x + 3y - 6 = 0$$

$$t: x - y - 7 = 0$$



$$\bullet A = r \cap s \begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow 6 + 3y - 6 = 0 \rightarrow y = 0$$

Luego:  $A(3, 0)$

$$\bullet B = r \cap t \begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow 3 - y - 7 = 0 \rightarrow y = -4$$

Luego:  $B(3, -4)$

$$\bullet C = s \cap t \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow x = y + 7 \rightarrow \\ \rightarrow 2(y + 7) + 3y - 6 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow 2y + 14 + 3y - 6 = 0 \rightarrow 5y + 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{-8}{5} \rightarrow \\ \rightarrow x = \frac{-8}{5} + 7 = \frac{27}{5}$$

Luego:  $C\left(\frac{27}{5}, \frac{-8}{5}\right)$

- Consideramos el segmento  $AB$  como base:

$$|\vec{AB}| = |(0, -4)| = \sqrt{16} = 4$$

- La altura desde  $C$  es  $b_C = \text{dist}(C, r) = \frac{|(-8/5) - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{23}{5}$

- Así:

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB}| \cdot b_C}{2} = \frac{4 \cdot 23/5}{2} = \frac{46}{5}$$

### 36 En el triángulo de vértices $A(-1, -1)$ , $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$ , halla las longitudes de la mediana y de la altura que parten de $B$ .

- *Mediana.* Es el segmento  $BM$  donde  $M$  es el punto medio de  $AC$ .

$$M\left(\frac{3}{2}, 0\right) \rightarrow \vec{BM} = \left(\frac{3}{2} - 2, 0 - 4\right) = \left(-\frac{1}{2}, -4\right)$$

La longitud de la mediana es:  $|\vec{BM}| = \sqrt{1/4 + 16} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

- *Altura.* Es el segmento  $BP$  donde  $P$  es el pie de la perpendicular a  $AC$  desde  $B$ .

$\vec{AC} = (5, 2) \Rightarrow$  la recta que contiene ese segmento es:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2} \rightarrow 2x - 5y - 3 = 0$$

$\vec{v} = (-2, 5) \perp \vec{AC} \Rightarrow$  la recta  $s \perp r$  que pasa por  $B$ :

$$s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4 + 5t \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{5} \rightarrow 5x + 2y - 18 = 0$$

$$P = r \cap s \rightarrow \begin{cases} r: 2x - 5y - 3 = 0 \\ s: 5x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por 2 y la segunda por 5, y sumamos:

$$4x - 10y - 6 = 0$$

$$25x + 10y - 90 = 0$$

$$\hline 29x - 96 = 0 \rightarrow x = \frac{96}{29} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \frac{96}{29} - 5y - 3 = 0 \rightarrow 5y = \frac{192}{29} - 3 = \frac{105}{29} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{105}{29} : 5 = \frac{21}{29}$$

Luego:  $P\left(\frac{96}{29}, \frac{21}{29}\right)$

$$\text{Así: } h_B = |\vec{BP}| = \left| \left( \frac{38}{29}, -\frac{95}{29} \right) \right| = \sqrt{\frac{10\,469}{29^2}} \approx \frac{\sqrt{10\,469}}{29} \approx 3,528$$

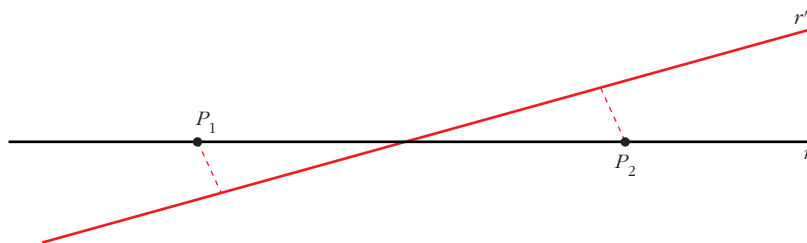
**38** Determina un punto en la recta  $y = 2x$  que diste 3 unidades de la recta  $3x - y + 8 = 0$ .

