4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Bernardo conoce la distancia $\overline{AB}$ a la que está del árbol y los ángulos $\widehat{CBA}$ y $\widehat{BAC}$; y quiere calcular la distancia $\overline{BC}$ a la que está de Carmen.

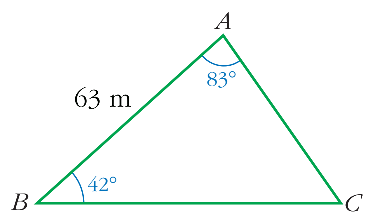
Datos: $\overline{AB}$ **= 63 m**

$\widehat{CBA}$ **= 42º**

$\widehat{BAC}$ **= 83º**

$\overline{BC}$ = 42 mm

Deshaciendo la escala: $\overline{BC}$ = 42 m



Bernardo ve desde su casa el castillo y la abadía. Conoce las distancias a ambos lugares, pues ha hecho el camino a pie muchas veces; y quiere averiguar la distancia del castillo a la abadía. Para ello debe, previamente, medir el ángulo CBA.

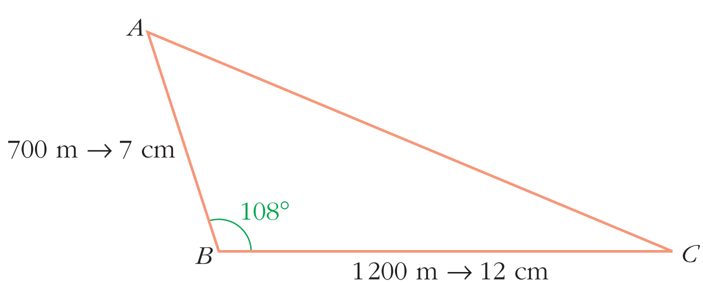
Datos: $\overline{BC}$ **= 1 200 m;** $\overline{BA}$ **= 700 m;** ***CBA*** **= 108º.**

100 m $\rightarrow$ 1 cm

1 200 m $\rightarrow$ 12 cm

700 m $\rightarrow$ 7 cm

$\overline{CA}$ = 14,7 cm $\Rightarrow$ $\overline{CA}$ = 1 470 m



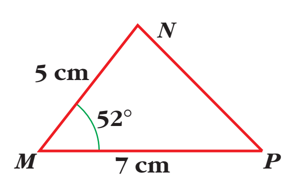
NOTA: El triángulo está construido al 50% de su tamaño.

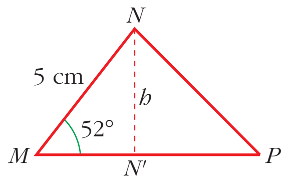
1. **Considera este triángulo:**

a) Calcula la proyección de *MN* sobre *MP*.

b) Halla la altura correspondiente a la base *MP*.

c) Calcula el área del triángulo.



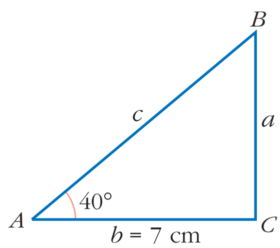


a) $cos\ 52° = \dfrac{\overline{MN'}}{MN} = \dfrac{\overline{MN'}}{5} \Rightarrow \overline{MN'} = 5\ cos\ 52° = 3{,}08$ cm

b) $sen\ 52° = \dfrac{h}{5} \Rightarrow h = 5 \cdot sen\ 52° = 3{,}94$ cm

c) $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{b \cdot \overline{MN} \cdot sen\ 52°}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot sen\ 52° = 13{,}79\ cm^2$

1. Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40º. ¿Cuánto mide el poste?



$tg\ 40° = \dfrac{a}{7} \rightarrow a = 7\ tg\ 40° = 5{,}87$ m

3. Di el valor de *sen* α y *cos* α para ángulos de 0º, 90º, 180º, 270º y 360º.

$sen\ 0° = 0$	$sen\ 90° = 1$	$sen\ 180° = 0$	$sen\ 270° = -1$	$sen\ 360° = 0$
$cos\ 0° = 1$	$cos\ 90° = 0$	$cos\ 180° = -1$	$cos\ 270° = 0$	$cos\ 360° = 1$

4. Resuelve los siguientes triángulos:

a) *a* = 12 cm; *b* = 16 cm; *c* = 10 cm

b) *b* = 22 cm; *a* = 7 cm; $\hat{C}$ = 40º

c) *a* = 8 m; *b* = 6 m; *c* = 5 m

d) *b* = 4 cm; *c* = 3 cm; $\hat{A}$ = 105º

e) *a* = 4 m; $\hat{B}$ = 45º y $\hat{C}$ = 60º

f) *b* = 5 m; $\hat{A} = \hat{C}$ = 35

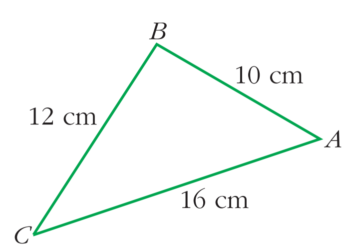
a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A}$

$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10\ cos\ \hat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320\ cos\ \hat{A}$

$cos\ \hat{A} = \dfrac{256 + 100 - 144}{320} = 0{,}6625$

$A = 48°\ 30'\ 33''$



- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

  $256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B}$

  $\cos \hat{B} = \dfrac{144 + 100 - 256}{240} = -0{,}05$

  $B = 92° \ 51' \ 57{,}5''$

- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \quad \rightarrow \quad \hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B}$

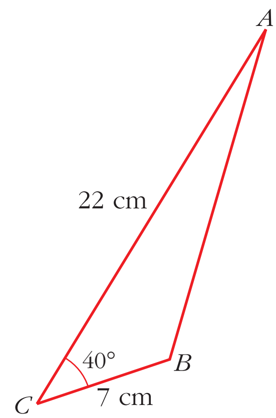
  $\hat{C} = 38° \ 37' \ 29{,}5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

  $c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40° =$

  $= 49 + 484 - 235{,}94 = 297{,}06$

  $c = 17{,}24$ cm



- $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \quad \rightarrow \quad \dfrac{7}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{17{,}24}{\operatorname{sen} 40°}$

  $\operatorname{sen} \hat{A} = \dfrac{7 \operatorname{sen} 40°}{17{,}24} = 0{,}26$

  $A = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15° \ 7' \ 44{,}3'' \\ \hat{A}_2 = 164° \ 52' \ 15{,}7'' \quad \rightarrow \quad \text{No válida} \end{cases}$

  (La solución A_2 no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180°$).

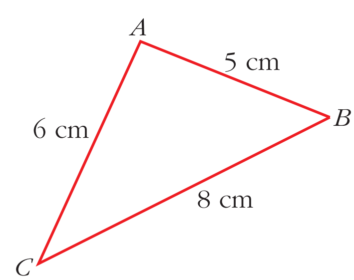
- $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 124° \ 52' \ 15{,}7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

  $64 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \hat{A}$

  $\cos \hat{A} = \dfrac{36 + 25 - 64}{60} = -0{,}05$

  $\hat{A} = 92° \ 51' \ 57{,}5''$



- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

  $36 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos \hat{B}$

  $\cos \hat{B} = \dfrac{64 + 25 - 36}{80} = 0{,}6625$

  $\hat{B} = 48° \ 30' \ 33''$

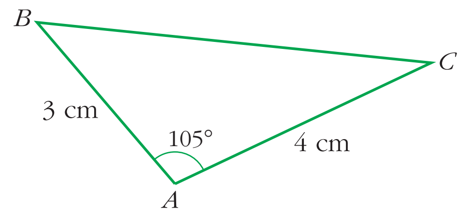
- $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 38° \ 37' \ 29{,}5''$

  (NOTA: Compárese con el apartado a). Son triángulos semejantes).

d) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} =$

$= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105° = 31,21$

$a = 5,59$ m



• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$

$\dfrac{5,59}{\text{sen } 105°} = \dfrac{4}{\text{sen } \hat{B}}$

$\text{sen } \hat{B} = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 105°}{5,59} = 0,6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43° \ 43' \ 25,3'' \\ \hat{B}_2 = 136° \ 16' \ 34,7'' \quad \to \quad \text{No válida} \end{cases}$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31° \ 16' \ 34,7''$

e) • $\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$

$\dfrac{4}{\text{sen } 75°} = \dfrac{b}{\text{sen } 45°}$

$b = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 75°} = 2,93$ m

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad \to \quad \dfrac{4}{\text{sen } 75°} = \dfrac{c}{\text{sen } 60°}$

$c = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 75°} = 3,59$ m

f) • $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} \quad \to \quad \dfrac{5}{\text{sen } 110°} = \dfrac{a}{\text{sen } 35°}$

$a = \dfrac{5 \cdot \text{sen } 35°}{\text{sen } 110°} = 3,05$ m

• Como $\hat{A} = \hat{C} \quad \to \quad a = c \quad \to \quad c = 3,05$ m

5. Las bases de un trapecio miden 17 cm y 10 cm y uno de sus lados 7 cm. El ángulo que forman las rectas sobre las que se encuentran los lados no paralelos es de 32º. Calcula lo que mide el otro lado y el área del trapecio.

• Los triángulos APB y DPC son semejantes, luego:

$$\frac{x}{10} = \frac{x+7}{17} \rightarrow 17x = 10\,(x+7) \rightarrow x = 10$$

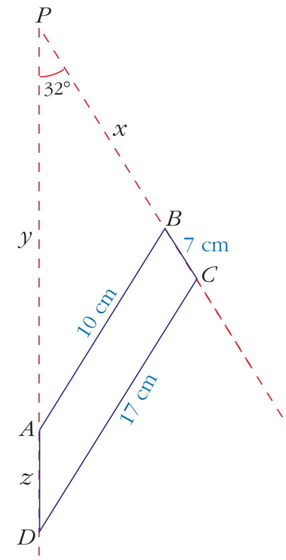
Aplicando el teorema del coseno en el triángulo APB tenemos:

$$\overline{AB}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 32°$$

$$10^2 = 10^2 + y^2 - 2 \cdot 10y \cdot \cos 32°$$

$$0 = y^2 - 16{,}96y$$

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow \text{No válido} \\ y = 16{,}96 \text{ cm} \end{cases}$$



De nuevo, por semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DP}} \rightarrow \frac{10}{16{,}96} = \frac{17}{z + 16{,}96} \rightarrow 10\,(z + 16{,}96) = 17 \cdot 16{,}96$$

$10z = 118{,}72 \rightarrow z = 11{,}872$ cm mide el otro lado, $\overline{AD}$, del trapecio.

• Como PDC es un triángulo isósceles donde $\overline{DC} = \overline{CP} = 17$ cm, entonces:

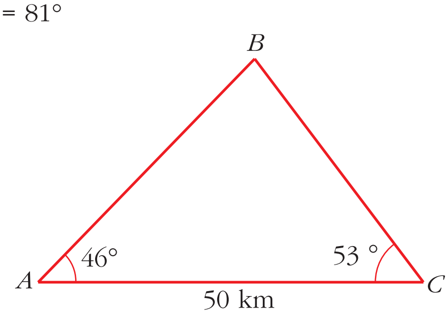
$$\hat{D} = 32° \rightarrow \operatorname{sen} 32° = \frac{h}{z} \Rightarrow h = z \cdot \operatorname{sen} 32° = 11{,}872 \cdot \operatorname{sen} 32° \approx 6{,}291$$

Así:

$$\text{Área}_{ABCD} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{17+10}{2} \cdot 6{,}291 = 84{,}93 \text{ cm}^2$$

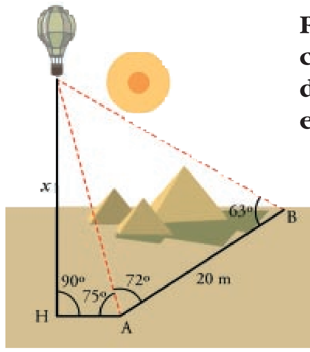
6. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $\widehat{BAC} = 46°$ y $\widehat{BCA} = 53°$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

$\hat{B} = 180° - 46° - 53° = 81°$

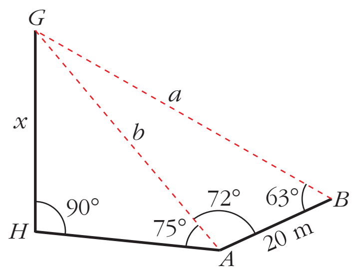


• $$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow a = \frac{b \operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 46°}{\operatorname{sen} 81°} = 36{,}4 \text{ km}$$

• $$\frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow c = \frac{b \operatorname{sen} \hat{C}}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 53°}{\operatorname{sen} 81°} = 40{,}4 \text{ km}$$

7. 

Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto *A*? ¿Cuánto del punto *B*? ¿A qué altura está el globo?



$\widehat{AGB} = 180° - 72° - 63° = 45°$

- $\dfrac{b}{sen\ 63°} = \dfrac{20}{sen\ 45°} \rightarrow b = \dfrac{20 \cdot sen\ 63°}{sen\ 45°} = 25{,}2$ m

- $\dfrac{a}{sen\ 72°} = \dfrac{20}{sen\ 45°} \rightarrow a = \dfrac{20 \cdot sen\ 72°}{sen\ 45°} = 26{,}9$ m

- $sen\ 75° = \dfrac{x}{b} = \dfrac{x}{25{,}2} \rightarrow x = 25{,}2 \cdot sen\ 75° = 24{,}3$ m

2 **Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{C} = 90°$) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:**

a) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm. Halla c, $\hat{A}$, $\hat{B}$.

b) $a = 43$ m, $\hat{A} = 37°$. Halla b, c, $\hat{B}$.

c) $a = 7$ m, $\hat{B} = 58°$. Halla b, c, $\hat{A}$.