$$\begin{cases} P(x, y) \in r: y = 2x \\ \text{dist}(P, r') = 3, \text{ donde } r': 3x - y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \frac{|3x - y + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \end{cases} \rightarrow \frac{|3x - 2x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \rightarrow \frac{|x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{dos posibilidades: } \begin{cases} x + 8 = 3\sqrt{10} \rightarrow x_1 = 3\sqrt{10} - 8 \rightarrow \\ x + 8 = -3\sqrt{10} \rightarrow x_2 = -3\sqrt{10} - 8 \rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow y_1 = 6\sqrt{10} - 16 \\ \rightarrow y_2 = -6\sqrt{10} - 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1(3\sqrt{10} - 8, 6\sqrt{10} - 16) \\ P_2(-3\sqrt{10} - 8, -6\sqrt{10} - 16) \end{cases}$$



- 40** Calcula  $c$  para que la distancia entre las rectas  $4x + 3y - 6 = 0$  y  $4x + 3y + c = 0$  sea igual a 3.

Sea  $P \in r_1$  donde  $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 2 \rightarrow P(0, 2) \in r_1$

$$\text{Así, } \text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P, r_2) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|6 + c|}{5} = 3 \rightarrow \begin{cases} 6 + c = 15 \rightarrow c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \rightarrow c_2 = -21 \end{cases}$$

- 43** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas  $r$  y  $s$  y forma un ángulo de  $45^\circ$  con la recta:  $x + 5y - 6 = 0$ .

$$r: 3x - y - 9 = 0 \quad s: x - 3 = 0$$

$$P = r \cap s: \begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow 9 - y - 9 = 0 \rightarrow y = 0$$

Luego:  $P(3, 0)$

Como la recta pedida y  $x + 5y - 6 = 0$  forman un ángulo de  $45^\circ$ , entonces si sus pendientes son, respectivamente,  $m_1$  y  $m_2$ , se verifica:

$$\begin{aligned} \text{tg } 45^\circ &= \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right| \rightarrow 1 = \left| \frac{(-1/5) - m_1}{1 + (-1/5) \cdot m_1} \right| \rightarrow \\ &\rightarrow 1 = \left| \frac{-1 - 5 \cdot m_1}{5 - m_1} \right| \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} 5 - m_1 = -1 - 5m_1, \text{ o bien} \\ -(5 - m_1) = -1 - 5m_1 \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} 4m_1 = -6 \rightarrow m_1 = -6/4 \\ 6m_1 = 4 \rightarrow m_1 = 4/6 \end{cases} \end{aligned}$$

Hay dos posibles soluciones:  $t_1: y - 0 = \frac{-6}{4}(x - 3) \rightarrow t_1: y = \frac{-3}{2}x + \frac{9}{2}$

$$t_2: y - 0 = \frac{4}{6}(x - 3) \rightarrow t_2: y = \frac{2}{3}x - \frac{6}{3}$$

- 44** Dadas las rectas:

$$r: 2x - 5y - 17 = 0$$

$$s: 3x - ky - 8 = 0$$

Calcula el valor de  $k$  para que  $r$  y  $s$  se corten formando un ángulo de  $60^\circ$ .

🔵 *Halla la pendiente de  $r$ . La pendiente de  $s$  es  $3/k$ . Ten en cuenta que obtendrás dos soluciones.*

Las pendientes de  $r$  y  $s$  son, respectivamente:

$$m_r = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad m_s = \frac{3}{k}$$

Entonces:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \left| \frac{2/5 - 3/k}{1 + 2/5 \cdot 3/k} \right| \rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{2k - 15}{5k + 6} \right| \rightarrow \text{dos casos:}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3}(5k + 6) = 2k - 15 \rightarrow 5\sqrt{3}k + 6\sqrt{3} = 2k - 15 \\ -\sqrt{3}(5k + 6) = 2k - 15 \rightarrow -5\sqrt{3}k - 6\sqrt{3} = 2k - 15 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow k_1 = \frac{-15 - 6\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 2}, \quad k_2 = \frac{-15 + 6\sqrt{3}}{-5\sqrt{3} - 2}$$

**46** Halla los ángulos del triángulo cuyos vértices son  $A(-3, 2)$ ,  $B(8, -1)$  y  $C(3, -4)$ .

• Representa el triángulo y observa si tiene algún ángulo obtuso.

$$\vec{AB} = (11, -3); \quad \vec{BA} = (-11, 3)$$

$$\vec{AC} = (6, -6); \quad \vec{CA} = (-6, 6)$$

$$\vec{BC} = (-5, -3); \quad \vec{CB} = (5, 3)$$

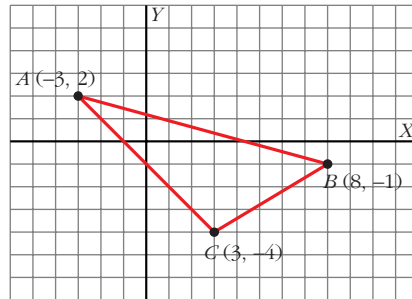
$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{66 + 18}{\sqrt{130} \sqrt{72}} \approx 0,868$$

$$\text{Luego: } \hat{A} = 29^\circ 44' 41,6''$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{55 - 9}{\sqrt{130} \sqrt{34}} \approx 0,692$$

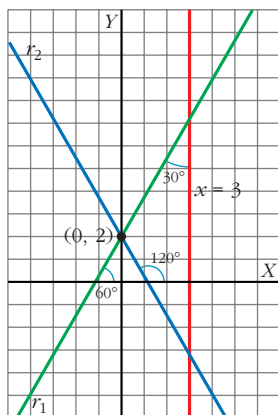
$$\text{Luego: } \hat{B} = 46^\circ 13' 7,9''$$

$$\text{Así, } \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 104^\circ 2' 10,5''$$



**47** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(0, 2)$  y forma un ángulo de  $30^\circ$  con la recta  $x = 3$ .

• La recta que buscamos forma un ángulo de  $60^\circ$  o de  $120^\circ$  con el eje  $OX$ .



La recta  $r$  forma un ángulo de  $60^\circ$  o de  $120^\circ$  con el eje  $OX$ .

Su pendiente es:

$$\begin{cases} m_1 = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ o bien} \\ m_2 = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que debe pasar por  $P(0, 2)$ , las posibles soluciones son:

$$r_1: y = \sqrt{3}x + 2$$

$$r_2: y = -\sqrt{3}x + 2$$

- 50** Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por  $A(-2, 2)$  y forman un ángulo de  $60^\circ$  con la recta  $x = y$ .

$b: x = y \rightarrow$  su pendiente es  $m_b = 1$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \left| \frac{1 - m}{1 + 1 \cdot m} \right| \rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{1 - m}{1 + m} \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{3}m = 1 - m \rightarrow m_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \\ -\sqrt{3} - \sqrt{3}m = 1 - m \rightarrow m_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 1} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que pasan por  $A(-2, 2)$ :

$$r_1: y - 2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} (x + 2)$$

ECUACIONES PUNTO-PENDIENTE

$$r_2: y - 2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 1} (x + 2)$$

- 52** Escribe la ecuación de la recta  $r$  que pasa por  $A(2, 3)$  y  $B(5, 6)$  y halla la ecuación de una recta paralela a  $r$ , cuya distancia a  $r$  sea igual a la distancia entre  $A$  y  $B$ .

•  $r: \begin{cases} \text{vector director } \vec{AB} = (3, 3) \\ \text{pasa por } A(2, 3) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 3t \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{3} \rightarrow 3x - 3y + 3 = 0 \rightarrow r: x - y + 1 = 0$$

•  $s \parallel r \rightarrow m_s = m_r = 1 \rightarrow y = x + c \rightarrow s: x - y + c = 0$

$$\operatorname{dist}(r, s) = \operatorname{dist}(A, s) = \operatorname{dist}(A, B) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|2 - 3 + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = |\vec{AB}| \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|1 + c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{18} \rightarrow \begin{cases} -1 + c = 6 \Rightarrow c_1 = 6 + 1 = 7 \\ -1 + c = -6 \Rightarrow c_2 = -6 + 1 = -5 \end{cases}$$

$$\rightarrow s_1: x - y + 7 = 0$$

$$s_2: x - y - 5 = 0$$

- 53** Halla el punto simétrico de  $P(1, 1)$  respecto a la recta  $x - 2y - 4 = 0$ .