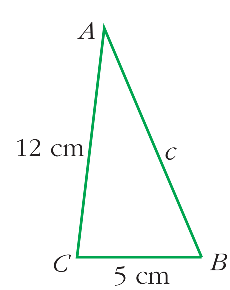
d) $c = 5{,}8$ km, $\hat{A} = 71°$. Halla a, b, $\hat{B}$.

e) $c = 5$ cm, $\hat{B} = 43°$. Halla a, b, $\hat{A}$.

a) $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \rightarrow c = 13$ cm

$tg\ \hat{A} = \dfrac{5}{12} = 0{,}416 \rightarrow A = 22°\ 37'\ 11{,}5°$

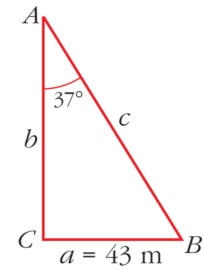
$\hat{B} = 90° - \hat{A} = 67°\ 22'\ 48{,}5''$



b) $\widehat{B} = 90° - 37° = 53°$

$sen\ \widehat{A} = \dfrac{43}{c} \rightarrow c = \dfrac{43}{sen\ 37°} = 71,45$ m

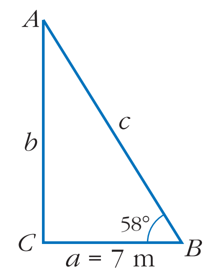
$tg\ \widehat{A} = \dfrac{43}{b} \rightarrow b = \dfrac{43}{tg\ 37°} = 57,06$ m



c) $\widehat{A} = 90° - 58° = 32°$

$cos\ \widehat{B} = \dfrac{7}{c} \rightarrow c = \dfrac{7}{cos\ 58°} = 13,2$ m

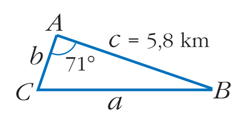
$tg\ \widehat{B} = \dfrac{b}{7} \rightarrow b = 7 \cdot tg\ 58° = 11,2$ m



d) $\widehat{B} = 90° - 71° = 19°$

$sen\ \widehat{A} = \dfrac{a}{5,8} \rightarrow a = 5,8 \cdot sen\ 71° = 5,48$ km

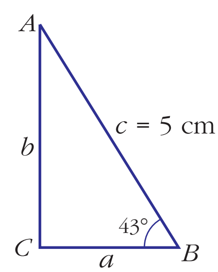
$cos\ \widehat{A} = \dfrac{b}{5,8} \rightarrow b = 5,8 \cdot cos\ 71° = 1,89$ km



e) $\widehat{A} = 90° - 43° = 47°$

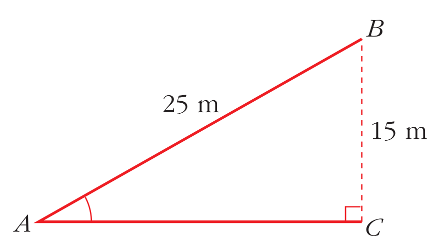
$cos\ \widehat{B} = \dfrac{a}{5} \rightarrow a = 5 \cdot cos\ 43° = 3,66$ cm

$sen\ \widehat{B} = \dfrac{b}{5} \rightarrow b = 5 \cdot sen\ 43° = 3,41$ cm



3 **Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve la carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?**

$sen\ \widehat{A} = \dfrac{15}{25} = 0,6 \rightarrow \widehat{A} = 36°\ 52'\ 11,6''$



4 **Una persona de 1,78 m de estatura proyecta una sombra de 66 cm, y en ese momento un árbol da una sombra de 2,3 m.**

a) ¿Qué ángulo forman los rayos del Sol con la horizontal?

b) ¿Cuál es la altura del árbol?

a) $tg\ \hat{B} = \dfrac{178}{66} = 2,\widehat{69} \ \rightarrow$

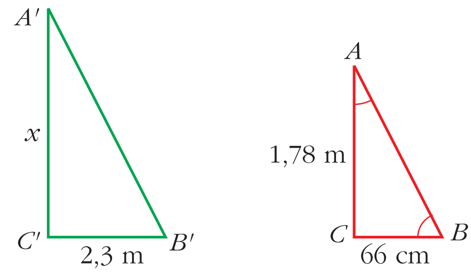
$\rightarrow \ B = 69°\ 39'\ 21,2''$

b) $\hat{B}' = \hat{B}$, luego:

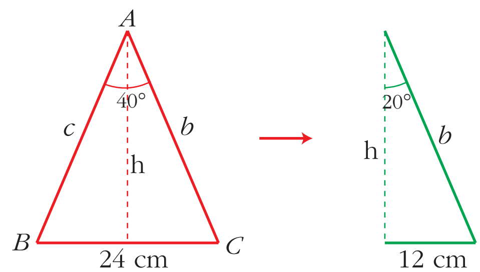
$tg\ \hat{B}' = \dfrac{x}{2,3} \ \rightarrow$

$\rightarrow \ x = 2,3 \cdot tg\ \hat{B}' = 6,20\widehat{3}$ m

(NOTA: Se podría resolver con el teorema de Tales).



5 **Calcula los lados iguales y el área de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 24 cm y el ángulo opuesto a la base mide 40°.**

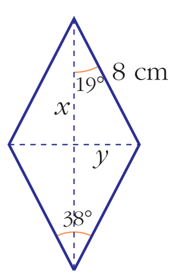


$sen\ 20° = \dfrac{12}{b} \ \rightarrow \ \hat{b} = \dfrac{12}{sen\ 20°} \approx 35,1 \text{ cm} = c$

$tg\ 20° = \dfrac{12}{h} \ \rightarrow \ \hat{h} = \dfrac{12}{tg\ 20°} \approx 33 \text{ cm} \ \rightarrow \ \hat{A} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{24 \cdot 33}{2} = 396 \text{ cm}$

6 **El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38°.**

¿Cuánto miden las diagonales del rombo?

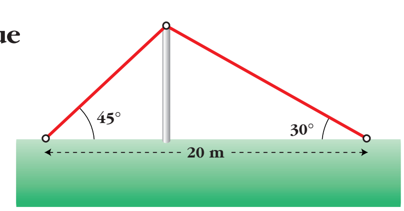


$sen\ 19° = \dfrac{y}{8} \ \rightarrow \ \hat{y} = 8 \cdot sen\ 19° = 2,6 \text{ cm} \ \rightarrow \ \hat{d} = 5,2 \text{ cm}$

$cos\ 38° = \dfrac{x}{8} \ \rightarrow \ \hat{x} = 8 \cdot cos\ 19° = 7,6 \text{ cm} \ \rightarrow \ \hat{D} = 15,2 \text{ cm}$

7 **Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura.**

¿Cuánto miden el mástil y el cable?



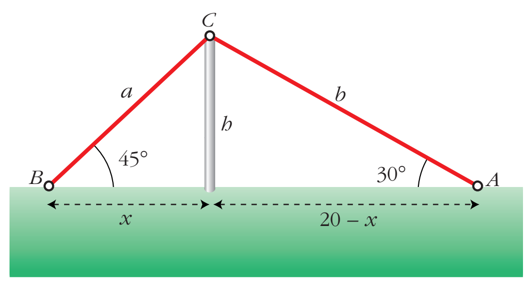
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 45° = \dfrac{h}{x} \ \rightarrow \ \hat{x} = \dfrac{h}{tg\ 45°} = \dfrac{h}{1} = h \\ tg\ 30° = \dfrac{h}{20 - x} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; tg\ 30° = \frac{h}{20 - h} \;\rightarrow\; (20 - h)\ tg\ 30° = h \;\rightarrow\; 20\ tg\ 30° - h\ tg\ 30° = h$$

$$\rightarrow \; 20\ tg\ 30° = h + h\ tg\ 30° \;\rightarrow\; h = \frac{20\ tg\ 30°}{1 + tg\ 30°} = 7{,}32 \text{ m} \;\; \text{(mástil)}$$

$$\left.\begin{array}{l} sen\ 45° = \dfrac{h}{a} \;\rightarrow\; a = \dfrac{h}{sen\ 45°} = \dfrac{7{,}32}{sen\ 45°} = 10{,}35 \text{ m} \\[2ex] sen\ 30° = \dfrac{h}{b} \;\rightarrow\; b = \dfrac{h}{sen\ 30°} = \dfrac{7{,}32}{sen\ 30°} = 14{,}64 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow$$

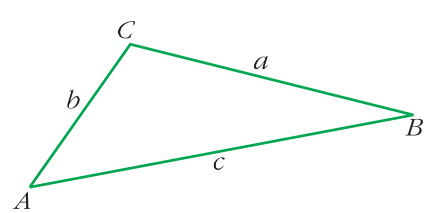
$$\rightarrow \; a + b = 24{,}99 \text{ m} \;\; \text{(cable)}$$



8 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) a **= 100 m**	$\hat{B}$ **= 47º**	$\hat{C}$ **= 63º**
b) b **= 17 m**	$\hat{A}$ **= 70º**	$\hat{C}$ **= 35º**
c) a **= 70 m**	b **= 55 m**	$\hat{C}$ **= 73º**
d) a **= 122 m**	c **= 200 m**	$\hat{B}$ **= 120º**
e) a **= 25 m**	b **= 30 m**	c **= 40 m**
f) a **= 100 m**	b **= 185 m**	c **= 150 m**
g) a **= 15 m**	b **= 9 m**	$\hat{A}$ **= 130º**
h) b **= 6 m**	c **= 8 m**	$\hat{C}$ **= 57º**

a) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 70°$



• $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{100}{sen\ 70°} = \dfrac{b}{sen\ 47°} \rightarrow$

$\rightarrow b = \dfrac{100 \cdot sen\ 47°}{sen\ 70°} = 77{,}83$ m

• $\dfrac{100}{sen\ 70°} = \dfrac{c}{sen\ 63°} \rightarrow c = \dfrac{100 \cdot sen\ 63°}{sen\ 70°} = 94{,}82$ m

b) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 75°$

• $\dfrac{17}{sen\ 75°} = \dfrac{a}{sen\ 70°} \rightarrow a = \dfrac{17 \cdot sen\ 70°}{sen\ 75°} = 16{,}54$ m

• $\dfrac{17}{sen\ 75°} = \dfrac{c}{sen\ 35°} \rightarrow c = \dfrac{17 \cdot sen\ 35°}{sen\ 75°} = 10{,}09$ m

c) • $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot \cos 73° = 5\,673{,}74 \quad \to \quad c = 75{,}3$ m

• $70^2 = 55^2 + 75{,}3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75{,}3 \cdot \cos \hat{A} \quad \to$

$$\to \quad \cos \hat{A} = \frac{55^2 + 75{,}3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75{,}3} = 0{,}4582 \quad \to \quad A = 62°\ 43'\ 49{,}4''$$

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 44°\ 16'\ 10{,}6''$

d) • $b^2 = 122^2 + 200^2 - 2 \cdot 122 \cdot 200 \cdot \cos 120° = 79\,284 \quad \to \quad b = 281{,}6$ m

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad \to \quad \cos \hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \to$

$$\to \quad \cos \hat{A} = \frac{281{,}6^2 + 200^2 - 122^2}{2 \cdot 281{,}6 \cdot 200} = 0{,}92698 \quad \to \quad A = 22°\ 1'\ 54{,}45''$$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 37°\ 58'\ 55{,}5''$

e) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad \to$

$$\to \quad \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0{,}7812 \quad \to \quad A = 38°\ 37'\ 29{,}4''$$

• $\cos \hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0{,}6625 \quad \to \quad B = 48°\ 30'\ 33''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 92°\ 51'\ 57{,}6''$

f) • $\cos \hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{185^2 + 150^2 - 100^2}{2 \cdot 185 \cdot 150} = 0{,}84189 \quad \to \quad A = 32°\ 39'\ 34{,}4''$

• $\cos \hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{100^2 + 150^2 - 185^2}{2 \cdot 100 \cdot 150} = -0{,}0575 \quad \to \quad B = 93°\ 17'\ 46{,}7''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 54°\ 2'\ 38{,}9''$

g) • $\dfrac{15}{sen\ 130°} = \dfrac{9}{sen\ \hat{B}} \quad \to \quad sen\ \hat{B} = \dfrac{9 \cdot sen\ 130°}{15} = 0{,}4596 \quad \to$ puede ser:

$$\to \quad \begin{cases} \hat{B}_1 = 27°\ 21'\ 46{,}8'' \\ \hat{B}_2 = 152°\ 38'\ 13{,}2'' \end{cases}$$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 22°\ 38'\ 13{,}2''$

• $\dfrac{15}{sen\ 130°} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}} \quad \to \quad c = \dfrac{15 \cdot sen\ \hat{C}}{sen\ 130°} = 7{,}54$ m

h) • $\dfrac{8}{sen\ 57°} = \dfrac{6}{sen\ \hat{B}} \quad \to \quad sen\ \hat{B} = \dfrac{6 \cdot sen\ 57°}{8} = 0{,}6290 \quad \to$

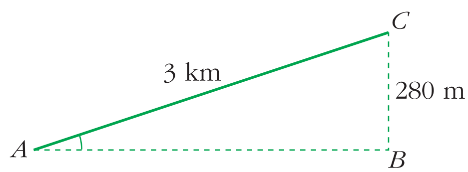
$$\to \quad \begin{cases} \hat{B}_1 = 38°\ 58'\ 35{,}7'' \\ \hat{B}_2 = 141°\ 1'\ 24{,}3'' \end{cases}$$

La solución B_2 no es válida, pues $\hat{C} + \hat{B}_2 > 180°$.

- $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 84°\ 1'\ 24{,}3''$

- $\dfrac{8}{sen\ 57°} = \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} \rightarrow a = \dfrac{8 \cdot sen\ \hat{A}}{sen\ 57°} = 9{,}5$ m

9 **Al recorrer 3 km por una carretera, hemos ascendido 280 m. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?**



$sen\ \hat{A} = \dfrac{280}{3\,000} = 0{,}09\hat{3} \rightarrow$

$\rightarrow A = 5°\ 21'\ 19{,}44''$

11 **Halla las restantes razones trigonométricas de α:**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha = -4/5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\alpha < 270°}$

b) $\boldsymbol{cos\ \alpha = 2/3}$ $\qquad$ $\boldsymbol{tg\ \alpha < 0}$

c) $\boldsymbol{tg\ \alpha = -3}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\alpha < 180°}$

a) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 3^{er}$ cuadrante $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\ \alpha < 0 \\ cos\ \alpha < 0 \\ tg\ \alpha > 0 \end{array}\right.$

- $cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} \rightarrow cos\ \alpha = -\dfrac{3}{5}$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{-4/5}{-3/5} = \dfrac{4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha > 0 \\ tg\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 4^{\underline{o}}$ cuadrante

- $sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9} \rightarrow sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha < 0 \\ \alpha < 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 2^{\underline{o}}$ cuadrante $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right.$

- $\dfrac{1}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 = 9 + 1 = 10 \rightarrow cos^2\ \alpha = \dfrac{1}{10} \rightarrow cos\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = (-3)\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right) = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