•  $\vec{PP'} \perp \vec{v}$  donde  $P'$  es el simétrico de  $P$  respecto a esa recta y  $\vec{v}$  es el vector director de la misma.

$$\vec{PP'} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (x - 1, y - 1) \cdot (2, 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x - 1) + (y - 1) = 0 \rightarrow 2x + y - 3 = 0$$

- Además, el punto medio de  $PP'$ ,  $m$ , debe pertenecer a la recta. Luego:

$$m\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \in r \rightarrow \frac{x+1}{2} - 2\frac{y+1}{2} - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x+1 - 2y - 2 - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 2y - 9 = 0$$

- Así, teniendo en cuenta las dos condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \rightarrow x = 9 + 2y \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(9 + 2y) + y - 3 = 0 \rightarrow 18 + 4y + y - 3 = 0 \rightarrow y = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\rightarrow x = 9 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$$

Luego:  $P' = (3, -3)$

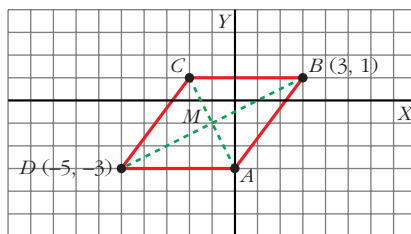
**54 Un rombo  $ABCD$  tiene un vértice en el eje de las ordenadas; otros dos vértices opuestos son  $B(3, 1)$  y  $D(-5, -3)$ .**

**Halla las coordenadas de los vértices  $A$  y  $C$  y el área del rombo.**

Sea  $A \in$  eje  $Y \rightarrow A = (0, y_1)$  y sea el punto  $C = (x_2, y_2)$ .

Como estamos trabajando con un rombo, sus diagonales  $AC$  y  $BD$  se cortan en su punto medio,  $M$ .

Además,  $AC \perp BD$ .



- $M\left(\frac{3-5}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (-1, -1)$  es el punto medio de  $BD$  (y de  $AC$ ).

- Sea  $d$  la recta perpendicular a  $BD$  por  $M$  (será, por tanto, la que contiene a  $AC$ ):

$$\left. \begin{array}{l} \vec{BD} = (-8, -4) \rightarrow \vec{d} = (4, -8) \text{ es vector director de } d \\ M(-1, -1) \in d \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{La pendiente de } d \text{ es } m_d = \frac{-8}{4} = -2 \\ M(-1, -1) \in d \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow d: y + 1 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x - 3$$

- Así:

$$A = d \cap \text{eje } Y: \left\{ \begin{array}{l} y = -2x - 3 \\ x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y = -3 \rightarrow A(0, -3)$$

•  $M$  es punto medio de  $AC \rightarrow (-1, -1) = \left(\frac{0 + x_2}{2}, \frac{-3 + y_2}{2}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 = \frac{x_2}{2} \rightarrow x_2 = -2 \\ -1 = \frac{-3 + y_2}{2} \rightarrow y_2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow C(-2, 1)$$

• Área =  $\frac{|\vec{AC}| |\vec{BD}|}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{AC}| = |(-2, 4)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ |\vec{BD}| = |(-8, -4)| = \sqrt{8} = 4\sqrt{5} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Área} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 20$$

- 56** La recta  $2x + y - 4 = 0$  es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto  $(0, 0)$ . Halla las coordenadas del otro extremo.



Un vector director de la recta es el  $\vec{v} = (1, -2)$ .

• Debe verificarse que:  $\vec{v} \perp \vec{OA} = \vec{v} \cdot \vec{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \rightarrow x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y$$

• Además, el punto medio de  $OA$ ,  $M$ , pertenece a la recta:

$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \rightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow 4y + \frac{y}{2} - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{8}{5} \rightarrow x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Luego:  $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$



- 59** Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas  $4x + 3y + 6 = 0$  y  $3x + 4y - 9 = 0$ .