12 **Expresa con un ángulo del primer cuadrante:**

a) ***sen*** **150°**	**b)** ***cos*** **135°**	**c)** ***tg*** **210°**
d) ***cos*** **225°**	**e)** ***sen*** **315°**	**f)** ***tg*** **120°**
g) ***tg*** **340°**	**h)** ***cos*** **200°**	**i)** ***sen*** **290°**

a) $150° = 180° - 30° \quad \rightarrow \quad sen\ 150° = sen\ 30°$

b) $135° = 180 - 45° \quad \rightarrow \quad cos\ 135° = -cos\ 45°$

c) $210° = 180° + 30° \quad \rightarrow \quad tg\ 210° = \dfrac{sen\ 210°}{cos\ 210°} = \dfrac{-sen\ 30°}{-cos\ 30°} = tg\ 30°$

d) $255° = 270° - 15° \quad \rightarrow \quad cos\ 255° = -sen\ 15°$

e) $315° = 360° - 45° \quad \rightarrow \quad sen\ 315° = -sen\ 45°$

f) $120° = 180° - 60° \quad \rightarrow \quad tg\ 120° = \dfrac{sen\ 120°}{cos\ 120°} = \dfrac{sen\ 60°}{-cos\ 60°} = -tg\ 60°$

$\left(\text{También } 120° = 90° + 30° \quad \rightarrow \quad tg\ 120° = \dfrac{sen\ 120°}{cos\ 120°} = \dfrac{-cos\ 30°}{sen\ 30°} = -\dfrac{1}{tg\ 30}\right)$

g) $340° = 360° - 20° \quad \rightarrow \quad tg\ 340° = \dfrac{sen\ 340°}{cos\ 340°} = \dfrac{-sen\ 20°}{cos\ 20°} = -tg\ 20°$

h) $200° = 180° + 20° \quad \rightarrow \quad cos\ 200° = -cos\ 20°$

i) $290° = 270° + 20° \quad \rightarrow \quad sen\ 290° = -cos\ 20°$

(También $290° = 360° - 70° \quad \rightarrow \quad sen\ 290° = -sen\ 70°$)

15 **Si $tg\ \alpha = 2/3$ y $0 < \alpha < 90°$, halla:**

a) $sen\ \alpha$

b) $cos\ \alpha$

c) $tg\ (90° - \alpha)$

d) $sen\ (180° - \alpha)$

e) $cos\ (180° + \alpha)$

f) $tg\ (360° - \alpha)$

a) $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \quad \rightarrow \quad sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha$

$$\frac{1}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{cos^2\ \alpha} = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad cos\ \alpha = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Calculado en el apartado anterior: $cos\ \alpha = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

c) $tg\ (90° - \alpha) = \dfrac{sen\ (90° - \alpha)}{cos\ (90° - \alpha)} = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{3}{2}$

d) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

e) $cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha = \dfrac{-3\sqrt{13}}{13}$

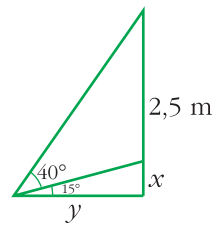
f) $tg\ (360° - \alpha) = \dfrac{sen\ (360° - \alpha)}{cos\ (360° - \alpha)} = \dfrac{-sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -tg\ \alpha = -\dfrac{2}{3}$

16 **Una estatua de 2,5 m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y la estatua bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura del pedestal.**

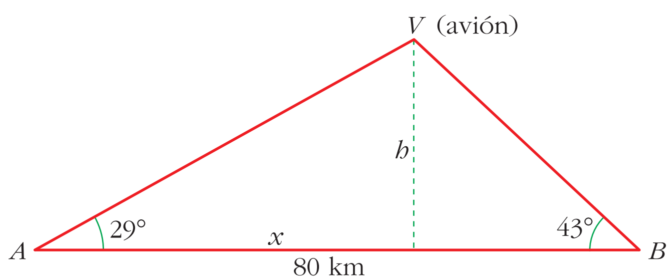
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 15° = \dfrac{x}{y} \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{x}{tg\ 15°} \\[2ex] tg\ 55° = \dfrac{2,5 + x}{y} \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{2,5 + x}{tg\ 55°} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \frac{x}{tg\ 15°} = \frac{2,5 + x}{tg\ 55°} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x\ tg\ 55° = 2,5\ tg\ 15° + x\ tg\ 15° \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{2,5 \cdot tg\ 15°}{tg\ 55° - tg\ 15°} = 0,58 \text{ m} \quad \text{(el pedestal)}$$



17 **Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a *A* y a *B* forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?**



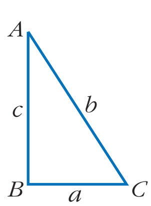
$$tg\ 29° = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{h}{tg\ 29°}$$

$$tg\ 43° = \frac{h}{80 - x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{80\ tg\ 43° - h}{tg\ 43°}$$

$$\rightarrow \quad \frac{h}{tg\ 29°} = \frac{80\ tg\ 43° - h}{tg\ 43°} \quad \rightarrow \quad h\ tg\ 43° = 80\ tg\ 43°\ tg\ 29° - h\ tg\ 29° \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad h = \frac{80\ tg\ 43°\ tg\ 29°}{tg\ 43° + tg\ 29°} = 27,8 \text{ km}$$

18 **De un triángulo rectángulo se sabe que su área vale 864 cm² y un cateto mide 48 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos.**



$$\left.\begin{array}{l} \text{Área} = 864 \text{ cm}^2 \\ a = 48 \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow \ A = \frac{a \cdot c}{2} \ \Rightarrow \ 864 = \frac{48 \cdot c}{2} \ \rightarrow \ c = 36 \text{ cm}$$

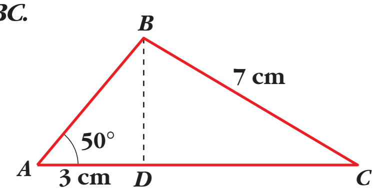
$$b^2 = a^2 + c^2 = 48^2 + 36^2 = 3\,600 \ \rightarrow \ b = 60 \text{ cm}$$

$sen\ \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$ $sen\ \hat{B} = sen\ 90° = 1$ $sen\ \hat{C} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

$cos\ \hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ $cos\ \hat{B} = cos\ 90° = 0$ $cos\ \hat{C} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$

$tg\ \hat{A} = \frac{4}{3}$ $tg\ \hat{C} = \frac{3}{4}$

19 **Calcula los lados y los ángulos del triángulo *ABC*.**



☛ ***En el triángulo rectángulo ABD, halla $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$. En BDC, halla $\hat{C}$ y $\overline{DC}$. Para hallar $\hat{B}$, sabes que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.***

- En $\overset{\frown}{ABD}$:

$$cos\ 50° = \frac{3}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{3}{cos\ 50°} = 4{,}7 \text{ cm}$$

$$tg\ 50° = \frac{\overline{BD}}{3} \rightarrow BD = 3\ tg\ 50° = 3{,}6 \text{ cm}$$

- En $\overset{\frown}{BDC}$:

$$sen\ \hat{C} = \frac{\overline{BD}}{7} = \frac{3{,}6}{7} \approx 0{,}5143 \rightarrow C = 30°\ 56'\ 59''$$

$$cos\ \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{7} \rightarrow \overline{DC} = 7 \cdot cos\ \hat{C} \approx 6 \text{ cm}$$

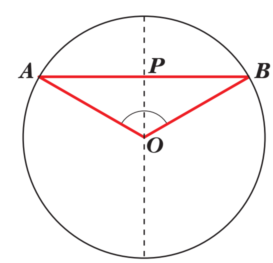
- Así, ya tenemos:

$\hat{A} = 50°$ $a = 7$ cm

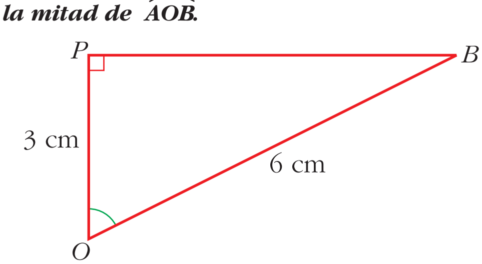
$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 99°\ 3'\ 1''$ $b = \overline{AD} + \overline{DC} = 9$ cm

$\hat{C} = 30°\ 56'\ 59''$ $c = 4{,}7$ cm

20 **En una circunferencia de radio 6 trazamos una cuerda *AB* a 3 cm del centro. Halla el ángulo *AOB*.**



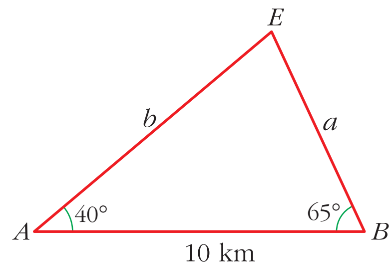
☛ ***Los triángulos AOP y BOP son iguales. En ambos conoces un cateto y la hipotenusa. Halla el ángulo AOP, que es la mitad de $\overset{\frown}{AOB}$.***



$$\left.\begin{array}{l}\overline{OP} = 3 \text{ cm}\\ \overline{OB} = 6 \text{ cm}\\ OPB = 90°\end{array}\right\} \rightarrow cos\ \overset{\frown}{POB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \overset{\frown}{POB} = 60° \rightarrow$$

$$\rightarrow \overset{\frown}{AOB} = 2 \cdot \overset{\frown}{POB} = 2 \cdot 60° = 120°$$

22 **Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?**



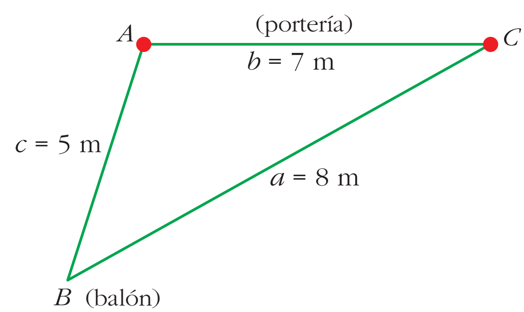
$\hat{E} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 75°$

Aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\ 40°} = \frac{10}{sen\ 75°} \rightarrow a = \frac{10 \cdot sen\ 40°}{sen\ 75°} = 6{,}65 \text{ km} \quad \text{dista de } B$$

$$\frac{b}{sen\ 65°} = \frac{10}{sen\ 75°} \rightarrow b = \frac{10 \cdot sen\ 65°}{sen\ 75°} = 9{,}38 \text{ km} \quad \text{dista de } A$$

23 **En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?**



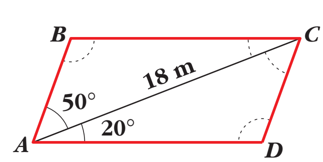
Aplicando el teorema del coseno:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\ \hat{B} \rightarrow$

$$\rightarrow cos\ \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0{,}5 \rightarrow B = 60$$

24 **Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:**

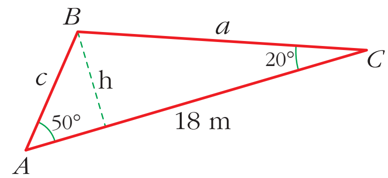
☛ ***$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 50°$. Calcula los lados del triángulo ACD y su área. Para hallar la otra diagonal, considera el triángulo ABD.***



- Los dos triángulos en que la diagonal divide al paralelogramo son iguales.

  Luego bastará resolver uno de ellos para calcular los lados:

  $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$



$$\frac{a}{sen\ 50°} = \frac{18}{sen\ 110°} \rightarrow a = \frac{18 \cdot sen\ 50°}{sen\ 110°} = 14{,}7 \text{ m}$$

$$\frac{c}{sen\ 20°} = \frac{18}{sen\ 110°} \rightarrow c = \frac{18 \cdot sen\ 20°}{sen\ 110°} = 6{,}6 \text{ m}$$

Así: $\overline{AB} = \overline{CD} = c = 6{,}6$ m

$\overline{BC} = \overline{AD} = a = 14{,}7$ m

Para calcular el área del triángulo ABC:

$$sen\ 50° = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot sen\ 50° \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Área}_{ABC} = \frac{18 \cdot h}{2} = \frac{18 \cdot c \cdot sen\ 50°}{2} = \frac{18 \cdot 6{,}6 \cdot sen\ 50°}{2} = 45{,}5 \text{ m}^2$$

El área del paralelogramo será:

$$\text{Área}_{ABCD} = 2 \cdot \text{Área}_{ABC} = 2 \cdot 45{,}5 = 91 \text{ m}^2$$

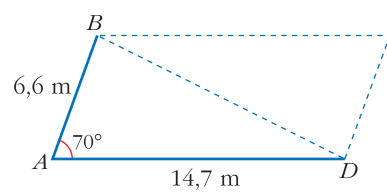
- Para calcular la otra diagonal consideremos el triángulo ABD:

  $\hat{A} = 50° + 20° = 70°$

  Aplicando el teorema del coseno:

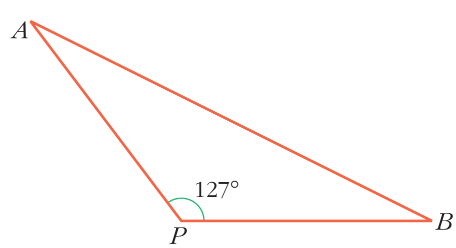
  $\overline{BD}^2 = 6{,}6^2 + 14{,}7^2 - 2 \cdot 6{,}6 \cdot 14{,}7 \cdot cos\ 70° \approx$

  $\approx 193{,}28 \rightarrow BD = 13{,}9$ m



26 **Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127°. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?**

(Nudo = milla / hora; milla = 1 850 m)



La distancia que recorre cada uno en ese tiempo es:

Barco A $\rightarrow$ $\overline{PA} = 17 \cdot 1\,850$ m/h $\cdot$ 5 h $= 157\,250$ m

Barco B $\rightarrow$ $\overline{PB} = 26 \cdot 1\,850$ m/h $\cdot$ 3,5 h $= 168\,350$ m

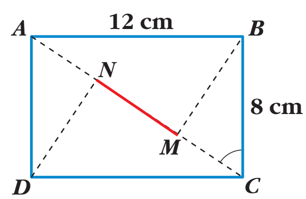
Necesariamente, $\overline{AB} > \overline{PA}$ y $\overline{AB} > \overline{PB}$, luego:

$$\overline{AB} > 168\,350 \text{ m}$$

Como el alcance de sus equipos de radio es 150 000 m, no podrán ponerse en contacto.

(NOTA: Puede calcularse $\overline{AB}$ con el teorema del coseno $\rightarrow$ $\overline{AB} = 291\,432{,}7$ m).

28 **En un rectángulo *ABCD* de lados 8 y 12 cm, se traza desde *B* una perpendicular a la diagonal *AC*, y desde *D*, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean *M* y *N* los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento $\overline{MN}$.**



☛ ***En el triángulo ABC, halla $\hat{C}$. En el triángulo BMC, halla $\overline{MC}$. Ten en cuenta que:***

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\,\overline{MC}$$

Los triángulos *AND* y *BMC* son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces:

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$$

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo *ABC* y $\overline{MC}$ en el triángulo *BMC*.