$P(x, 0)$  debe verificar  $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, s)$ :

$$\frac{|4x + 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x + 4 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{25}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x + 6 = 3x - 9 & \rightarrow x_1 = -15 \\ 4x + 6 = -(3x - 9) & \rightarrow x_2 = 3/7 \end{cases} \rightarrow P_1(-15, 0), P_2\left(\frac{3}{7}, 0\right)$$

- 64** La recta  $x + y - 2 = 0$  y una recta paralela a ella que pasa por el punto  $(0, 5)$  determinan, junto con los ejes de coordenadas, un trapecio isósceles. Halla su área.

$$\left. \begin{array}{l} s//r: x + y - 2 = 0 \Rightarrow x + y + k = 0 \\ P(0, 5) \in s \end{array} \right\} \rightarrow 0 + 5 + k = 0 \rightarrow k = -5$$

Luego  $s: x + y - 5 = 0$

• Sean:  $A = r \cap \text{eje } X: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } Y: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2)$

$C = s \cap \text{eje } X: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 5 \Rightarrow C(5, 0)$

$D = s \cap \text{eje } Y: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 5 \Rightarrow D(0, 5)$

•  $\vec{AB} = (-2, 2); \vec{CD} = (-5, 5)$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{|\vec{AB}| + |\vec{CD}|}{2} \cdot h = \frac{|\vec{AB}| + |\vec{CD}|}{2} \cdot \text{dist}(A, s) = \\ &= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{|2 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

- 67** De todas las rectas que pasan por el punto  $A(1, 2)$ , halla la pendiente de aquella cuya distancia al origen es 1.

• La ecuación  $y = 2 + m(x - 1)$  representa a todas esas rectas. Pásala a forma general y aplica la condición  $d(O, r) = 1$ .

- Esas rectas tienen por ecuación:

$$y = 2 + m(x - 1) \rightarrow mx - y + (2 - m) = 0$$

•  $d(0, r) = 1 \rightarrow \frac{|2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - m = \sqrt{m^2 + 1} \\ 2 - m = -\sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow (2 - m)^2 = m^2 + 1 \rightarrow 4 + m^2 - 4m = m^2 + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 - 4m = 1 \rightarrow m = \frac{3}{4}$$

**72** a) ¿Qué se puede decir de una recta si en su ecuación general falta el término independiente?

b) ¿Y si falta el término en  $x$ ?

c) ¿Y si falta el término en  $y$ ?

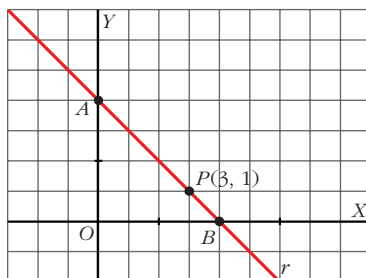
a) La recta pasa por  $(0, 0)$ .

b) Es una recta horizontal (paralela al eje  $OX$ ).

c) Es una recta vertical (paralela al eje  $OY$ ).

**82** Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto  $P(3, 1)$  y forma con la parte positiva de los ejes de coordenadas un triángulo de área 6.

- Las rectas que pasan por  $P(3, 1)$ , tienen de ecuación:  $y - 1 = m(x - 3)$



- Los vértices  $A$  y  $B$  serán los puntos de corte de la recta con los ejes:

$$x = 0 \rightarrow y - 1 = -3m \rightarrow y = 1 - 3m$$

$$y = 0 \rightarrow 0 - 1 = mx - 3m \rightarrow x = \frac{3m - 1}{m}$$

Luego:  $A(0, 1 - 3m)$  y  $B\left(\frac{3m - 1}{m}, 0\right)$

- Como  $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

Tomando como base  $OA$  y altura  $OB$ :

$$6 = \frac{(1 - 3m) \left(\frac{3m - 1}{m}\right)}{2} \rightarrow (1 - 3m) \left(\frac{3m - 1}{m}\right) = 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-9m^2 - 1 + 6m}{m} = 12 \rightarrow -9m^2 - 1 + 6m = 12m \rightarrow$$

$$\rightarrow 9m^2 + 6m + 1 = 0 \rightarrow m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = -3$$

Luego la recta es:

$$r: y - 1 = -3(x - 3) \rightarrow r: y = -3x + 10$$