- En $\widehat{ABC}$:

$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208 \text{ (por el teorema de Pitágoras)} \rightarrow \overline{AC} = 14{,}4 \text{ cm}$$

Calculamos C (en $\widehat{ABC}$):

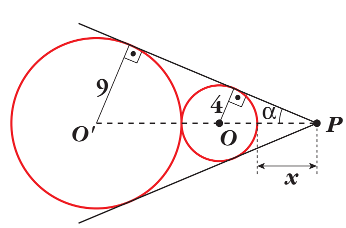
$$tg\ \hat{C} = \frac{12}{8} = 1{,}5 \rightarrow C = 56°\ 18'\ 35{,}8''$$

- En $\widehat{BMC}$:

$$cos\ \hat{C} = \frac{\overline{MC}}{8} \rightarrow \overline{MC} = 8 \cdot cos\,(56°\ 18'\ 35{,}8'') = 4{,}4 \text{ cm}$$

Por último: $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14{,}4 - 2 \cdot 4{,}4 = 5{,}6$ cm

29 **Dos circunferencias son tangentes exteriormente y sus radios miden 9 m y 4 m, respectivamente. Halla el ángulo 2α que forman sus tangentes comunes.**



☛ ***Los radios forman con las tangentes dos triángulos rectángulos. Como $\overline{OP} = 4 + x$, se tiene:***

$$\textit{sen}\ \alpha = \frac{4}{4 + x} \quad \text{y} \quad \textit{sen}\ \alpha = \frac{9}{17 + x}$$

Calcula x y después α.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OP} = 4 + x \;\rightarrow\; sen\ \alpha = \dfrac{4}{4 + x} \\[2ex] \overline{O'P} = 9 + 4 + 4 + x = 17 + x \;\rightarrow\; sen\ \alpha = \dfrac{9}{17 + x} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{4}{4 + x} = \frac{9}{17 + x} \;\rightarrow\; 4(17 + x) = 9(4 + x) \;\rightarrow$$

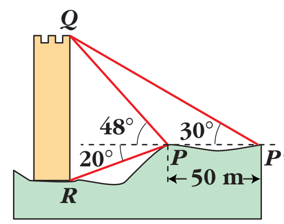
$$\rightarrow 68 - 36 = 9x - 4x \;\rightarrow\; 32 = 5x \;\rightarrow\; x = 6{,}4 \text{ m}$$

Sustituyendo x por su valor:

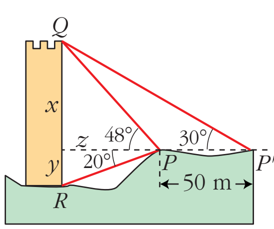
$$sen\ \alpha = \frac{4}{4 + x} = \frac{4}{4 + 6{,}4} = \frac{4}{10{,}4} = 0{,}3846 \;\rightarrow\; \alpha = 22° \ 37' \ 11{,}5''$$

Así: $2\alpha = 45° \ 14' \ 23''$

30 **Halla la altura de la torre QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.**



Llamemos x e y a las medidas de la altura de las dos partes en que queda dividida la torre según la figura dada; y llamemos z a la distancia de P a la torre.



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 48° = \dfrac{x}{z} \;\rightarrow\; x = z \cdot tg\ 48° \\[2ex] tg\ 30° = \dfrac{x}{z + 50} \;\rightarrow\; x = (z + 50)\ tg\ 30° \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z \cdot tg\ 48° = (z + 50)\ tg\ 30° \;\rightarrow$$

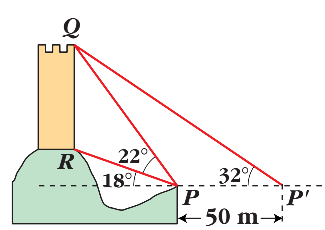
$$\rightarrow z \cdot tg\ 48° = z \cdot tg\ 30° + 50 \cdot tg\ 30° \;\rightarrow\; z = \frac{50\ tg\ 30°}{tg\ 48° - tg\ 30°} = 54{,}13 \text{ m}$$

Sustituyendo en $x = z \cdot tg\ 48° = 54{,}13 \cdot tg\ 48° = 60{,}12 \text{ m} = x$

Para calcular y: $tg\ 20° = \dfrac{y}{z} \;\rightarrow\; y = z \cdot tg\ 20° = 54{,}13 \cdot tg\ 20° = 19{,}7 \text{ m}$

Luego: $\overline{QR} = x + y = 79{,}82$ m mide la altura de la torre.

31 **Calcula la altura de QR, cuyo pie es inaccesible y más alto que el punto donde se encuentra el observador, con los datos de la figura.**



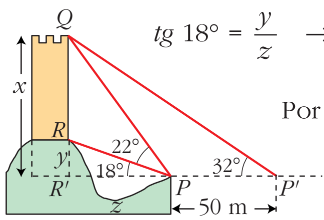
Llamemos x a la distancia del punto más alto a la línea horizontal del observador; y a la distancia de la base de la torre a la misma línea; y z a la distancia $\overline{R'P}$, como se indica en la figura.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ (18° + 22°) = tg\ 40° = \dfrac{x}{z} \quad \rightarrow \quad x = z \cdot tg\ 40° \\[2ex] tg\ 32° = \dfrac{x}{z + 50} \quad \rightarrow \quad x = (z + 50)\ tg\ 32° \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad z \cdot tg\ 40° = (z + 50)\ tg\ 32° \quad \rightarrow \quad z = \frac{50\ tg\ 32°}{tg\ 40° - tg\ 32°} = 145{,}84$$

Sustituyendo en $x = z \cdot tg\ 40° = 145{,}84 \cdot tg\ 40° = 122{,}37$ m

Para calcular y:

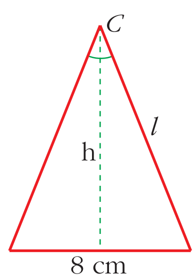


$$tg\ 18° = \frac{y}{z} \quad \rightarrow \quad y = z \cdot tg\ 18° = 145{,}84 \cdot tg\ 18° = 47{,}4 \text{ m}$$

Por tanto:

$\overline{QR} = x - y = 74{,}97$ m mide la altura de la torre

32 **La longitud del lado de un octógono regular es 8 cm. Halla los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al octógono.**



Consideremos el triángulo isósceles formado por el centro del polígono y uno de sus lados:

$$\hat{C} = \frac{360°}{8} = 45°$$

- El radio de la circunferencia inscrita será la altura h de ese triángulo:

$$tg\ \frac{45°}{2} = tg\ 22{,}5° = \frac{4}{\text{h}} \quad \rightarrow \quad \text{h} = \frac{4}{tg\ 22{,}5°} = 9{,}66 \text{ cm}$$

- El de la circunferencia circunscrita será el lado l del triángulo:

$$sen\ \frac{45°}{2} = sen\ 22{,}5° = \frac{4}{l} \quad \rightarrow \quad l = \frac{4}{sen\ 22{,}5°} = 10{,}45 \text{ cm}$$

35 **Prueba que solo existe un triángulo con estos datos: $b = \sqrt{3}$ m, $a = 1{,}5$ m, $\hat{A} = 60°$**

¿Existe algún triángulo con estos datos?

$$\hat{C} = 135°, \ b = 3\sqrt{2} \text{ cm}, \ c = 3 \text{ cm}$$

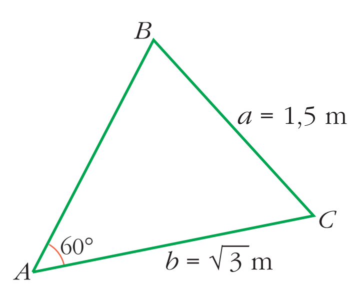
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A}$

$$1{,}5^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + c^2 - 2\sqrt{3}\ c\ cos\ 60°$$

$$2{,}25 = 3 + c^2 - 2\sqrt{3}\ c \cdot \frac{1}{2}$$

$$c^2 - \sqrt{3}\, c + 0{,}75 = 0$$

$$c = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$



La ecuación de segundo grado solo tiene una raíz. Solo hay una solución.

(NOTA: También se pueden estudiar las dos soluciones que salen para B con el teorema del seno y ver que una de ellas no es válida, pues quedaría $\hat{A} + \hat{B} > 180°$).

- Podemos resolverlo con el teorema del coseno, como antes, o con el teorema del seno. Resolvemos este apartado con el segundo método mencionado:

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{sen\ \hat{B}} = \frac{3}{sen\ 135°} \rightarrow$$

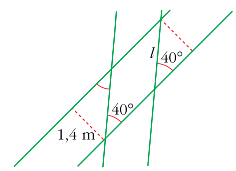
$$\rightarrow sen\ \hat{B} = \frac{3\sqrt{2}\ sen\ 135°}{3} = \sqrt{2}\ sen\ 135° = 1 \rightarrow \hat{B} = 90°$$

Pero: $\hat{C} + \hat{B} = 135° + 90° > 180°$ ¡Imposible!

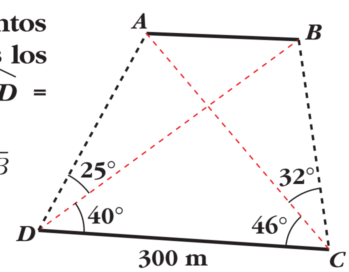
Luego la solución no es válida y, por tanto, concluimos que no hay ningún triángulo con esos datos.

36 Dos vías de tren de 1,4 m de ancho se cruzan formando un rombo. Si un ángulo de corte es de 40°, ¿cuánto valdrá el lado del rombo?

$$sen\ 40° = \frac{1,4}{l} \rightarrow l = \frac{1,4}{sen\ 40°} = 2,18\ \text{m}$$



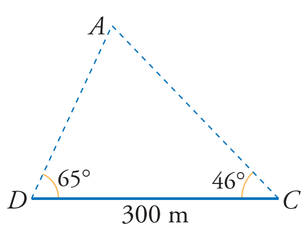
38 Queremos calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles, A y B. Desde C y D tomamos los datos: $\overline{CD} = 300$ m, $\widehat{ADB} = 25°$, $\widehat{ACB} = 32°$, $\widehat{ACD} = 46°$, $\widehat{BDC} = 40°$. Calcula $\overline{AB}$.



Si conociésemos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, podríamos hallar $\overline{AB}$ con el teorema del coseno en ABC.

Calculemos, pues, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$:

- En el triángulo ADC:



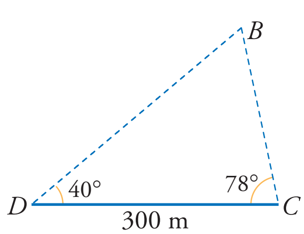
$$\hat{A} = 180° - 65° - 46° = 69°$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{300}{sen\ 69°} = \frac{\overline{AC}}{sen\ 65°} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AC} = \frac{300 \cdot sen\ 65°}{sen\ 69°} = 291,24\ \text{m}$$

- En el triángulo BCD:



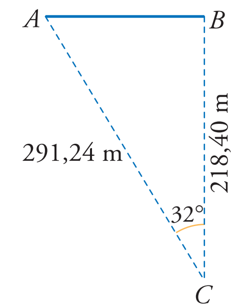
$$\hat{B} = 180° - 40° - 78° = 62°$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{300}{sen\ 62°} = \frac{\overline{BC}}{sen\ 40°} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = \frac{300 \cdot sen\ 40°}{sen\ 62°} = 218,40\ \text{m}$$

- Podemos centrarnos ya en el triángulo ABC, y aplicar el teorema del coseno:



$$\overline{AB}^2 = 291{,}24^2 + 218{,}40^2 - 2 \cdot 291{,}24 \cdot 218{,}40 \cdot \cos 32° =$$

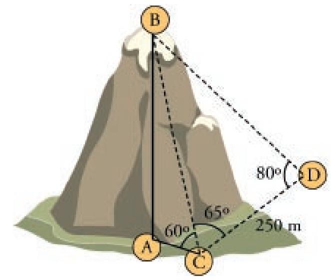
$$= 24\,636{,}019$$

$$\overline{AB} = 156{,}96 \text{ m}$$

40 **Para medir la altura de una montaña $\overline{AB}$ nos hemos situado en los puntos *C* y *D* distantes entre sí 250 m, y hemos tomado las siguientes medidas:**

$$\widehat{ACB} = 60° \qquad \widehat{BCD} = 65° \qquad \widehat{BDC} = 80°$$

Calcula la altura de la montaña.



Para poder calcular la altura $\overline{AB}$ en el triángulo BAC necesitamos $\overline{BC}$, que lo podemos obtener aplicando el teorema del seno en el triángulo BCD:

$$\widehat{CBD} = 180° - 80° - 65° = 35°$$

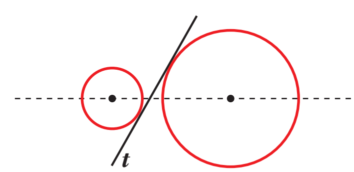
$$\frac{250}{\operatorname{sen} 35°} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} 80°} \rightarrow \overline{BC} = \frac{250 \cdot \operatorname{sen} 80°}{\operatorname{sen} 35°} = 429{,}24$$

En BAC:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}\operatorname{sen} 60° = 429{,}24 \cdot \operatorname{sen} 60°$$

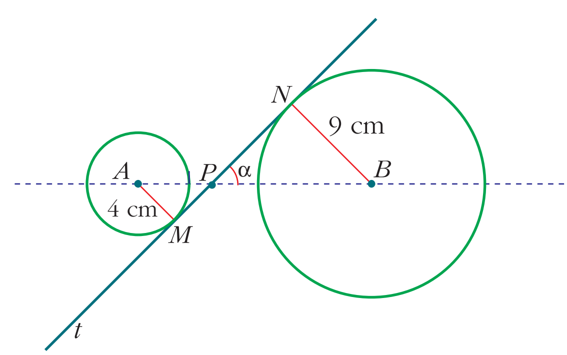
$$\overline{AB} = 371{,}73 \text{ m}$$

41 **Calcula el ángulo que forma la tangente a las circunferencias de la figura con la línea que une sus centros. Los radios miden 4 y 9 cm, y la distancia entre sus centros es de 16 cm.**



En $AMP \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{4}{\overline{AP}}$

En $BNP \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{9}{16 - \overline{AP}}$



$$4(16 - \overline{AP}) = 9\overline{AP} \rightarrow 64 - 4\overline{AP} = 9\overline{AP} \rightarrow 64 = 13\overline{AP} \rightarrow \overline{AP} = \frac{64}{13}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{64/13} = \frac{52}{64} = 0{,}8125 \rightarrow \alpha = 54°\ 20'\ 27{,}3''$$